Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2002. Том 43, № 6

УДК 517.15

ВЫЧИСЛИМО ЖЕСТКИЕ МОДЕЛИ С ПЕРЕЧИСЛИМЫМИ ПОДМОДЕЛЯМИ

А. Н. Бузыкаева

Аннотация: Рассматриваются рекурсивные представления множества рациональных чисел с выделенным всюду плотным подмножеством с всюду плотным дополнением и некоторые булевы алгебры с выделенной подалгеброй. Показано, что отказ от рекурсивности выделенной подмодели дает возможность построить модели без нетривиальных автоморфизмов. Доказательство проведено методом приоритета.

Ключевые слова: вычислимая модель, вычислимый автоморфизм, группа вычислимых автоморфизмов, метод приоритета, булева алгебра, рекурсивно перечислимое множество

В любом рекурсивном плотном порядке типа $\mathscr{Q}$ существует бесконечное число вычислимых автоморфизмов, которые строятся «челночным» методом (см., например, [1, гл. 14, с. 823–977]). Легко понять, что при рассмотрении моделей $\langle \mathscr{Q}; S\rangle$, где S — предикат, выделяющий некоторое рекурсивное всюду плотное подмножество с всюду плотным дополнением, алгоритм построения вычислимых автоморфизмов изменится несущественно: просто необходимо дополнительно следить за тем, чтобы элементы из S отображались в S и соответственно элементы из $\mathscr{Q}\backslash S$ отображались в $\mathscr{Q}\backslash S$.

Рассмотрим вместо плотного порядка $\mathscr{Q}$ булеву алгебру, порожденную полуинтервалами с концами из $\mathscr{Q}$ $\mathbb{B} = \mathfrak{B}_{\mathscr{Q}}$, а вместо S — булеву алгебру $\mathbb{S} = \mathfrak{B}_S$. $\mathbb{S}$ — подалгебра $\mathbb{B}$, все элементы которой имеют концы всех составляющих ее полуинтервалов в S. Аналогично придем к выводу, что группа вычислимых автоморфизмов модели $\langle \mathbb{B}; \mathbb{S}\rangle$ бесконечна.

Однако отказ от рекурсивности S позволяет построить модели с тривиальной группой автоморфизмов. В данной работе мы покажем это.

Основные понятия и результаты по группам вычислимых автоморфизмов представлены в работе [2, гл. 8, с. 311–345]. Кроме того, терминологию, используемую в дальнейшем, можно найти в [3, 4].

Введем основные определения. В наших обозначениях p_i — i-е простое число, т. е. $p_0 = 2, p_1 = 3, \dots$. Построение множества S будем производить по шагам так, чтобы выполнялось следующее условие:

$$S^0 \subseteq S^1 \subseteq \ldots \subseteq S^t \subseteq \ldots .$$

Здесь S^t — множество, построенное к шагу t.

Зафиксируем некоторую клиниевскую вычислимую нумерацию всех частично рекурсивных функций $\varphi_n, n \in \omega$. Под φ_n^t мы будем понимать часть φ_n, вычисленную за первые t шагов.

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{Q}$ — рекурсивный плотный порядок. Существует перечислимое всюду плотное множество S с всюду плотным дополнением такое, что $\langle \mathscr{Q}; S\rangle$ не имеет нетривиальных вычислимых самовложений.*

Замечание. В построенной модели $\langle \mathscr{Q}; S\rangle$ множество S будет нерекурсивным, так как если бы оно было рекурсивным, то возможно было бы построить бесконечно много рекурсивных автоморфизмов, используя «челночную» конструкцию.

Доказательство. Без ограничения общности отождествляем $\mathscr{Q}$ с множеством рациональных чисел интервала $(0, 1)$, так как существует вычислимый изоморфизм между $(0, 1)$ и $\mathscr{Q}$. С самого начала поместим в S элементы некоторого вычислимого всюду плотного множества с всюду плотным дополнением, например, множества $S^0 = \{\frac{k}{p_0^m} | k \in \omega, m \geq 0, 0 < k < p_0^m\}$.

