Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2002. Том 43, № 6

УДК 517.946+519.34

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕСИММЕТРИЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В НЕОДНОЛИСТНОЙ ОБЛАСТИ

В. В. Денисенко

Аннотация: Предложен принцип минимума квадратичного функционала энергии для эллиптической краевой задачи, описывающей процессы переноса с несимметричными тензорными коэффициентами в неоднолистной области. Доказаны существование и единственность обобщенного решения в энергетическом пространстве. Энергетическая норма равна скорости производства энтропии.

Ключевые слова: функционал энергии, эллиптическое уравнение, несамосопряженный оператор, неоднолистная область

1. Введение. Операторы эллиптических краевых задач, традиционно формулируемых для описания процессов переноса в гиротропных средах, являются несамосопряженными. Для них неприменимы энергетические методы [1], которые позволяют строить эффективные приближенные и численные методы. Начиная с работы [2] автор формулирует и исследует новые краевые задачи, описывающие те же физические процессы, но имеющие симметричные положительные операторы. В двумерном случае для различных краевых задач обоснован принцип минимума квадратичного функционала энергии, построены вариационно-разностные схемы, показана эффективность применения многосеточного метода [3]. Трехмерная задача рассмотрена в [4].

Типичным примером гиротропного проводника является частично ионизированная плазма, помещенная в магнитное поле. При математическом моделировании электрических полей в ионосфере Земли возникает двумерная задача в неоднолистной области [5]. При некоторых дополнительных предположениях [5] она сводится к задаче в однолистной односвязной области. Такая задача в [6] переформулирована в виде эллиптической краевой задачи с симметричным оператором, для которой обоснован принцип минимума квадратичного функционала энергии.

Целью настоящей работы является распространение энергетического метода на задачу в неоднолистной области.

Доказательства подробно проведены при краевом условии на внешней границе, которое соответствует выделению приграничной особенности, а для более простых задач в последнем параграфе лишь перечислены изменения в формулировках и доказательствах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–05–65070) и INTAS–ESA (код проекта 99–01277).

2. Формулировка краевой задачи. При математическом моделировании крупномасштабных электрических полей ионосфера Земли обычно рассматривается как двумерный проводник и решается квазистационарная задача электропроводности [5]. После некоторых преобразований получается задача в области Ω, состоящей из трех плоских подобластей Ω^E, Ω^N, Ω^S. В упрощенной модели, когда геомагнитное поле полагается дипольным, подобласти Ω^N и Ω^S являются кругами радиуса r_0, а Ω^E — кольцом $r_0 < r < 1$. В этом случае все три подобласти склеены по окружности радиуса r_0. В общем случае подобласти не являются склеенными в геометрическом смысле, но соответствующие точки на границах трех подобластей соединены между собой условием эквипотенциальности. Это лишь незначительно усложняет приведенную ниже формулировку условий сопряжения по сравнению с указанным частным случаем.

Чтобы использовать теоремы вложения С. Л. Соболева, предполагаем, что подобласти Ω^E, Ω^N, Ω^S по отдельности являются связными объединениями конечного числа областей, каждая из которых звездная относительно некоторого круга. Подобласти Ω^N, Ω^S полагаем односвязными. Они ограничены замкнутыми гладкими кривыми Γ^N, Γ^S соответственно. Подобласть Ω^E гомеоморфна кольцу. Ее внутренняя граница Γ^E и внешняя Γ тоже являются замкнутыми гладкими кривыми.

В качестве координаты на каждой границе используем длину дуги l, индексами n, l отмечаем нормальную и касательную компоненты векторов. Между точками на кривых Γ^E, Γ^N, Γ^S существует взаимно однозначное гладкое соответствие, которое задается функциями $l^N(l^E)$, $l^S(l^E)$. Без ограничения общности полагаем $l^N(0) = l^S(0) = 0$. Ограничения на функции удобно записать в виде

$$0 < c_1 \le \frac{dl^N}{dl^E} \le c_2 < \infty, \quad 0 < c_1 \le \frac{dl^S}{dl^E} \le c_2 < \infty. \tag{1}$$

Положительными считаем внешние нормали, положительное направление касательной оставляет область слева, за исключением Γ^E, где направляем l в противоположную сторону для соответствия направлению на Γ^N, Γ^S. Иначе функции в (1) имели бы другой знак.

Плотность тока $\mathbf{J}$ и напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ в каждой из подобластей удовлетворяют закону сохранения заряда и закону электромагнитной индукции Фарадея:

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = Q(x, y), \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = G(x, y), \tag{2}$$

где $Q(x, y)$, $G(x, y)$ — заданные функции, обычно $G = 0$.

Компоненты векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{J}$ связаны законом Ома

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Компоненты тензора проводимости σ — заданные функции координат. Из-за эффекта Холла тензор σ несимметричен.

Граничное условие на внешней границе Γ имеет вид

$$\left(J_n - \frac{\partial}{\partial l}(A(l)E_l) \right)\Big|_\Gamma = 0, \tag{4}$$

где $A(l)$ — заданная функция.

Такое граничное условие соответствует выделению узкой приграничной полосы с высокой проводимостью и при $A = 0$ превращается в условие на идеальном изоляторе.

Соответствующие точки на границах Γ^E, Γ^N, Γ^S трех подобластей Ω^E, Ω^N, Ω^S соединены между собой условием эквипотенциальности. Поэтому из законов сохранения заряда и уравнения индукции получаются следующие условия сопряжения [5]:

$$J_n(l^E) + \frac{dl^N}{dl^E} J_n(l^N) + \frac{dl^S}{dl^E} J_n(l^S) = 0, \tag{5}$$

$$E_l(l^E) - \frac{dl^N}{dl^E} E_l(l^N) = 0, \quad E_l(l^E) - \frac{dl^S}{dl^E} E_l(l^S) = 0. \tag{6}$$

Фигурирующие здесь граничные значения компонент векторов суть граничные значения в подобластях с тем же индексом E, N, S, что и указан у координаты l, причем в точках, соответствие которых на Γ^E, Γ^N, Γ^S задано функциями $l^N(l^E)$, $l^S(l^E)$.

