Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2002. Том 43, № 6

УДК 517.946

НЕРАВЕНСТВО КОРНА ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ТОНКИХ ИСКРИВЛЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

С. А. Назаров, А. С. Слуцкий

Аннотация: Выводится весовое и анизотропное неравенство Корна для системы тонких упругих стержней и проверяется его асимптотическая точность. Строение норм на элементах конструкции (стержни и узлы) определяется в результате классификации элементов и присвоения им категорий: подвижные, малоподвижные и защемленные. Ранее такая классификация не вводилась, а ограничения, наложенные в предшествующих исследованиях на строение системы стержней, исключали наличие подвижных элементов.

Ключевые слова: тонкие стержни, неравенство Корна, весовые и анизотропные нормы, классификация элементов упругой конструкции, подвижные и малоподвижные стержни

1. Система стержней. Упругое тело $\Omega(h)$, зависящее от малого параметра $h \in (0, h_0]$, является объединением тонких стержней $G^1(h), \dots, G^N(h)$ и малых узлов $Q_h^1, \dots, Q_h^M$,

$$\Omega(h) = \bigcup_{n=1}^{N} G^n(h) \cup \bigcup_{m=1}^{M} Q_h^m. \tag{1}$$

Узел Q_h^j получается сжатием в h^{-1} раз области Q_1^j относительно центра P^j,

$$Q_h^j = \{x \in \mathbb{R}^3 : h^{-1}(x - P^j) \in Q_1^j\}.$$

Для того чтобы определить стержни $G^n(h)$, введем прямолинейные замкнутые отрезки $\Sigma^1, \dots, \Sigma^N$, соединяющие некоторые пары точек из набора $\mathfrak{P} = \{P^1, \dots, P^M\}$. Объединение $\bigcup \Sigma^n$ называем *скелетом* $\mathfrak{S}$ *системы* $\Omega(h)$ и предполагаем, что $\mathfrak{S}$ — связное множество, содержащее все точки из $\mathfrak{P}$. Подчеркнем, что $P^j \neq P^k$ при $j \neq k$, но среди отрезков $\Sigma^1, \dots, \Sigma^N$ могут быть совпадающие (два узла соединены несколькими «параллельными» стержнями). Пусть l_n — длина отрезка Σ^n и $z \in [0, l_n]$ — переменная на Σ^n. Введем область $\omega^n \subset \mathbb{R}^2$, ограниченную кусочно-гладким контуром $\partial\omega^n$, и семейство диффеоморфизмов $\varkappa_z^n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, гладко зависящих от параметра $z \in [0, l_n]$. Стержень $G^n(h)$ определим по формуле

$$G^n(h) = \{x : z^n \in (0, l_n), \quad h^{-1}y^n \in \omega^n(z^n) = \varkappa_{z^n}^n \omega^n\}, \tag{2}$$

где (y^n, z^n) — декартовы координаты, причем $y^n = (y_1^n, y_2^n)$ — координаты в плоскости, ортогональной оси Σ^n стержня $G^n(h)$. Все множества Q_1^m, Σ^n, ω^n и т. п. считаем фиксированными, не зависящими от параметра h.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 00–01–00455).

Вывод асимптотически точного неравенства Корна для системы стержней $\Omega(h)$ опирается на следующее предположение о соединении стержней и узлов. Если стержень $G^n(h)$ прикреплен к узлу Q_h^m (т. е. точка P^m является концом отрезка Σ^n), то в пересечении $G^n(h)\cap Q_h^m$ найдется шар $\mathbb{B}_{hR}^{n,m}$ с радиусом hR и, кроме того, множитель R не зависит от $h\in(0,h_0]$. Отсюда, в частности, вытекает существование круговых цилиндров $S^{n,m}(h)$ (штырь) и $s_h^{n,m}$ (шайба) с радиусом hr и высотами δ и hr соответственно, причем

$$S^{n,m}(h)\subset G^n(h),\quad s_h^{n,m}\subset G^n(h)\cap Q_h^m,\quad s_h^{n,m}\subset S^{n,m}(h),$$

а размеры r и δ не зависят от $h\in(0,h_0]$. Далее удобно считать, что верхняя граница для параметра h удовлетворяет неравенству $h_0\le 1$. Поскольку количество сочленений узел-стержень конечно, постоянные R,r и δ можно взять общими для всей системы. Если оказалось, что стержень $G^n(h)$ лишь касается узла Q_h^m, т. е. его торец лежит на поверхности ∂Q_h^m, то упомянутого выше свойства сочленения можно добиться искусственным увеличением узла — присоединением к Q_h^m малой части стержня.

Тело $\Omega(h)$ защемлено по поверхности Γ, являющейся объединением множеств $\Gamma_h^{m_1},\dots,\Gamma_h^{m_J}$,

$$\Gamma_h^m=\{x:h^{-1}(x-P^m)\in\Gamma^m\},\quad \Gamma^m\subset\partial Q^m,\quad \operatorname{mes}_2\Gamma^m>0.$$

Рассматриваем случай $J\ge 1$ — закреплен хотя бы один узел. Таким образом, справедливо неравенство Корна

$$\|u;H^1(\Omega(h))\|^2\le c(h)\mathscr{E}(u;\Omega(h)),\tag{3}$$

в котором $\mathscr{E}(u;\Omega(h))$ — энергетический функционал, подобный упругой энергии,

$$\mathscr{E}(u;\Omega(h))=\int\limits_{\Omega(h)}\sum_{j,k=1}^{3}\left|\frac{\partial u_j}{\partial x_k}(x)+\frac{\partial u_k}{\partial x_j}(x)\right|^2dx,\tag{4}$$

H^1 — класс Соболева, а $u\in\mathring{H}^1(\Omega(h),\Gamma(h))^3$ — вектор смещений (u_1,u_2,u_3), аннулирующийся на $\Gamma(h)$. Различные доказательства неравенства (3) можно найти в [1–3] и др., однако даже полной информации о зависимости множителя $c(h)$ от геометрического параметра недостаточно для асимптотического анализа деформации конструкции $\Omega(h)$ (отметим, что $c(h)\le Ch^2$ согласно следствию 11). Целью работы является вывод *весового* и *анизотропного* неравенства Корна

$$\sum_{n=1}^{N}\| u;G^n(h)\|_{\dots}^2+\sum_{m=1}^{M}|||u;Q_h^m|||_{\dots}^2\le c\mathscr{E}(u;\Omega(h)),\tag{5}$$