Достаточно строить S, удовлетворяя для всех e требованиям:

R_e: $\varphi_e(x)$ не является нетривиальным вложением модели $\langle \mathscr{Q}; S\rangle$ в себя.

Будем говорить, что требование R_i имеет *больший приоритет, чем требование* R_j, если $i < j$.

Чтобы в модели не было нетривиальных вложений, достаточно портить действие каждой нетривиальной функции хотя бы на одном элементе, т. е. строить модель так, чтобы для любой частично рекурсивной функции φ_e, относительно которой возникают подозрения, что она станет в будущем автоморфизмом, нашлось бы x со свойством

$$x \in S \Leftrightarrow \varphi_e(x) \notin S.$$

Введем всюду плотные попарно не пересекающиеся рекурсивные множества $A_e = \{\frac{k}{p_{e+1}^m} | k \in \omega, m \geq 0, k < p_{e+1}^m\}$ со всюду плотными дополнениями. Заметим, что $S_0 \cap A_e = \varnothing$ для любого e.

Действия каждого нетривиального вложения φ_e будем нарушать, помещая в S элементы только из A_e. Ясно, что при всех i имеем $|A_i \cup S^0| = \infty$. Кроме того, любое множество S' такое, что $S^0 \subseteq S' \subseteq S^0 \cup \bigcup\limits_{i\in\omega} A_i$, будет всюду плотно вместе со своим дополнением.

Действительно, S' будет всюду плотным, так как мы начали построение с плотного множества S^0. Дополнение к S' будет всюду плотным, так как в соответствие с конструкцией из множеств A_e в S' попадет только конечное число элементов. Поэтому между любыми двумя элементами из S' есть элементы из A_e.

Следовательно, множество S, которое мы построим, будет обладать этими же свойствами.

Стратегия удовлетворения единственного требования R_e состоит в том, что мы ожидаем такой шаг $t + 1$, когда появляется элемент y из A_e со свойствами:

1) $\varphi_e^t(y) \downarrow \neq y$;
2) $y \notin S^t$;
3) $\varphi_e^t(y) \notin S^t$;
4) $\varphi_e^t(y)$ не подпадает под запрет с приоритетом выше, чем e;
5) не существует e-запрета.

Когда такой шаг $t + 1$ появляется, то говорим, что R_e *требует внимания на шаге* $t + 1$. Тогда мы помещаем y в S и $\varphi_e(y)$ запрещаем помещать в S с приоритетом e.

Построение S.

Шаг $t = 0$.

Положим $S^0 = \{\frac{k}{p_0^m} \mid k \in \omega,\ m \geq 0,\ k < p_0^m\}$.

Шаг $t + 1$.

Выберем наименьшее $e \leq t$ такое, что R_e требует внимания. Будем говорить, что R_e получает внимание. Добавим y из A_e в S, а $\varphi_e(y)$ запретим помещать в S с приоритетом e. Отменим все запреты с меньшими приоритетами, чем e. Все действия, связанные с требованиями с большими приоритетами, оставим неизменными.

Конец построения. $\square$

Лемма 1. *Для любого i требование R_i получает внимание самое большее конечное число раз.*

Доказательство. Заметим, что для отмены запрета необходимо создание запрета с более высоким приоритетом. Поэтому если требование R_0 получило внимание, то оно уже никогда больше не получит внимания (по свойству 5), так как запрет с приоритетом 0 никогда не будет отменен.

Зафиксируем e и предположим по индукции, что лемма выполняется для всех R_j, $j < e$. Выберем наименьший шаг t такой, что начиная с него никакое R_j, $j < e$, не получит внимания на последующих шагах. По индукционному предположению такой t существует.

Если после этого шага R_e потребует внимания, то запрет с приоритетом e никогда не будет отменен, так как запреты с более высокими приоритетами создаваться не будут.

Лемма 2. *Если вложение φ_e не является тривиальным, то найдется шаг построения t такой, что некоторое $y_e \in A_e$ удовлетворяет условиям* 1–4.