В частном случае, когда подобласти склеены геометрически, можно ввести единую длину дуги $l^N = l^E = l^S$ на границах Γ^E, Γ^N, Γ^S, и, значит, все производные в (5), (6) равны единице. Поэтому условие (5) превращается в равенство нулю суммы плотностей токов из трех подобластей на общую границу, а (6) — в непрерывность касательной компоненты напряженности электрического поля при переходе через эту границу.

Для разрешимости краевой задачи (2)–(6) правые части должны удовлетворять условиям

$$\iint\limits_{\Omega} Q\, dxdy = 0, \quad \iint\limits_{\Omega^N} G\, dxdy = \iint\limits_{\Omega^S} G\, dxdy, \tag{7}$$

которые получаются интегрированием первого из уравнений (2) по Ω и второго — по Ω^N и Ω^S с учетом однородности краевого условия на внешней границе (4) и условий сопряжения на внутренних границах (5), (6). Ниже не будем указывать область интегрирования, если это вся область Ω.

3. Единственность решения. В следующих пунктах будет сформулирована новая задача, решение которой является решением исходной задачи (2)–(6). Из существования решения новой задачи следует существование решения исходной, а единственность необходимо доказать независимо.

Сформулируем необходимые ограничения на распределения проводимости σ внутри области и интегральной проводимости в приграничной полосе, которая выделена граничным условием (4).

Тензор проводимости σ предполагается равномерно в области Ω ограниченным, а его симметричная часть — равномерно положительно определенной. Удобно записать эти свойства в следующем виде: существуют отличные от нуля и бесконечности положительные числа c_3 и c_4 такие, что сразу для всех точек области

$$\lambda \geq c_3, \quad \det(\sigma)/\lambda \leq c_4, \tag{8}$$

где $\det(\sigma)$ — определитель матрицы σ, λ — меньшее из собственных значений симметричной матрицы $(\sigma + \sigma^T)/2$. В практически важном частном случае, когда проводник гиротропен, ограниченные условием (8) функции являются педерсеновской и каулинговской проводимостями. Несложно показать выполнение соотношений

$$\sigma_{xx} \geq \lambda, \quad \sigma_{yy} \geq \lambda,$$

а также равномерную ограниченность всех коэффициентов матрицы σ при выполнении (8).

Предполагаем, что при выделении приграничной полосы граничным условием (4) выполнены ограничения

$$0 < c_5 \le A(l) \le c_6 < \infty. \tag{9}$$

Лемма 1. Пусть в трехлистной области Ω, подобласти которой Ω^E, Ω^N, Ω^S ограничены кусочно-гладкими кривыми, коэффициенты σ и $A(l)$ удовлетворяют условиям (8), (9). Тогда существует не более одного гладкого решения задачи (2)–(6).

Предположим противное. Пусть существуют два решения. Тогда являющиеся их разностью функции $\mathbf{E}$, $\mathbf{J}$ удовлетворяют уравнениям (2)–(6) с нулевыми правыми частями $Q = 0$, $G = 0$.

В доказательстве будем использовать функцию V:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V. \tag{10}$$

Такие функции в каждой подобласти по отдельности существуют, так как в силу второго из уравнений (2) векторное поле $\mathbf{E}$ безвихревое.

Поскольку добавление константы к функции V не изменяет $\operatorname{grad} V$, сделаем $V = 0$ в точке $l^E = 0$. Аналогично добавим константы к V в подобластях Ω^N, Ω^S, чтобы и на Γ^N, Γ^S в точках $l^N = 0$, $l^S = 0$ было $V = 0$.

Функция V на Γ^E в силу (10) есть интеграл

$$V(l^E) = -\int\limits_0^{l^E} E_l(\tilde{l})\, d\tilde{l}.$$

Из (6) следует, что

$$-\int\limits_0^{l^N} E_l(\tilde{l}^N)\, d\tilde{l}^N = -\int\limits_0^{l^E} E_l(\tilde{l}^E)\, d\tilde{l}^E$$

и, значит,

$$V(l^N) = V(l^E). \tag{11}$$

Аналогично

$$V(l^S) = V(l^E), \tag{12}$$

т. е. функция V непрерывна во всей области Ω.

В силу предположения об отличии $\mathbf{E}$ от тождественного нуля можно найти такие число $\varepsilon > 0$ и точку, что $|\mathbf{E}| = 2\varepsilon$. Ввиду гладкости $\mathbf{E}$ можно выбрать такую окрестность этой точки, что в ней $|\mathbf{E}| > \varepsilon$. Обозначим площадь этой окрестности через x_0^2.

Рассмотрим интеграл по всей области Ω:

$$w = \iint \mathbf{J}^T \mathbf{E}\, dxdy.$$

В обозначениях (10) он записывается следующим образом:

$$w = \iint (\operatorname{grad} V)^T \sigma \operatorname{grad} V\, dxdy. \tag{13}$$

Матрица σ может быть заменена в этом интеграле ее симметричной частью, поскольку вычисляется квадратичная форма:

$$w = \iint (\operatorname{grad} V)^T \frac{\sigma + \sigma^T}{2} \operatorname{grad} V\, dxdy.$$

В силу положительной определенности $(\sigma + \sigma^T)/2$ (8) подынтегральное выражение неотрицательно. Поэтому интеграл по всей области Ω не меньше, чем интеграл по выделенной окрестности, а значит,

$$w \geq x_0^2 \varepsilon^2 c_1 > 0. \tag{14}$$

Теперь обратимся к записи рассматриваемого интеграла в форме (13). Тождественно преобразуем подынтегральную функцию:

$$w = \iint (-V \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} V) + \operatorname{div}(V \sigma \operatorname{grad} V))\, dxdy.$$