в котором постоянная c не зависит от $h\in(0,h_0]$ и $u\in\mathring{H}(\Omega(h),\Gamma(h))^3$, а нормы $\|\cdot\|_{\dots}$ и $|||\cdot|||_{\dots}$ содержат множители h, причем их вид определяется после классификации стержней и узлов (*защемленные*, *малоподвижные* и *подвижные*). Категория элемента, предписываемая этой классификацией, обусловлена как его положением в конструкции $\Omega(h)$, так и взаимодействием с другими элементами. Если в качестве $u(h,x)$ взять семейство решений линейной задачи теории упругости на $\Omega(h)$ и устремить h к нулю, то поведение полей смещений и напряжений на каком-либо элементе конструкции будет предопределено категорией этого элемента. Так, обычный асимптотический анзац (см. [4–6] и др.) для одиночных стержней годится лишь для закрепленных и малоподвижных стержней, но нуждается в изменении для подвижных (ср. с [7]). К этому вопросу мы еще вернемся в п. 7.

Предлагаемая классификация неизвестна ни в механических, ни в математических исследованиях. С одной стороны, классическое понятие *статически определимой* конструкции, широко используемое в теории сопротивления материалов (см. [8, 9] и др.), соотносится лишь с конкретным методом расчета сил и моментов, действующих на элементы, но не предсказывает асимптотику поля смещений u. С другой стороны, в многочисленных работах, посвященных строгому асимптотическому анализу стержневых систем, всем элементам приписываются *одинаковые свойства* путем жесткой фиксации геометрического строения системы (см., например, [10–14]) или постулирования неравенства Корна специального вида (см. [15, 16]). Поэтому конструкция, имеющая хотя бы один подвижный элемент, не подпадает под упомянутые результаты. Подчеркнем, что перекладина футбольных ворот как раз и оказывается подвижным элементом простейшего сочленения трех стержней.

Классификация узлов и стержней производится в пп. 2–5. В п. 6 устанавливается неравенство Корна (5). Наконец, в п. 7 проверяется асимптотическая точность распределения весовых множителей в нормах. В дальнейшем различные множители, не зависящие от h, обозначаются символом c. Если не возникает путаницы, индексы n и m у стержней $G^n(h)$ и узлов Q_h^m не указываются. Под u всегда подразумевается вектор смещений из пространства $\mathring{H}(\Omega(h), \Gamma(h))^3$.

2. Защемленные узлы и стержни. Назовем узел Q_h *защемленным*, если на части Γ_h границы ∂Q_h поставлены условия Дирихле

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma_h. \tag{6}$$

Следующее утверждение выводится растяжением координат и применением неравенства Корна в области Q_1 с единичными размерами (см., например, теорему 3.3.3 из [3]).

Лемма 1. *При выполнении* (6) *справедливо неравенство*

$$|||u; Q_h|||_0 := (\|\nabla_x u; L_2(Q_h)\|^2 + h^{-2}\|u; L_2(Q_h)\|^2)^{1/2} \le c\mathscr{E}(u; Q_h)^{1/2}. \tag{7}$$

Стержни, исходящие из защемленного узла, также называются *защемленными.* Им соответствует следующая весовая анизотропная норма:

$$\begin{aligned} ❚u; G(h)❚_0 := \Bigg(\int\limits_{\Omega(h)} \Bigg\{ \sum_{i=1}^{2} \Bigg[\left|\frac{\partial u_i}{\partial y_i}\right|^2 + h^2\rho_h^{-2}\left(\left|\frac{\partial u_i}{\partial z}\right|^2 + \left|\frac{\partial u_3}{\partial y_i}\right|^2 \right) + h^2\rho_h^{-4}|u_i|^2 \Bigg] \\ + h^2\rho_h^{-2}\left[\left|\frac{\partial u_1}{\partial y_2}\right|^2 + \left|\frac{\partial u_2}{\partial y_1}\right|^2 \right] + \left|\frac{\partial u_3}{\partial z}\right|^2 + \rho_h^{-2}|u_3|^2 \Bigg\} dydz \Bigg)^{1/2}. \end{aligned} \tag{8}$$

При этом $\rho(x) = h + \mathrm{dist}\{x,\ G(h) \cap Q_h\}$ — весовой множитель, имеющий порядок $O(h)$ на защемленном конце $G(h) \cap Q_h$ стержня, (y_1, y_2, z) — декартовы координаты, привязанные к стержню $G(h)$ (см. (2)), а u_i и u_3 — проекции вектора u на оси y_i и z.

Для защемленных стержней выполняется следующее утверждение, вытекающее из теоремы 3.4.6 из [6] (см. также [17, 4, 5]).

Лемма 2. *Справедливо неравенство*

$$\pmb{|} u; G(h) \pmb{|}_0^2 \leq c\{\mathscr{E}(u; G(h)) + \mathscr{E}(u; Q_h)\}. \tag{9}$$

Обозначим через $\pmb{|} u; G(h) \pmb{|}_\times$ норму (8), в которой $\rho_h = 1$ (убираем весовые множители). Стержни, с которыми ассоциируется такая норма, называем *малоподвижными*.