Доказательство. Так как φ_e — нетривиальное вложение, отображение φ_e должно сохранять порядок. Следовательно, φ_e — строго монотонная функция.

На протяжении доказательства леммы 2 работаем в естественном порядке $\mathcal{Q}$.

Пусть $\varphi_e(x) \downarrow\neq x$ при некотором x. Предположим для определенности, что $\varphi_e(x) > x$. (Случай $\varphi_e(x) < x$ рассматривается аналогично.) Тогда для любого $y \in (x, \varphi_e(x))$ верно, что $y < \varphi_e(y)$. Причем, $\varphi_e(x) < \varphi_e(y)$ ввиду строгой монотонности. Поэтому на всех элементах интервала $(x, \varphi_e(x))$ вложение φ_e действует нетривиально.

Далее, A_e — всюду плотное множество в $\mathcal{Q}$. Поэтому все элементы из A_e, лежащие внутри любого интервала, ввиду монотонности φ_e должны отобразиться в точности в образ относительно действия φ_e с сохранением порядка.

Так как A_e — бесконечное множество, а R_e может потребовать внимания лишь конечное число раз (а следовательно, лишь конечное множество элементов из A_e попадет в S^t), найдется $y_e \notin S^t$ со свойствами 1–4.

Лемма 3. *Никакое φ_e не является нетривиальным вложением $\langle \mathcal{Q}; S\rangle$.*

Доказательство. Допустим противное. Пусть некоторое φ_e — нетривиальное вложение. Если бы существовал запрет с приоритетом e, который никогда не отменялся, то φ_e не могло бы быть вложением ввиду существования a такого, что $a \in S \Leftrightarrow \varphi_e(a) \notin S$. Значит, такого запрета нет. Тогда найдется $y \notin S$ и $\varphi_e(y) \downarrow\neq y$, $\varphi_e(y) \notin S$, т. е. для y выполнены условия 1–5. По лемме 1 найдется некоторый шаг t, на котором все R_j, $j < e$, уже не требуют внимания и запреты с приоритетом e не существуют и больше не возникают. Поэтому на некотором шаге $t' > t$ требование R_e получит внимание по лемме 2.

Следовательно, после этого шага запрет с приоритетом e будет создан и никогда не будет отменен; противоречие.

В дальнейшем контурными буквами (например, $\mathbb{S}, \mathbb{A}$) будем обозначать булевы алгебры полуинтервалов, а обычными, соответствующими им (например, S, A), — множества точек.

Пусть $\mathbb{B} = \mathfrak{B}_{\mathscr{Q}}$ — булева алгебра, порожденная полуинтервалами с концами из $\mathscr{Q}$, а $\mathbb{S} = \mathfrak{B}_S$ — ее подалгебра. Все элементы $\mathbb{S}$ имеют концы всех составляющих ее полуинтервалов в S.

Теорема 2. *Существует перечислимое всюду плотное подмножество S в $\mathscr{Q}$ с всюду плотным дополнением такое, что модель $\langle \mathbb{B}; \mathbb{S} \rangle$ не имеет нетривиальных вычислимых автоморфизмов.*

Замечание. Данная теорема не является непосредственным следствием предыдущей. Действительно, в теореме 1 мы нарушаем только нетривиальные самовложения. Однако порождать автоморфизмы булевой алгебры могут произвольные отображения, в том числе и не сохраняющие порядок.

Доказательство. Заметим, что ввиду существования вычислимого изоморфизма из интервала $(0, 1)$ в $\mathscr{Q}$ можно вместо $\mathscr{Q}$ работать с $(0, 1)$.

С самого начала поместим в булеву алгебру $\mathbb{S}^0$ все полуоткрытые интервалы $[a, b)$ вместе со всеми элементами, которые они порождают. Концы порождающих полуинтервалов $[a, b)$ лежат во всюду плотном рекурсивном множестве $S^0 = \{\frac{k}{p_0^i} | 0 < k < p_0^i\}$ с всюду плотным дополнением.