Первый член равен $V \operatorname{div}(\sigma \mathbf{E}) = V \operatorname{div} \mathbf{J} = 0$, так как выполнено первое из уравнений (2) с нулевой правой частью. Оставшийся интеграл преобразуем, используя теорему Гаусса — Остроградского в каждой из подобластей:

$$w = \oint_{\Gamma} (\sigma \operatorname{grad} V)_n\, dl + \oint_{\Gamma^E} V(\sigma \operatorname{grad} V)_n\, dl^E + \oint_{\Gamma^N} V(\operatorname{grad} V)_n\, dl^N + \oint_{\Gamma^S} V(\sigma \operatorname{grad} V)_n\, dl^S.$$

Знак при втором интеграле остался положительным, несмотря на то, что dl^E имеет обратный знак по сравнению с обычным, поскольку и направление обхода Γ^E изменилось. Вернувшись к обозначениям (10), (3), получаем

$$w = -\oint_{\Gamma} V J_n\, dl - \oint_{\Gamma^E} V J_n\, dl^E - \oint_{\Gamma^N} V J_n\, dl^N - \oint_{\Gamma^S} V J_n\, dl^S.$$

В силу (11), (12) подынтегральные функции V в трех последних интегралах равны и, значит, их сумма равна

$$\oint_{\Gamma^E} V \left\{ J_n(l^E) + \frac{dl^N}{dl^E} J_n(l^N) + \frac{dl^S}{dl^E} J_n(l^S) \right\} dl^E.$$

При этом одновременно изменены знаки dl^N, dl^S и направления обхода кривых Γ^N, Γ^S. Сумма в фигурных скобках равна нулю в силу (5). Имеем

$$w = -\oint_{\Gamma} V J_n\, dl. \tag{15}$$

В силу граничного условия (4) этот интеграл можно преобразовать:

$$w = -\oint_{\Gamma} V \frac{\partial}{\partial l}\big(A(l) E_l\big)\, dl.$$

Тождественно преобразуем подынтегральное выражение:

$$w = \oint_{\Gamma} \left(-\frac{\partial}{\partial l}(V A(l) E_l) + \frac{\partial V}{\partial l} A(l) E_l \right) dl.$$

Интеграл от первого члена равен нулю, так как интегрирование происходит по замкнутому контуру. В оставшемся интеграле избавимся от функции V, используя обозначения (10):

$$w = -\oint_{\Gamma} A(l) E_l^2\, dl.$$

Из строгой положительности $A(l)$ (9) получаем

$$w \leq -c_5 \oint_{\Gamma} E_l^2\, dl \leq 0,$$

что противоречит (14), а значит, предположение об отличии $\mathbf{E}$ от тождественного нуля неверно. Тем самым лемма 1 доказана.

4. Симметризация краевой задачи. Если, как это обычно делается при $G \equiv 0$, перейти от уравнений (2), (3) к уравнению для электрического потенциала V вида (10)

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_{xx}\frac{\partial V}{\partial x} + \sigma_{xy}\frac{\partial V}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma_{yx}\frac{\partial V}{\partial x} + \sigma_{yy}\frac{\partial V}{\partial y}\right) = Q$$

или к уравнению для токовой функции при $Q \equiv 0$, то из-за $\sigma_{xy} \neq \sigma_{yx}$ получаются краевые задачи с несамосопряженными операторами.

Самосопряженные операторы получаются, если в соответствии с [3] ввести пару потенциалов F, P таких, что

$$\mathbf{E} = -S\sigma^T \operatorname{grad} F + \operatorname{Srot} P, \tag{16}$$

где матрица S определяется через симметричную часть σ:

$$2S^{-1} = \sigma + \sigma^T, \tag{17}$$

вектор $\operatorname{rot}P = (\partial P/\partial y, -\partial P/\partial x)$ содержит только x- и y-компоненты ротора векторной функции, которая имеет только z-компоненту P.

Опуская эвристические соображения, аналогичные [3], рассмотрим некоторый квадратичный функционал и докажем, что его минимизация соответствует решению исходной задачи (2)–(6). В п. 8 будет показано, почему этот функционал называется энергетическим. Сама формулировка задачи с самосопряженным оператором получится как условие минимальности функционала энергии. Вид уравнений и граничных условий для новых функций F, P соответствует подстановке формулы (16) для $\mathbf{E}$ в исходные (2)–(6) с добавлением краевых условий собственно для F, P (19)–(22), которые являются в определенном смысле сопряженными к (4)–(6) и называются главными. В частности, уравнения внутри области (2), (3) примут вид

$$\operatorname{div}\bigl(-\sigma S\sigma^T \operatorname{grad} F + \sigma \operatorname{Srot} P\bigr) = Q, \quad \operatorname{rot}_z\bigl(-S\sigma^T \operatorname{grad} F + \operatorname{Srot} P\bigr) = G. \tag{18}$$

5. Энергетическое пространство. Рассматриваются пары гладких функций F, P, удовлетворяющих следующим условиям, которые в определенном смысле являются сопряженными к (4)–(6) и называются главными. На внешней границе Γ

$$F(l) - \int\limits_0^l \frac{P(\tilde{l})}{A(\tilde{l})} d\tilde{l} = 0, \quad \oint\limits_\Gamma F(l)\, dl = 0, \quad \oint\limits_\Gamma \frac{P(l)}{A(l)}\, dl = 0. \tag{19}$$

На внутренних границах требуется непрерывность функции F:

$$F(l^E) = F(l^N) = F(l^S), \tag{20}$$

и для функции P ставится условие, аналогичное сложению токовых функций:

$$P(l^E) = P(l^N) + P(l^S). \tag{21}$$

Еще одно условие соответствует равенству нулю среднего значения $P(l^N)$, но не на самой кривой Γ^N, а после отображения на Γ^E. Оно устраняет произвольную аддитивную константу, с точностью до которой, по сути, определена функция P в подобласти Ω^N:

$$\oint_{\Gamma^N} P(l^N)\frac{dl^E}{dl^N}\, dl^N = 0. \tag{22}$$

Определяется энергетическое скалярное произведение по формуле

$$\left[\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F \\ P \end{pmatrix}\right] = \iint \begin{pmatrix} \mathrm{grad}\, u \\ \mathrm{rot} v \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \sigma s \sigma^T & -\sigma s \\ -s\sigma^T & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{grad}\, F \\ \mathrm{rot} P \end{pmatrix} dxdy. \tag{23}$$