3. Малоподвижные узлы. Будем говорить, что узел Q_h *малоподвижен в направлении* τ, если удалось оценить норму

$$|||u; Q_h|||_\tau := \Bigg(\int\limits_{Q_h} \Bigg\{ \sum_{i=1}^{2} \Bigg[\left| \frac{\partial u_i}{\partial y_i} \right|^2 + h^1 \Bigg(\left| \frac{\partial u_i}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_3}{\partial y_i} \right|^2 + |u_i|^2 \Bigg) \Bigg]$$
$$+ \left| \frac{\partial u_3}{\partial z} \right|^2 + h^1 \Bigg(\left| \frac{\partial u_1}{\partial y_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_2}{\partial y_1} \right|^2 \Bigg) + h^{-1} |u_3|^2 \Bigg\} \, dydz \Bigg)^{1/2}. \tag{10}$$

Здесь ось z декартовых координат (y, z) совпадает с направлением τ. Рассмотрим узел Q_h, присоединенный к малоподвижному (или защемленному) стержню $G(h)$, и в качестве τ возьмем направление z оси стержня. Сузим поле u на соответствующий штырь $S(h) \subset G(h)$ и положим

$$\hat{u}_i(y, z) = u_i(y, z) - \{\pi h^2 r^2\}^{-1} \int\limits_{\sigma_h} u_i(y, \zeta) \, d\zeta$$

(в фигурные скобки помещена площадь сечения штыря).

Лемма 3. *Справедливы неравенства*

$$h^1 \|u'; L_2(S(h))\|^2 + h^{-1} \|u_z; L_2(S(h))\|^2 \leq c \pmb{|} u; S(h) \pmb{|}_\times^2, \tag{11}$$

$$h^{-1} \|\hat{u}'; L_2(s_h)\|^2 \leq c\{\pmb{|} u; S(h) \pmb{|}_\times^2 + \mathscr{E}(u; S(h))\}, \tag{12}$$

где $u_3 = u_z$ *— продольное, а* $u' = (u_1, u_2)$ *— поперечные смещения в штыре* $S(h)$.

Доказательство. Оценка (11) вытекает из определения норм $\pmb{|} u; S(h) \pmb{|}_\times \leq \pmb{|} u; S(h) \pmb{|}_0$ и следствия неравенства Харди

$$\int\limits_0^{rh} u_j^2(y, z) \, dz \leq ch \int\limits_0^{\delta} \{|\partial_z u_j(y, z)|^2 + |u_j(y, z)|^2\} \, dz, \tag{13}$$

проинтегрированного по сечению штыря (множитель c зависит лишь от r и δ). Неравенство (13) приводит к искомой оценке (12) благодаря соотношениям

$$\int\limits_{S(h)} |\hat{u}_i|^2 \, dx \leq ch^2 \int\limits_{S(h)} |\nabla_y \hat{u}_i|^2 \, dx = ch^2 \int\limits_{S(h)} |\nabla_y u_i|^2 \, dx \leq c \pmb{|} u; S(h) \pmb{|}_\times^2,$$

$$\int\limits_{S(h)} |\partial_z \hat{u}_i|^2 \, dx \leq c \mathscr{E}(u_i; S(h)).$$

Второе содержится в предложении 3.4.13 из [6], а первое получено при помощи неравенства Пуанкаре на сечении σ_h. $\square$

Очередное утверждение относится как к малоподвижным, так и к защемленным стержням, поскольку $\pmb{|} u; G(h) \pmb{|}_\times \leq \pmb{|} u; G(h) \pmb{|}_0$.

Лемма 4. *Верна оценка*

$$|||u; Q_h|||_\tau^2 \le c\big\{\mathscr{E}(u; Q_h) + \mathscr{E}(u; G(h)) + \blacktriangleright u; G(h)\blacktriangleleft_\times^2\big\}. \tag{14}$$

Доказательство. Перенесем неравенство (11) на узел Q_h и оценим интегралы от производных. Введем жесткое смещение db, где $b = (b_1, b_2, \dots, b_6)^\top$, $\top$ — знак транспонирования, а d — 3×6-матрица-функция,

$$d(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha x_3 & -\alpha x_2 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha x_3 & 0 & \alpha x_1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha x_2 & -\alpha x_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{15}$$

Представим поле u на Q_h в виде суммы

$$u = V + db, \tag{16}$$

а составляющую V подчиним условиям

$$\varphi_k(V) = 0, \tag{17}$$

причем функционалы $\varphi_1, \dots, \varphi_6$ определим как интегралы по шайбе $s_h \subset S(h) \subset G(h)$:

$$\varphi_k(u) = \int\limits_{s_h} u_k(x)\,dx, \quad k = 1, 2, 3; \quad \varphi_4(u) = -\int\limits_{s_h} x_1 u_3(x)\,dx;$$

$$\varphi_5(u) = \int\limits_{s_h} x_2 u_3(x)\,dx; \quad \varphi_6(u) = \int\limits_{s_h} x_1 \hat{u}_2(x) - x_2 \hat{u}_1(x)\,dx.$$

Прямые вычисления приводят к равенствам

$$\varphi_k(db) = C_k b_k h^3, \qquad \varphi_{k+3}(db) = C_{k+3} b_{k+3} h^5; \qquad k = 1, 2, 3. \tag{18}$$

В силу (18) функционал $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6)^\top$ обладает следующим свойством:

$$\varphi(db) = 0, \ b \in \mathbb{R}^6 \Longrightarrow b = 0. \tag{19}$$

Поэтому при условии (17) слагаемое V из (16) удовлетворяет неравенству Корна (см., например, теорему 3.3.4 из [3] и теорему 2.3.3 из [6])

$$|||V; Q_h|||_0^2 \le c\mathscr{E}(V; Q_h) = c\mathscr{E}(u; Q_h). \tag{20}$$

Ясно, что $|||V; Q_h|||_\tau \le |||V; Q_h|||_0$.