Эта билинейная форма симметрична. Докажем ее положительную определенность на гладких функциях. Сначала рассмотрим вспомогательный интеграл

$$\iint (\mathrm{grad}\, F)^T \mathrm{rot} P\, dxdy. \tag{24}$$

Тождественно преобразуем подынтегральное выражение:

$$(\mathrm{grad}\, F)^T \mathrm{rot} P = -\mathrm{rot}_z (P \;\, \mathrm{grad}\, F) + P\mathrm{rot}_z(\mathrm{grad}\, F).$$

Второе слагаемое тождественно равно нулю. Интегралы от первого слагаемого можно преобразовать по формуле Гаусса — Остроградского в интегралы по границам. Получаем

$$-\oint\limits_{\Gamma^N} P\frac{\partial F}{\partial l^N}\, dl^N - \oint\limits_{\Gamma^S} P\frac{\partial F}{\partial l^S}\, dl^S + \oint\limits_{\Gamma^E} P\frac{\partial F}{\partial l^E}\, dl^E - \oint\limits_{\Gamma} P\frac{\partial F}{\partial l}\, dl. \tag{25}$$

Объединим три интеграла по внутренним границам, используя условия (20):

$$\oint \frac{\partial F}{\partial l^E}(P(l^E) - P(l^N) - P(l^S))\, dl^E.$$

Подынтегральное выражение равно нулю в силу (21). В (25) остается только интеграл по внешней границе. Преобразуем его с учетом граничных условий (19), которые для гладких функций эквивалентны равенству

$$\left.\left(P - A(l)\frac{\partial F}{\partial l}\right)\right|_{\Gamma} = 0. \tag{26}$$

Получаем

$$-\oint\limits_{\Gamma} \frac{P^2}{A(l)}\, dl. \tag{27}$$

В силу положительности $A(l)$ (9) этот интеграл неположителен. Поэтому неположителен и весь интеграл (24). Прибавим интеграл (24) с коэффициентом два к квадратичной форме (23). Матрица подынтегральной квадратичной формы примет вид

$$\begin{pmatrix} \sigma S \sigma^T & I - \sigma S \\ I - S\sigma^T & S \end{pmatrix}, \tag{28}$$

где I — единичная $2 * 2$ матрица.

Несложно доказать [3], что эта симметричная матрица положительно определена и ее четыре собственных числа заключены в интервале

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c_3}{c_4}}, \quad 2\sqrt{\frac{c_4}{c_3}}, \tag{29}$$

если матрица S задана по формуле (17) и матрица σ удовлетворяет условиям (8).

Поэтому значение таким образом измененной квадратичной формы оценивается снизу и сверху интегралом

$$\iint \left\{(\mathrm{grad}\, F)^2 + (\mathrm{rot} P)^2\right\}\, dxdy$$

с коэффициентами (29) соответственно.

В силу неположительности значения вспомогательного интеграла, равного (27), для исходной квадратичной формы получаем

$$\left[\begin{pmatrix} F \\ P \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F \\ P \end{pmatrix}\right] \geq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c_3}{c_4}} \iint \{(\operatorname{grad} F)^2 + (\operatorname{rot} P)^2\}\, dxdy \tag{30}$$

$$\left[\begin{pmatrix} F \\ P \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F \\ P \end{pmatrix}\right] \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c_4}{c_3}} \iint \bigl\{(\operatorname{grad} F)^2 + (\operatorname{rot} P)^2\bigr\}\, dxdy + 2\oint\limits_{\Gamma} \frac{P^2}{A(l)}\, dl. \tag{31}$$

Отметим, что в рассматриваемом двумерном случае

$$(\operatorname{rot} P)^2 = (\operatorname{grad} P)^2. \tag{32}$$

Для продолжения оценки снизу рассмотрим функции F, P по отдельности. Будем использовать следующее из теоремы об эквивалентных нормировках пространства $W_2^{(1)}(\Omega)$ [7, 8] неравенство для подобласти Ω^E:

$$\Biggl(\iint\limits_{\Omega^E} F^2\, dxdy\Biggr)^{1/2} \leq \sqrt{c_7}\Biggl\{\Biggl|\oint\limits_{\Gamma} a(l) F\, dl\Biggr| + \Biggl(\iint\limits_{\Omega^E} (\operatorname{grad} F)^2\, dxdy\Biggr)^{1/2}\Biggr\}, \tag{33}$$

где функция $a(l)$ должна быть такой, чтобы линейный функционал был ограниченным и его значение не обращалось в нуль при $F(x,y) \equiv 1$. Зададим $a(l) = 1$. В силу второго условия (19) такой интеграл по Γ равен нулю и из (33) получаем

$$\iint\limits_{\Omega^E} F^2\, dxdy \leq c_7 \iint\limits_{\Omega^E} (\operatorname{grad} F)^2\, dxdy. \tag{34}$$

Как следствие теоремы вложения $W_2^{(1)}(\Omega^E)$ в $L_2(\Gamma^E)$ и (34) имеем

$$\oint\limits_{\Gamma^E} F^2\, dl^E \leq c_8 \iint\limits_{\Omega^E} (\operatorname{grad} F)^2\, dxdy. \tag{35}$$

Рассмотрим интеграл F по Γ^E. Оценим его с помощью неравенства Коши — Буняковского и (35):

$$\Biggl|\oint\limits_{\Gamma^E} F\, dl^E\Biggr| \leq \Biggl(\oint\limits_{\Gamma^E} F^2\, dl^E\Biggr)^{1/2} \Biggl(\oint\limits_{\Gamma^E} dl^E\Biggr)^{1/2}.$$