Оценим теперь величину $|||db; Q_h|||_\tau$. Согласно лемме 3

$$J(u) := \int\limits_{s_h} (h^1|u_1|^2 + h^1|u_2|^2 + h^{-1}|u_3|^2)\,dx \le c \blacktriangleright u; G(h)\blacktriangleleft_\times^2.$$

Следовательно,

$$|\varphi_j(u)| \le c(\operatorname{mes}_3 s_h)^{1/2}\Big(\int\limits_{s_h} u_j(x)^2\,dx\Big)^{1/2}$$
$$\le ch^{3/2}h^{-1/2}J(u)^{1/2} \le ch\blacktriangleright u; G(h)\blacktriangleleft_\times, \quad j = 1, 2;$$

$$|\varphi_3(u)| \le c(\operatorname{mes}_3 s_h)^{1/2}\Big(\int\limits_{s_h} u_3(x)^2\,dx\Big)^{1/2} \le ch^{3/2}h^{1/2}J(u)^{1/2} \le ch^2\blacktriangleright u; G(h)\blacktriangleleft_\times;$$

$$|\varphi_{6-j}(u)| \le \Big(\int\limits_{s_h} x_j^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{s_h} u_3(x)^2\,dx\Big)^{1/2} \le ch^{5/2}h^{1/2}J(u)^{1/2} \le ch^3 ▌u; G(h)▌_\times.$$

Используя оценку (12) для $\hat u_i$, получаем

$$|\varphi_6(u)| \le c\Big\{\Big(\int\limits_{s_h} x_1^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{s_h} \hat u_2(x)^2\,dx\Big)^{1/2}+\Big(\int\limits_{s_h} x_2^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{s_h} \hat u_1(x)^2\,dx\Big)^{1/2}\Big\}$$
$$\le c(h^{5/2}h^{1/2}+h^{5/2}h^{1/2})(\mathscr{E}(u;G(h))+▌u;G(h)▌_\times).$$

Прямые вычисления интегралов, входящих в норму $|||db;Q_h|||_\tau$ (см. (10)), показывают, что в силу формул (18) и соотношений $\varphi_i(db)=\varphi_i(u)$ выполняется цепочка неравенств

$$|||db;Q_h|||_\tau^2 \le c\big(h^4b_1^2+h^4b_2^2+h^2b_3^2+h^4b_4^2+h^4b_5^2+h^4b_6^2\big) \le c(h^{-2}|\varphi_1(u)|^2$$
$$+h^{-2}|\varphi_2(u)|^2+h^{-4}|\varphi_3(u)|^2+h^{-6}|\varphi_4(u)|^2+h^{-6}|\varphi_5(u)|^2+h^{-6}|\varphi_6(u)|^2)$$
$$\le c(\mathscr{E}(u;S(h))+\mathscr{E}(u;Q_h)+▌u;S(h)▌_\times) \le c(\mathscr{E}(u;G(h))+\mathscr{E}(u;Q_h)+▌u;G(h)▌_\times).$$

Доказательство леммы заканчивается совмещением оценок, полученных для V и db. □

Назовем узел Q_h *подвижным лишь в направлении* ν, если удается оценить норму

$$|||u;Q_h|||_{[\nu]} := \Bigg(\int\limits_{Q_h}\Bigg\{\sum_{i=1}^{2}\Bigg[\Big|\frac{\partial u_i}{\partial y_i}\Big|^2+h^1\Bigg(\Big|\frac{\partial u_i}{\partial z}\Big|^2+\Big|\frac{\partial u_3}{\partial y_i}\Big|^2\Bigg)\Bigg]+h^1|u_1|^2$$
$$+h^{-1}|u_2|^2+\Big|\frac{\partial u_3}{\partial z}\Big|^2+h^1\Bigg(\Big|\frac{\partial u_1}{\partial y_2}\Big|^2+\Big|\frac{\partial u_2}{\partial y_1}\Big|^2\Bigg)+h^{-1}|u_3|^2\Bigg\}\,dydz\Bigg)^{1/2}, \quad (21)$$

в которой приняты обычные обозначения и ось Oy_1 направлена вдоль ν. Из леммы 4 вытекает

Следствие 5. *Если узел Q_h присоединен к малоподвижным стержням $G^n(h)$ и $G^k(h)$, у которых оси лежат в плоскости, перпендикулярной направлению ν, и не являются параллельными, то*

$$|||u;Q_h|||_{[\nu]}^2 \le c\big\{\mathscr{E}(u;Q_h)+\mathscr{E}(u;G^n(h))+\mathscr{E}(u;G^k(h))+▌u;G^n(h)▌_\times^2+▌u;G^k(h)▌_\times^2\big\}. \quad (22)$$

Полностью малоподвижный узел Q_h соотносится с нормой

$$|||u;Q_h|||_\times := \Bigg(\int\limits_{Q_h}\Bigg\{\sum_{i=1}^{2}\Bigg[\Big|\frac{\partial u_i}{\partial y_i}\Big|^2+h^1\Bigg(\Big|\frac{\partial u_i}{\partial z}\Big|^2+\Big|\frac{\partial u_3}{\partial y_i}\Big|^2\Bigg)+h^{-1}|u_i|^2\Bigg]$$
$$+\Big|\frac{\partial u_3}{\partial z}\Big|^2+h^1\Bigg(\Big|\frac{\partial u_1}{\partial y_2}\Big|^2+\Big|\frac{\partial u_2}{\partial y_1}\Big|^2\Bigg)+h^{-1}|u_3|^2\Bigg\}\,dydz\Bigg)^{1/2}. \quad (23)$$

Подчеркнем, что в (23) выбор осей безразличен. Лемма 4 обеспечивает очередное утверждение.

Следствие 6. *Если в узле Q_h встречаются три стержня $G^n(h)$, $G^k(h)$ и $G^j(h)$ с неколлинеарными осями, то выполняется неравенство*

$$|||u;Q_h|||^2_\times \le c\big\{\mathscr{E}(u;Q_h)+\mathscr{E}(u;G^n(h))+\mathscr{E}(u;G^k(h))+\mathscr{E}(u;G^j(h)) \\ +\,\rrbracket u;G^n_h\rrbracket^2_\times+\rrbracket u;G^k_h\rrbracket^2_\times+\rrbracket u;G^j_h\rrbracket^2_\times\big\}. \quad (24)$$

4. Малоподвижные стержни. Следующее утверждение относится к узлу Q_h, малоподвижному в направлении τ, которое совпадает с осью стержня $G(h)$. Полностью малоподвижный узел и узел, подвижный лишь в направлении ν, перпендикулярном τ, обладают нужным свойством, поскольку согласно (10), (21) и (23)

$$|||u;Q_h|||_\tau \le |||u;Q_h|||_{[\nu]} \le |||u;Q_h|||_\times.$$

Лемма 7. *Справедливо неравенство*

$$\rrbracket u;G(h)\rrbracket^2_\times \le c\big\{\mathscr{E}(u;G(h))+|||u;Q_h|||^2_\tau\big\}. \quad (25)$$

Доказательство. Представим поле u на стержне $G(h)$ в аналогичном (16) виде

$$u = W + da. \quad (26)$$

Здесь $a=(a_1,\dots,a_6)^\top$, а составляющая W подчинена условию

$$\int\limits_{\mathbb{B}_{h\mathbf{r}}} d^\top W\,dx = 0, \quad (27)$$

где $\mathbb{B}_{h\mathbf{r}}$ — шар радиуса $h\mathbf{r}$, расположенный внутри $G(h)\cap Q_h$ (см. п. 1). Начало декартовых координат x совмещено с центром шара, а ось Ox_3 направлена вдоль τ. Ввиду условия ортогональности (27) справедливо неравенство (см. теорему 3.3.4 в [3] и теорему 2.3.3 в [6])

$$|||W;\mathbb{B}_{h\mathbf{r}}|||^2_0 \le c\mathscr{E}(W;\mathbb{B}_{h\mathbf{r}}) = c\mathscr{E}(u;\mathbb{B}_{h\mathbf{r}}). \quad (28)$$

Введем гладкую срезающую функцию χ_h, равную единице вне $\mathbb{B}_{h\mathbf{r}}$ и нулю на концентрическом шаре с радиусом $h\mathbf{r}/2$, причем

$$|\chi_h(x)|\le 1, \quad |\nabla_x\chi_h(x)|\le ch^{-1}.$$

Поскольку $\mathscr{E}(W;G(h))=\mathscr{E}(u;G(h))$, в силу (28) и (7) имеем

$$\mathscr{E}(\chi_h W;G(h)) \le \mathscr{E}(W;G(h)) + ch^{-2}\|W;L_2(\mathbb{B}_{h\mathbf{r}})\|^2 \le c\mathscr{E}(u;G(h)).$$

Таким образом, применяя теорему 3.4.6 из [6] к полю $\chi_h W$, получаем, что

$$\rrbracket W;G(h)\rrbracket^2_\times \le \rrbracket W;G(h)\rrbracket^2_0 \le c\big(\rrbracket \chi_h W;G(h)\rrbracket^2_0 + |||W;\mathbb{B}_{h\mathbf{r}}|||^2_0\big) \\ \le c(\mathscr{E}(\chi_h W;G(h))+\mathscr{E}(W;\mathbb{B}_{h\mathbf{r}})) \le \mathscr{E}(u;G(h)). \quad (29)$$

Рассмотрим теперь слагаемое da из (26). Согласно (27) вектор a находится по формуле

$$a = \mathbf{d}^{-1}\int\limits_{\mathbb{B}_{h\mathbf{r}}} d^\top(x)u(x)\,dx, \quad (30)$$

где $\mathbf{d}$ — диагональная 6×6-матрица,

$$\mathbf{d} := \int\limits_{\mathbb{B}_{h\mathbf{r}}} d^\top(x)d(x)\,dx = \operatorname{diag}\{5ph^3,\ 5ph^3,\ 5ph^3,\ ph^5,\ ph^5,\ ph^5\}; \quad p=4\pi/15.$$

Из представления (30) и формулы для $\mathbf{d}$ сразу же следует, что

$$|a_j|^2 \le ch^{-6}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{B}_{h\mathbf{r}}} |u_j(x)|\,dx\Bigg)^2 \le ch^{-3}\int\limits_{\mathbb{B}_{h\mathbf{r}}} |u_j(x)|^2\,dx, \quad j=1,2,3,$$

а значит, при учете формулы (10)

$$|a_1|^2+|a_2|^2 \le ch^{-4}|||u;Q_h|||_\tau^2, \quad |a_3|^2 \le ch^{-2}|||u;Q_h|||_\tau^2.$$

При оценивании компонент a_4, a_5, a_6 вводятся функции $x \mapsto T(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - h^2\mathbf{r}^2$ и применяется интегрирование по частям (см. [4] и [6; § 3.3, 3.4]). Имеем

$$\begin{aligned}
|a_4|^2 &\le ch^{-10}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{B}_{h\mathbf{r}}} (u_3(x)x_2 - u_2(x)x_3)\,dx\Bigg)^2 \\
&= \frac{1}{2}ch^{-10}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{B}_{h\mathbf{r}}}\bigg(\frac{\partial T}{\partial x_2}(x)u_3(x) - \frac{\partial T}{\partial x_3}(x)u_2(x)\bigg)\,dx\Bigg)^2 \\
&\le ch^{-10}\int\limits_{\mathbb{B}_{h\mathbf{r}}} |T(x)|^2\,dx \int\limits_{\mathbb{B}_{h\mathbf{r}}}\bigg(\bigg|\frac{\partial u_3}{\partial x_2}(x)\bigg|^2 + \bigg|\frac{\partial u_2}{\partial x_3}(x)\bigg|^2\bigg)\,dx \\
&\le ch^{-3}\int\limits_{\mathbb{B}_{h\mathbf{r}}}\bigg(\bigg|\frac{\partial u_3}{\partial x_2}(x)\bigg|^2 + \bigg|\frac{\partial u_2}{\partial x_3}(x)\bigg|^2\bigg)\,dx \le ch^{-4}|||u;\mathbb{B}_{h\mathbf{r}}|||_\tau^2 \le ch^{-4}|||u;Q_h|||_\tau^2,
\end{aligned}$$

$$|a_5|^2+|a_6|^2 \le ch^{-4}|||u;Q_h|||_\tau^2.$$

Вычисляя интегралы в норме $\| da; G(h) \|_\times$ (см. формулы (8) с $\rho_h = 1$), из полученных оценок выводим, что

$$\| u; da \|_\times^2 \le c\{h^4(|a_1|^2+|a_2|^2)+h^2|a_3|^2+h^4(|a_4|^2+|a_5|^2+|a_6|^2)\} \le c|||u;Q_h|||_\tau. \quad (31)$$