Поскольку длина кривой Γ^E конечна, из этого неравенства и (35) получаем

$$\Biggl|\oint\limits_{\Gamma^E} F\, dl^E\Biggr| \leq \Biggl(c_8 |\Gamma^E| \iint\limits_{\Omega^E} (\operatorname{grad} F)^2\, dxdy\Biggr)^{1/2}. \tag{36}$$

Теперь неравенство (33) можно применить для F в подобластях Ω^N и Ω^S, так как функция F сохраняет значение при переходе с Γ^E на Γ^N или Γ^S в силу (20). Оцененный в (36) интеграл можно записать как

$$\oint\limits_{\Gamma^S} F\bigl(l^E(l^S)\bigr) \frac{dl^E}{dl^S}\, dl^S. \tag{37}$$

Он имеет вид линейного функционала в неравенстве (33) с функцией

$$a(l) = \frac{dl^E}{dl^S},$$

которая строго положительна и ограничена в силу (1). Поэтому при $F \equiv 1$ интеграл не обращается в нуль и, значит, можно использовать неравенство вида (33) в подобласти Ω^S, где оно справедливо с некоторой другой константой c_9.

Поскольку для интеграла (37) получена оценка (36), находим

$$\Bigl(\iint\limits_{\Omega^S} F^2\,dxdy\Bigr)^{1/2} \le c_9 c_8 |\Gamma^E| \biggl(\Bigl(\iint\limits_{\Omega^E} (\operatorname{grad} F)^2\,dxdy\Bigr)^{1/2} + \Bigl(\iint\limits_{\Omega^S} (\operatorname{grad} F)^2\,dxdy\Bigr)^{1/2}\biggr).$$

Возведем это неравенство в квадрат, объединим интегралы в один и увеличим его, добавив интегрирование неотрицательной функции по Ω^N:

$$\iint\limits_{\Omega^S} F^2\,dxdy \le c_{10} \iint (\operatorname{grad} F)^2\,dxdy, \tag{38}$$

где $c_{10} = 2c_9^2 \max(c_8|\Gamma^E|, 1)$. Поэтому получаем для F в Ω^S неравенство, аналогичное (34), но с интегрированием по всем подобластям в правой части.

Такое же неравенство устанавливается для Ω^N с константой c_{11}. В сумме приходим к неравенству для всей области Ω:

$$\iint F^2\,dxdy \le (c_7 + c_{10} + c_{11}) \iint (\operatorname{grad} F)^2\,dxdy. \tag{39}$$

Для функции P применим неравенство вида (33) с функцией $a(l) = 1/A(l)$. Необходимые ограничения для такой функции $a(l)$ соблюдены в силу (9). Линейный функционал в неравенстве вида (33) на рассматриваемом множестве функций P обращается в нуль ввиду последнего равенства (19). Поэтому получаем для P неравенство, аналогичное (34), и отличающуюся от (36) только значением константы оценку

$$\Bigl|\oint\limits_{\Gamma^E} P(l^E)\,dl^E\Bigr| \le c_{12} \Bigl(\iint\limits_{\Omega^E} (\operatorname{grad} P)^2\,dxdy\Bigr)^{1/2}. \tag{40}$$

В Ω^N используем условие (22), а для Ω^S выразим интеграл по Γ^S с учетом (21):

$$\oint\limits_{\Gamma^S} P(l^S) \frac{dl^E}{dl^S}\,dl^S = \oint\limits_{\Gamma^S} P(l^E(l^S)) \frac{dl^E}{dl^S}\,dl^S - \oint\limits_{\Gamma^S} P(l^N(l^E(l^S))) \frac{dl^E}{dl^S}\,dl^S. \tag{41}$$

Преобразуем интегралы в правой части:

$$\oint\limits_{\Gamma^E} P(l^E)\,dl^E - \oint\limits_{\Gamma^N} P(l^N) \frac{dl^E}{dl^N}\,dl^N.$$

Последний интеграл равен нулю в силу (22).

С учетом (40) получаем оценку левой части (41), которая позволяет применить неравенство (33) и получить аналогичное (38) неравенство для P в Ω^S. Объединив неравенства, полученные в трех подобластях, приходим к аналогичному (39) неравенству для P во всей области Ω. Обозначим через c_{13} меньшую из констант в неравенствах вида (39) для F, P. С учетом (32) можем продолжить оценку (30):

$$\Bigl[\begin{pmatrix} F \\ P \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F \\ P \end{pmatrix}\Bigr] \ge \frac{1}{2c_{13}} \sqrt{\frac{c_3}{c_4}} \iint (F^2 + P^2)\,dxdy. \tag{42}$$

Тем самым доказана положительная определенность квадратичной формы, соответствующей билинейной форме (23). С учетом симметрии последней ее можно использовать как скалярное произведение на множестве пар гладких функций F, P, удовлетворяющих условиям (19)–(22).

Теперь продолжим оценку сверху (31) для значения квадратичной формы, соответствующей билинейной форме (23).

Абсолютная величина последнего интеграла в (31) в силу ограниченности $A(l)$ (9) и теоремы о вложении $W_2^{(1)}(\Omega^E)$ в $L_2(\Gamma)$ оценивается сверху значением

$$\frac{c_{14}}{c_3}\iint\limits_{\Omega^E}(\operatorname{grad}P)^2\,dxdy.$$

С учетом (32) его можно включить в первый член в правой части (31), изменив значение константы:

$$\left[\begin{pmatrix}F\\P\end{pmatrix},\begin{pmatrix}F\\P\end{pmatrix}\right]\le\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c_4}{c_3}}+2\frac{c_{14}}{c_3}\right)\iint\left\{(\operatorname{grad}F)^2+(\operatorname{rot}P)^2\right\}dxdy. \tag{43}$$

Неравенства (30), (42), (43) означают эквивалентность введенной энергетической нормы сумме норм функций F, P как элементов $W_2^{(1)}(\Omega)$.