Объединяя (29) и (31), учитываем очевидное соотношение

$$\| v; G(h) \|_\times \le \| v; G(h) \|_0$$

и приходим к (25). $\square$

5. Подвижные узлы и стержни. Для *подвижных* стержней и узлов назначим такие нормы:

$$\begin{aligned}
\| u; G(h) \| := \Bigg(\int\limits_{G(h)}\Bigg\{\sum_{i=1}^{2}\bigg[\bigg|\frac{\partial u_i}{\partial y_i}\bigg|^2 + h^2\bigg(\bigg|\frac{\partial u_i}{\partial z}\bigg|^2 + \bigg|\frac{\partial u_3}{\partial y_i}\bigg|^2\bigg) + h^2|u_i|^2\bigg] \\
+ h^2\bigg[\bigg|\frac{\partial u_1}{\partial y_2}\bigg|^2 + \bigg|\frac{\partial u_2}{\partial y_1}\bigg|^2 + |u_3|^2\bigg] + \bigg|\frac{\partial u_3}{\partial z}\bigg|^2\Bigg\}\,dydz\Bigg)^{1/2}, \quad (32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|||u;Q_h||| := \Bigg(\int\limits_{Q_h}\Bigg\{\sum_{i=1}^{2}\bigg[\bigg|\frac{\partial u_i}{\partial y_i}\bigg|^2 + h^1\bigg(\bigg|\frac{\partial u_i}{\partial z}\bigg|^2 + \bigg|\frac{\partial u_3}{\partial y_i}\bigg|^2 + |u_i|^2\bigg)\bigg] \\
+ \bigg|\frac{\partial u_3}{\partial z}\bigg|^2 + h^1\bigg(\bigg|\frac{\partial u_1}{\partial y_2}\bigg|^2 + \bigg|\frac{\partial u_2}{\partial y_1}\bigg|^2 + |u_3|^2\bigg)\Bigg\}\,dydz\Bigg)^{1/2}. \quad (33)
\end{aligned}$$

Следующие леммы имеют дело со стержнем $G(h)$, прикрепленным к *подвижному* узлу Q_h, и с узлом Q_h, в который упирается *подвижный* стержень $G(h)$.

Лемма 8. *Выполняется неравенство*

$$\|u;G(h)\|^2 \le c\left\{\mathscr{E}(u;G(h)) + \mathscr{E}(u;Q_h) + |||u;Q_h|||^2\right\}.$$

Доказательство. Воспользуемся представлением (16). Прямые вычисления показывают, что при некоторых постоянных $c_2 \ge c_1 \ge c_0 > 0$ выполняются оценки

$$c_0 h^4|b| \le |||db;Q_h|||^2 \le c_1 h^1 \operatorname{mes}_3\{Q_h\}|b| \le c_2 h^4|b|, \tag{34}$$

$$c_0 h^4|b| \le \|db;G(h)\|^2 \le c_1 h^2 \operatorname{mes}_3\{G(h)\}|b| \le c_2 h^4|b|. \tag{35}$$

Следовательно, согласно (34), (35), (16) и (20) справедливы соотношения

$$\|db;G(h)\|^2 \le c|||db;Q_h|||^2 \le 2c\big(|||u;Q_h|||^2 + |||V;Q_h|||_0^2\big) \le c\big(|||u;Q_h|||^2 + \mathscr{E}(u;Q_h)\big).$$

Осталось оценить составляющую V. Полагая в лемме 7 $u = V$, имеем

$$\|V;G(h)\|_\times^2 \le c\big\{\mathscr{E}(V;G(h)) + |||V;Q_h|||_\tau^2\big\}. \tag{36}$$

Теперь в силу (20) и очевидных связей

$$\mathscr{E}(V;G(h)) = \mathscr{E}(u;G(h)), \quad |||V;Q_h|||_\tau^2 \le |||V;Q_h|||_0^2, \quad \|V;G(h)\| \le \|V;G(h)\|_\times$$

из формулы (36) вытекает нужная оценка

$$\|V;G(h)\|^2 \le c\{\mathscr{E}(u;G(h)) + \mathscr{E}(u;Q_h)\}. \quad \square$$

Лемма 9. *Справедливо неравенство*

$$|||u;Q_h|||^2 \le c(\mathscr{E}(u;Q_h) + \mathscr{E}(u;G(h)) + \|u;G(h)\|^2). \tag{37}$$

Доказательство. В силу (29) имеем

$$\begin{aligned}\|da;G(h)\|^2 &\le 2\|u;G(h)\|^2 + 2\|W;G(h)\|^2 \\ &\le 2\|u;G(h)\|^2 + 2\|W;G(h)\|_\times^2 \le c(\|u;G(h)\|^2 + \mathscr{E}(u;G(h))).\end{aligned}$$

Таким образом, при помощи (34) и (35) заключаем, что

$$|||da;Q_h||| \le c(\|u;G(h)\|^2 + \mathscr{E}(u;G(h))). \tag{38}$$

Из леммы 4, оценки (29) и очевидного соотношения $\|u;G(h)\| \le \|u;G(h)\|_0$ следует цепочка неравенств

$$\begin{aligned}|||W;Q_h|||^2 \le |||W;Q_h|||_\tau^2 &\le c\big\{\mathscr{E}(W;Q_h) + \mathscr{E}(W;G(h)) + \|W;G(h)\|_\times^2\big\} \\ &\le c\{\mathscr{E}(u;Q_h) + \mathscr{E}(u;G(h))\}.\end{aligned} \tag{39}$$

Объединяя (38) и (39), приходим к (37). $\square$

6. Неравенство Корна для системы стержней. Утверждения, доказанные в предыдущих пунктах, позволяют переносить «индивидуальные» неравенства Корна с одного элемента конструкции на другой и присваивать этим элементам категории. Для стержней шкала категорий по нисходящей такова:

$$\text{защемленные} \searrow \text{малоподвижные} \searrow \text{подвижные}\,. \tag{40}$$

Она вполне согласуется с неравенствами, вытекающими непосредственно из определений норм:

$$\|u;G(h)\|_0 \ge \|u;G(h)\|_\times \ge \|u;G(h)\|. \tag{41}$$

Для узлов список (40) расширяется до пяти наименований: третью и четвертую позицию занимают соответственно «подвижные лишь в направлении ν» и «малоподвижные в направлении τ», причем из определений (7), (23), (21), (10) и (33) вытекает цепочка неравенств

$$|||\,u; Q_h\,|||_0 \geq |||\,u; Q_h\,|||_\times \geq |||\,u; Q_h\,|||_{[\nu]} \geq |||\,u; Q_h\,|||_\tau \geq |||\,u; Q_h\,|||. \qquad (42)$$

Здесь направления τ и ν следует считать взаимно перпендикулярными. При нарушении перпендикулярности третье неравенство в (42) перестает быть верным, т. е. в отличие от (40) классификация узлов не устанавливает отношение порядка.