6. Минимум функционала энергии. Функционалом энергии называем

$$W(F,P)=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}F\\P\end{pmatrix},\begin{pmatrix}F\\P\end{pmatrix}\right]-\iint(FQ+PG)\,dxdy. \tag{44}$$

Предполагаем, что заданные функции Q, G имеют конечные нормы как элементы $L^2(\Omega)$. Поэтому линейная часть функционала энергии является ограниченным линейным функционалом и по теореме Ф. Риса может быть представлена в виде скалярного произведения на некоторый элемент энергетического пространства:

$$\iint(FQ+PG)\,dxdy=\left[\begin{pmatrix}F_0\\P_0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}F\\P\end{pmatrix}\right].$$

Поскольку квадратичная часть $W(F,P)$ положительно определена, минимум существует и единствен. Минимум достигается при $(F,P)=(F_0,P_0)$.

7. Обобщенное решение. Минимальность $W(F,P)$ означает, что

$$\frac{d}{dt}W(F+tu,P+tv)\Big|_{t=0}=0$$

при любых функциях u, v из энергетического пространства, что с учетом (44) означает

$$\left[\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},\begin{pmatrix}F\\P\end{pmatrix}\right]-\iint(uQ+vG)\,dxdy=0.$$

Рассмотрим это условие минимальности $W(F,P)$ в дополнительном предположении гладкости функций F, P. Тогда в билинейной форме, определенной формулой (23), можно провести интегрирование по частям в каждой из трех подобластей. Сразу используем как сокращенное обозначение $\mathbf{E}$ (16) и $\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}$ (3):

$$\iint\{u(\operatorname{div}\mathbf{J}-Q)+v(\operatorname{rot}_z\mathbf{E}-G)\}\,dxdy+\oint\limits_{\Gamma}(-uJ_n-vE_l)\,dl$$
$$+\oint\limits_{\Gamma^E}(-uJ_n+vE_l)\,dl^E+\oint\limits_{\Gamma^N}(-uJ_n-vE_l)\,dl^N+\oint\limits_{\Gamma^S}(-uJ_n-vE_l)\,dl^S=0. \tag{45}$$

Отличие знака vE_l в интеграле по Γ^E связано с выбором положительного направления касательной на Γ^E.

В силу произвола u, v внутри подобластей из тождества (45) обычным образом получаются равенства

$$\operatorname{div}\mathbf{J} = Q, \quad \operatorname{rot}_z\mathbf{E} = G. \tag{46}$$

Поэтому тождество (45) сводится к тождественному равенству нулю суммы интегралов по границе. Поскольку u, v на внешней границе Γ не связаны с их значениями на внутренних границах, имеем отдельное тождество

$$\oint_\Gamma (uJ_n + vE_l)\, dl = 0, \tag{47}$$

которое с учетом условий (19) или эквивалентного им для гладких функций условия (26) можно записать как

$$\oint_\Gamma \left(uJ_n + A(l)\frac{\partial u}{\partial l}E_l \right) dl = 0.$$

Второй член можно проинтегрировать по частям и получить

$$\oint_\Gamma u \left(J_n - \frac{\partial}{\partial l}(A(l)E_l) \right) dl = 0. \tag{48}$$

Оставшиеся в тождестве (45) три интеграла по внутренним границам сгруппируем, выразив три функции $u(l^N)$, $u(l^S)$, $v(l^E)$ через функции $u(l^E)$, $v(l^N)$, $v(l^S)$ с помощью соотношений (20), (21), которым u, v удовлетворяют, так как принадлежат энергетическому пространству. Последние три функции являются произвольными, только среднее значение $v(l^N)$ фиксировано условием (22). Таким образом, из (45) получаем еще три независимых тождества:

$$\oint_{\Gamma^E} u(l^E) \left\{ J_n(l^E) + \frac{dl^N}{dl^E}J_n(l^N) + \frac{dl^S}{dl^E}J_n(l^S) \right\} dl^E = 0, \tag{49}$$

$$\oint_{\Gamma^N} v(l^N) \left\{ -E_l(l^N) + \frac{dl^E}{dl^N}E_l(l^E) \right\} dl^N = 0, \tag{50}$$

$$\oint_{\Gamma^S} v(l^S) \left\{ -E_l(l^S) + \frac{dl^E}{dl^S}E_l(l^E) \right\} dl^S = 0. \tag{51}$$

Поскольку функция $u(l^E)$ произвольна, из тождества (49) следует выполнение условия сопряжения (5).

Из (51) в силу произвола $v(l^S)$ получаем второе из условий (6).

К первому условию (6) вернемся позже, а теперь обратимся к тождеству (48).

Функция $u(l)$ на Γ имеет нулевое среднее значение ввиду второго условия (19). Обозначим через $\tilde{u}(l)$ граничное значение функции $\tilde{u}(x,y)$, которая в отличие от $u(x,y)$ не обязана удовлетворять второму условию (19). В соответствии с эквивалентным (19) условием (26) построим функцию $v(l)$ на Γ:

$$v(l) = A(l)\frac{\partial \tilde{u}(l)}{\partial l},$$

и продолжим ее гладко внутрь Ω^E так, чтобы $v(x,y)$ обращалась в нуль на Γ^E, после чего можно положить $v \equiv 0$ в Ω^N, Ω^S. Для любой такой пары $\tilde{u}$, v можно построить пару $u = \tilde{u} - u_0$, v, которая будет удовлетворять всем условиям (19)–

(22), если константу u_0 вычислить как

$$u_0 = \frac{1}{|\Gamma|} \oint\limits_{\Gamma} \tilde{u}\, dl.$$

Подставим $u(l) = \tilde{u}(l) - u_0$ в рассматриваемое тождество (48):

$$\oint\limits_{\Gamma} \tilde{u} \left(J_n - \frac{\partial}{\partial l}(A(l)E_l) \right) dl - u_0 \oint\limits_{\Gamma} J_n\, dl + u_0 \oint\limits_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial l}(A(l)E_l)\, dl = 0. \qquad (52)$$