Классификация стержней и узлов производится итерированием излагаемой далее процедуры. Сначала всем элементам присваивается низшая категория — подвижные. Учитывая доказанные в пп. 2–5 утверждения, переберем все пути в скелете $\mathfrak{S}$, начинающиеся в защемленных узлах и не возвращающиеся на пройденные ими стержни. Таких путей конечное число, и до любого элемента можно дотянуться одним из них (скелет $\mathfrak{S}$ связен). Первая попытка выяснить категории элементов обычно не приводит к успеху (исключение: $\mathfrak{S}$ — ломаная), так как имеются узлы, лежащие на пересечении нескольких путей. Для таких узлов среди категорий, порожденных разными путями, либо выбирается самая высокая, либо при помощи следствий 5 и 6 категории объединяются в более высокую, а именно, $[\nu]$ или $\times$. Если произошло изменение категории хотя бы одного узла, то могут улучшиться и категории стержней. Поэтому прохождение всевозможных путей следует повторить. Поскольку категории обязательно повышаются, количество повторов не превосходит $4M + 2N$.

Предложенный алгорифм не претендует на оптимальность и, конечно же, может быть усовершенствован. Для конкретных конструкций предпочтительной оказывается процедура поиска, напоминающая детскую игру «puzzle» и оперирующая со стандартными группами «узлы — стержни». Проведенная классификация элементов конструкции совместно с оценками, установленными в пп. 2–5, обеспечивают следующее утверждение.

Теорема 10. *На области $\Omega(h)$ справедливо весовое неравенство Корна (5), в котором постоянная c не зависит от геометрического параметра $h \in (0, h_0]$ и от поля $u \in \mathring{H}^1(\Omega(h), \Gamma(h))^3$, а под $\| u; G^n(h) \|^2_{\ldots}$ и $|||u; Q^m_h|||^2_{\ldots}$ подразумеваются нормы, отвечающие установленным категориям стержня $G^n(h)$ и узла Q^m_h.*

Согласно (32) и (33) выполняются оценки

$$\| u; G(h) \| \geq ch\|u; H^1(G(h))\|, \quad |||u; Q_h||| \geq ch^{1/2}\|u; H^1(Q_h)\|$$

с положительной постоянной c. Таким образом, при игнорировании категорий элементов из теоремы 10 вытекает

Следствие 11. *Для множителя $c(h)$ в неравенстве Корна (4) верно соотношение*

$$c(h) \leq Ch^2,$$

где C — постоянная, не зависящая от $h \in (0, h_0]$.

Подчеркнем, что при использовании обычной, а не весовой анизотропной нормы в пространстве $H^1(\Omega)^3$ приведенная оценка для постоянной $c(h)$ в (3) является асимптотически точной.

7. Обсуждение. Как обычно, для того чтобы убедиться в асимптотической точности неравенства Корна, достаточно рассмотреть лишь начальные члены асимптотического анзаца, принятого в теории стержней (см. [4–6] и др.),

$$v(h,x) = h^{-2}\sum_{i=1}^{2}\left(w_i(z)e^i - y_i\frac{\partial w_i}{\partial z}(z)e^3\right) + h^{-1}w_3(z)e^3 + h^{-2}w_4(z)\theta(y). \quad (43)$$

Здесь $w = (w_1,\dots,w_4)$ — произвольная гладкая вектор-функция, e^i — орт оси x_i, $x = (y,z)$ — декартовы координаты, привязанные к стержню $G(h)$, а $\theta(y) = e^2y_1 - e^1y_2$ — поворот. Подчеркнем, что в (43) отсутствуют асимптотические корректоры (см. [15, 16, 4–6] и др.), тем не менее энергетический функционал $\mathscr{E}(v; G(h))$ сохраняет порядок h^0 относительно параметра h (ср. с [6, § 5.4]).

Известно, что для стержня $G(h)$, закрепленного за конец $z = 0$, вектор-функцию w следует подчинить граничным условиям

$$w(0) = 0 \in \mathbb{R}^4, \quad \partial_z w_1(0) = \partial_z w_2(0) = 0. \quad (44)$$

Таким образом, слагаемые в норме $\|u; G(h)\|_0$ приобретают порядок h^0, а рост весовых множителей $\rho_h^{\cdots}$ компенсируется вырождением компонент w_j согласно условиям Дирихле (44). Исключением являются производные $\partial v_i/\partial y_i$, $i = 1,2$, которые аннулируются для вектора (43). Квадраты этих производных присутствуют как в функционале энергии (4), так и во всех выражениях $\|u; G^n(h)\|^2_{\dots}$, т. е. вопрос об асимптотической точности этих слагаемых не стоит.

Если стержень $G(h)$ малоподвижен, то какие-либо граничные условия для w не назначаются. Это согласуется с отсутствием весовых множителей $\rho_h^{\cdots}$ в норме $\|u; G^n(h)\|_\times$, слагаемые которой по-прежнему суть $O(h^0)$ при $h \to +0$.