Последний интеграл тождественно равен нулю, поскольку кривая Γ замкнутая. Проинтегрируем уже доказанное первое равенство (46) отдельно по подобластям Ω^E, Ω^N, Ω^S, сразу применив формулу Гаусса — Остроградского для левых частей:

$$\oint\limits_{\Gamma} J_n\, dl + \oint\limits_{\Gamma^E} J_n\, dl^E = \iint\limits_{\Omega^E} Q\, dxdy,$$

$$\oint\limits_{\Gamma^N} J_n(l^N)\, dl^N = \iint\limits_{\Omega^N} Q\, dxdy, \quad \oint\limits_{\Gamma^S} J_n(l^S)\, dl^S = \iint\limits_{\Omega^S} Q\, dxdy.$$

Уже доказано выполнение (5). Поэтому, просуммировав эти равенства, получаем

$$\oint\limits_{\Gamma} J_n\, dl = \iint Q\, dxdy.$$

Правая часть равна нулю в силу (7). Поэтому равен нулю множитель при u_0 в (52). В оставшемся в (52) тождестве функция $\tilde{u}(l)$ произвольна, из чего следует равенство нулю множителя при ней, т. е. выполнение граничного условия (4).

Теперь рассмотрим тождество (50). Обозначим через $\tilde{v}(l^N)$ граничное значение произвольной функции $\tilde{v}(x,y)$, которая в отличие от $v(x,y)$ не обязана удовлетворять условию (22). Здесь нас интересуют только функции $\tilde{v}$, равные нулю в подобласти Ω^S и на внешней границе Γ и тождественно равные нулю функции u. При этом условие (21) становится эквивалентным $\tilde{v}(l^E) = \tilde{v}(l^N)$. Такие пары функций удовлетворяют главным краевым условиям (19)–(21). Для всякой такой функции $\tilde{v}(x,y)$ можно построить функцию $v(x,y)$, вычтя из $\tilde{v}(x,y)$ в подобласти Ω^N константу v_0:

$$v_0 = \frac{1}{|\Gamma^E|} \oint\limits_{\Gamma^N} \tilde{v}(l^N) \frac{dl^E}{dl^N}\, dl^N,$$

а в подобласти Ω^N вычтя из $\tilde{v}(x,y)$ какую-либо функцию, получающуюся при интерполяции внутрь Ω^E значений v_0 на Γ^E и нуля на Γ. Такая пара u, v уже удовлетворяет всем главным краевым условиям (19)–(22). Подставив эти выражения в (50), получаем

$$\oint\limits_{\Gamma^N} \tilde{v}(l^N) \left\{ -E_l(l^N) + \frac{dl^E}{dl^N} E_l(l^E) \right\} dl^N - v_0 \oint\limits_{\Gamma^N} E_l(l^N)\, dl^N + v_0 \oint\limits_{\Gamma^E} E_l(l^E)\, dl^E = 0. \qquad (53)$$

Проинтегрируем уже доказанное второе равенство (46) отдельно по подобластям Ω^N, Ω^S, сразу применив формулу Гаусса — Остроградского для левой части:

$$\oint\limits_{\Gamma^N} E_l(l^N)\, dl^N = \iint\limits_{\Omega^N} G\, dxdy, \quad \oint\limits_{\Gamma^S} E_l(l^S)\, dl^S = \iint\limits_{\Omega^S} G\, dxdy.$$

Как разность этих равенств, используя уже доказанное второе из равенств (6), находим

$$\oint\limits_{\Gamma^N} E_l(l^N)\, dl^N - \oint\limits_{\Gamma^E} E_l(l^E)\, dl^E = \iint\limits_{\Omega^N} G\, dxdy - \iint\limits_{\Omega^S} G\, dxdy.$$

Правая часть равна нулю в силу необходимого для разрешимости задачи ограничения на правые части (7). Получаем

$$\oint\limits_{\Gamma^E} E_l(l^E)\, dl^E - \oint\limits_{\Gamma^N} E_l(l^N)\, dl^N = 0.$$

Поэтому множитель при v_0 в (53) равен нулю, и из произвола $\tilde{v}(l^N)$ имеем

$$E_l(l^E) = \frac{dl^N}{dl^E} E_l(l^N),$$

т. е. доказано первое из равенств (6). Этим завершается доказательство выполнения всех краевых условий (4)–(6) вследствие минимизации функционала энергии. Эти краевые условия называются естественными в отличие от главных краевых условий (19)–(22).

Таким образом, функции F, P, доставляющие функционалу энергии минимальное значение, позволяют построить по формулам (16), (3) векторные функции $\mathbf{E}$ и $\mathbf{J}$, которые являются решением исходной краевой задачи (2)–(6), если дополнительно предположить гладкость F, P. В силу леммы 1 такое решение единственно. Обычным образом [3] доказывается и обратное утверждение: решение краевой задачи доставляет функционалу энергии минимальное значение.

В общем случае пара функций F, P, доставляющая функционалу энергии минимальное значение, имеет конечную энергетическую норму, эквивалентную норме $W_2^{(1)}(\Omega)$. Такая пара F, P называется обобщенным решением задачи (2)–(6), (19)–(22), где $\mathbf{E}$, $\mathbf{J}$ понимаются как сокращенные обозначения (16), (3).

Непосредственно для F, P уравнения (2), (3) с учетом (16) имеют вид (18). Фигурирующий там оператор можно записать как произведение операторов первого порядка:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{div} \sigma \\ \operatorname{rot}_z \end{pmatrix} S(\sigma^T \operatorname{grad}, \operatorname{rot}) \begin{pmatrix} F \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q \\ G \end{pmatrix}.$$

Этот оператор имеет вид $L^T S L$, поскольку операторы div и rot_z являются сопряженными к grad и rot, и матрица S симметрична. Операторы такого вида называются сопряженно-факторизованными. Это свойство позволяет существенно упростить переход к сеточным моделям [9].

Существование и единственность обобщенного решения следует из доказанных в п. 6 существования и единственности элемента энергетического пространства, минимизирующего значение функционала энергии. Построенные функции $\mathbf{J}$, $\mathbf{E}$ имеют конечную норму $L_2(\Omega)$ и являются обобщенным решением задачи (2)–(6).

8. Термодинамика. Квадратичная форма (23) с учетом (16), (3) при S вида (17) может быть записана как

$$\iint \mathbf{E}^T \mathbf{J}\, dxdy.$$

Подынтегральное выражение есть плотность джоулевой диссипации, т. е. интеграл равен тепловой энергии, выделяющейся в рассматриваемом проводнике за единицу времени вследствие прохождения электрического тока. Поэтому такое скалярное произведение называется энергетическим. Если вместо (17) задать

$$S^{-1} = (\sigma + \sigma^T)/(2T), \tag{54}$$

то энергетическая квадратичная форма будет равна

$$\iint \frac{1}{T}\mathbf{E}^T\mathbf{J}\,dxdy,$$

т. е. скорости производства энтропии при заданном распределении абсолютной температуры $T(x, y)$. Конкретный вид матрицы S был использован только для оценки интервала (29), в котором лежат собственные числа матрицы (28). В работе [2] за счет специального выбора коэффициента, с которым вспомогательный интеграл (24) добавляется к квадратичной форме (23), получена аналогичная оценка при произвольной симметричной и равномерно в Ω положительно определенной S. Положительность абсолютной температуры и ограничения для σ (8) обеспечивают такое свойство S при ее задании по формуле (54).

Таким образом, квадрат энергетической нормы с точки зрения неравновесной термодинамики имеет смысл скорости производства энтропии.

9. Другие краевые задачи. На внешней границе могут быть поставлены более простые по сравнению с (4) условия:

$$J_n|_\Gamma = 0, \tag{55}$$

если за границей находится идеальный изолятор, или

$$E_l|_\Gamma = 0, \tag{56}$$

если за границей — идеальный проводник. Эти краевые задачи естественно называть первой и второй, как и в однолистной области [3]. Перечислим изменения, которые следует внести в формулировки и доказательства, проведенные выше при граничном условии (4).

Условия сопряжения на внутренней границе (5), (6) при этом не изменяются. Необходимые для разрешимости задачи ограничения на правые части (7) сохраняются для первой задачи, а для второй заменяются на

$$\iint\limits_{\Omega^N} G\,dxdy + \iint\limits_{\Omega^E} G\,dxdy = 0, \quad \iint\limits_{\Omega^N} G\,dxdy = \iint\limits_{\Omega^S} G\,dxdy. \tag{57}$$

Доказательства единственности решения задач немного упрощаются, поскольку интеграл (15) при любом из условий (55), (56) имеет нулевое подынтегральное выражение.

Главные краевые условия на внутренней границе (20)–(22) сохраняются. На внешней границе условие (19) в первой краевой задаче заменяется на

$$P|_\Gamma = 0, \quad \oint\limits_\Gamma F\,dl = 0, \tag{58}$$

а во второй — на

$$F|_\Gamma = 0, \quad \oint\limits_\Gamma P\,dl = 0. \tag{59}$$

Отметим, что равенство нулю средних значений в (58), (59) служит для устранения произвольных аддитивных констант, с точностью до которых по сути определены функции F и P. Как это обычно делается в задаче Неймана, можно было бы фиксировать среднее по области значение функции F или

P, но при этом потребовалось бы неравенство Пуанкаре в неоднолистной области. Использование неравенства вида (33) представляется более простым, тем более, что фигурирующий в нем линейный функционал с функцией $a(l) = 1$ имеет нулевое значение для обеих функций F, P, удовлетворяющих (58) или (59). Заметим, что для P в первой задаче и для F во второй можно было бы воспользоваться неравенством Фридрихса вместо (33).

Поскольку последний интеграл в (25) обращается в нуль при любом из условий (58), (59), вспомогательный интеграл (24) равен нулю. Поэтому в верхней оценке квадратичной формы (31) интеграл по границе исчезает и его не нужно оценивать, чтобы получить (43), где будет $c_{14} = 0$.

При исследовании обобщенного решения изменяется только анализ тождества (47). Выполнение (55) или (56) получается из него за счет произвола F (58) или P (59) на этой границе. Фиксация средних по Γ значений этих функций обходится тем же способом добавления произвольной константы, коэффициент при которой, как и в (52), оказывается нулевым за счет ограничений (7) или (57) на правые части.

Таким образом, для первой (55) и второй (56) краевых задач устанавливается эквивалентность их решения минимизации функционала энергии (44) в соответствующем энергетическом пространстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Гостехиздат, 1957.
2. *Денисенко В. В.* Симметричная форма эллиптических уравнений, описывающих процессы переноса в гиротропных средах. М.: ВИНИТИ, 1980. 45 с. (№ 4696–80).
3. *Денисенко В. В.* Энергетические методы для эллиптических уравнений с несимметричными коэффициентами. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1995.
4. *Денисенко В. В.* Энергетический метод для трехмерных эллиптических уравнений с несимметричными тензорными коэффициентами // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 6. С. 1267–1281.
5. *Денисенко В. В., Еркаев Н. В., Китаев А. В., Матвеенков И. Т.* Математическое моделирование магнитосферных процессов. Новосибирск: Наука, 1992.
6. *Денисенко В. В.* Краевая задача для двумерного эллиптического уравнения с несимметричными тензорными коэффициентами // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 3. С. 554–565.
7. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977.
8. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.
9. *Коновалов А. Н.* Сопряженно-факторизованные модели в задачах математической физики. Новосибирск, 1997. 60 с. (Препринт ВЦ СО РАН; № 1095).

Статья поступила 14 мая 2002 г.

Денисенко Валерий Васильевич
Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Академгородок, Красноярск 660036
denisen@icm.krasn.ru