В случае подвижного стержня $G(h)$ в норме (32) появляется еще одно исключительное слагаемое

$$\int\limits_{G(h)} h^2|v_3|^2\,dydz = O(h^2).$$

Для придания ему порядка h^0 изменим анзац (43), добавив в него жесткое продольное смещение стержня:

$$v(h,x) = h^{-2}ae^3 + h^{-2}\sum_{i=1}^{2}\left(w_i(z)e^i - y_i\frac{\partial w_i}{\partial z}(z)e^3\right) + h^{-1}w_3(z)e^3 + h^{-2}w_4(z)\theta(y). \quad (45)$$

Множитель a берем постоянным, поскольку при переменной величине $a(z)$ интеграл

$$\int\limits_{G(h)} \left|\frac{\partial u_3}{\partial z}\right|^2 dydz$$

приобретает недопустимо большой порядок $O(h^{-2})$. Отметим, что новое слагаемое не влияет на функционал энергии $\mathscr{E}(v; \Omega(h))$, содержащий лишь производные. Асимптотический анализ простейшей двумерной задачи [7] показывает, что продольное жесткое смещение подвижного стержня действительно сравнимо с его изгибами, т. е. множители при a_0e^3 и $w_i(z)e^i$ должны быть одинаковыми. Это обстоятельство имеет серьезные последствия: одномерная модель деформации системы стержней с подвижными элементами перестает быть дифференциальной задачей за счет появления дополнительных алгебраических неизвестных a_3^j, возникновения нелокальных условий сопряжения и необходимости проецирования некоторых уравнений на пространство функций с нулевым средним (подробности см. в [7]).

Итак, асимптотические анзацы (43) и (45) указывают на правильность распределения весовых множителей в нормах $\| \cdot \|_{\dots}$ для защемленных, малоподвижных и подвижных стержней. Структура асимптотических анзацев для узлов более простая: в качестве главного приближения на Q_n^m выступает жесткое смещение

$$v^m(h,x) = d(x - P^m)\{h^{-2}\gamma^m + h^{-1}\beta^m\}; \tag{46}$$

здесь d — матрица-функция (15), а $\gamma^m \in \mathbb{R}^6$ и $\beta^m \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{O}^3$ — столбцы (три нижних компоненты столбца β^m, отвечающие поворотам, равны нулю). Устойчивые краевые условия и устойчивые условия сопряжения (пользуемся терминологией из [18]) получаются в результате согласования анзацев (43), (45) и (46). Например,

$$\gamma^m = 0, \quad \beta^m = 0 \tag{47}$$

для защемленного узла, а значит, условия Дирихле (44) равносильны совпадению выражений (46) и (43) на Q_h^m с точностью $O(h^0)$. Вспоминая, что анзацы (43) и (46) соответствуют энергетическому функционалу $\mathscr{E}(v;\Omega(h)) = O(h^0)$, видим, что формулы (47) вытекают также из соотношения $\| u; G(h) \|_0 \le ch^0$, обеспеченного весовым неравенством Корна (5). Вычисляя нормы для остальных категорий узлов, заключаем, что

$$\gamma_1^m = \gamma_2^m = \gamma_3^m = 0 \quad \text{(полностью малоподвижный узел)},$$

$$\gamma_2^m = \gamma_3^m = 0 \quad \text{(узел подвижного лишь в направлении } \nu\text{)},$$

$$\gamma_3^m = 0 \quad \text{(узел малоподвижный в направлении } \tau = e^3\text{)}.$$

Наконец, для подвижного узла новые ограничения на столбцы γ^m и β^m не возникают. Полученная дополнительная информация о столбцах γ^m и β^m в (46) позволяет корректно поставить условия сопряжения в узлах для одномерной модели деформации системы стержней. В двумерной ситуации постановка этих условий описана в [7]. Весовое анизотропное неравенство Корна является основным инструментом при обосновании асимптотических моделей систем стержней.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кондратьев В. А., Олейник О. А.* Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенства Корна // Успехи мат. наук. 1988. Т. 43, № 5. С. 55–98.
2. *Nečas J.* Les méthodes in théorie des équations elliptiques. Paris; Prague: Masson-Academia, 1967.
3. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Мир, 1980.
4. *Назаров С. А.* Обоснование асимптотической теории тонких стержней. Интегральные и поточечные оценки // Проблемы мат. анализа. Вып. 17. СПб: изд-во СПбГУ, 1997. С. 101–152.
5. *Назаров С. А., Слуцкий А. С.* Одномерные уравнения деформации тонких слабоискривленных стержней. Асимптотический анализ и обоснование // Изв. РАН. Сер. мат. 2000. Т. 64, № 3. С. 97–131.
6. *Назаров С. А.* Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Научная книга, 2002.

7. *Назаров С. А., Слуцкий А. С.* Асимптотика частот собственных колебаний упругих балок, соединенных в форме буквы П // Докл. РАН. 2001. Т. 380, № 1. С. 23–26.
8. *Беляев Н. М.* Сопротивление материалов. М.: Наука, 1965.
9. *Работнов Ю. Н.* Механика деформированного твердого тела. М.: Наука, 1988.
10. *Le Dret H.* Modeling of the junction between two rods // J. Math. Pures Appl. 1989. V. 68. P. 365–397.
11. *Le Dret H.* Problemes variationnels dans les multi-domains modélisation des jonctions et applications. Paris: Masson, 1991.
12. *Cioranescu D., Jean Paulin J. S.* Structures très minces en élasticité linéarisée: tours et grillages // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. 1. 1989. V. 308. P. 41–46.
13. *Cioranescu D., Jean Paulin J. S.* Homogenization of reticulated structures. Berlin; New York: Springer-Verl., 1999. (Appl. Math. Sci.; 136).
14. *Zhikov V. V.* Homogenization of elasticity problems on singular structures. Vladimir, 2000. 66 p. (Preprint / Vladimir State Pedagogical Univ., N 1).
15. *Панасенко Г. П.* Асимптотические решения системы теории упругости для стержневых и каркасных структур // Мат. сб. 1992. Т. 183, № 1. С. 89–113.
16. *Panassenko G. P.* Asymptotic analysis of bar systems // Russian J. Math. Phys. 1: 1994. V. 2, N 3. P. 325–352; 2: 1996. V. 4, N 1. P. 87–116.
17. *Назаров С. А.* Неравенства Корна, асимптотически точные для тонких областей // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. 1992. Т. 2, № 8. С. 19–24.
18. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.

Статья поступила 17 июля 2001 г.

Назаров Сергей Александрович, Слуцкий Андрей Семенович
Институт проблем машиноведения РАН,
Большой пр. В.О., 61, Санкт-Петербург 199178
serna@snark.ipme.ru, andr@AS2607.spb.edu