Достаточно строить $\mathbb{S}$, удовлетворяя для всех e требованиям:

R_e: φ_e не является нетривиальным автоморфизмом модели $\langle \mathbb{B}; \mathbb{S} \rangle$.

Определим для всех $e \in \omega$ безатомные алгебры $\mathbb{A}_e$ как алгебры, порожденные семейством полуинтервалов вида

$$\left[\frac{k}{p_{e+1}^i}, \frac{k'}{p_{e+1}^j}\right), \quad 0 < \frac{k}{p_{e+1}^i} < \frac{k'}{p_{e+1}^j} < 1.$$

Концы порождающих полуинтервалов лежат во всюду плотных рекурсивных множествах $A_e = \{\frac{k}{p_{e+1}^i} \mid 0 < k < p_{e+1}^i\}$ с всюду плотными дополнениями.

Действия каждого нетривиального автоморфизма φ_e будем нарушать, помещая в множество S элементы только из A_e. Ясно, что при добавлении на шаге $t + 1$ в S пары новых точек x', x $(x' < x)$ в $\mathbb{S}$ возникают новые элементы, порожденные полуинтервалами $[x', x)$, $[x, 1)$ и $\mathbb{S}^t$.

Стратегия удовлетворения единственного требования R_e состоит в том, что мы ожидаем такой шаг $t + 1$, когда появляются элементы x', x, $x' < x$, из множества A_e со свойствами:

1) $\varphi_e([x', x)) \downarrow= \bigcup\limits_{i=1}^{m} [a_i, b_i)$, $\bigcup\limits_{i=1}^{m} [a_i, b_i) \neq [x', x)$;

2) $\{x', x\} \bigcap\limits_{i=1}^{m} \{a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m\} = \varnothing$;

3) $\bigcup\limits_{i=1}^{m} [a_i, b_i)$ — несократимый промежуток, т. е. ни одно a_i не равно b_j при любых i и j;

4) x, x' не принадлежат S^t и не запрещены к помещению в S требованием с приоритетом выше, чем e;

5) хотя бы одна из точек a_i, b_i, $i = 1, \dots, m$, не лежит в S^t;

6) не существует запрета с приоритетом e.

Если на шаге $t+1$ такие x' и x существуют, то будем говорить, что R_e *требует внимания на шаге* $t+1$. Стратегия удовлетворения требования R_e на этом шаге состоит в том, что x', x мы помещаем в S и соответственно $[x', x)$ попадает в $\mathbb{S}$. Те из точек a_i, b_i — концов образа интервала $[x', x)$ при автоморфизме φ_e, которые на шаге $t+1$ не принадлежат S, запрещаем от помещения в S с приоритетом e.

Построение S.

Шаг $t = 0$.

Ничего не делаем.

Шаг $t+1$.

Выбираем наименьшее $e \le t$ такое, что R_e требует внимания. Допустим, что R_e получает внимание. Пусть $\varphi_e^t([x', x)) = \bigcup\limits_{i=1}^{m} [a_i, b_i)$ и для x', x выполнены свойства 1–4. Поместим точки x', x в S^{t+1}. Тем самым получим $\mathbb{S}^{t+1} = \langle \mathbb{S}^t, [x', x), [x, 1) \rangle$. Запретим от помещения в S те точки a_i, b_i из интервала $(0, 1)$, которые являются концами интервалов, составляющих $\varphi_e^t([x', x))$, и удовлетворяют свойству 5. Разрушим все запреты R_j, $j > e$, с меньшими приоритетами.

Переходим к следующему шагу.

Конец построения.

Лемма 1. *Каждый e-запрет создается и разрушается лишь конечное число раз.*

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1 предыдущей теоремы.

Лемма 2. *Никакое φ_e не является нетривиальным автоморфизмом $\langle \mathbb{B}; \mathbb{S} \rangle$.*

Доказательство. Допустим противное. Пусть некоторая φ_e — нетривиальный автоморфизм. Если бы существовал запрет с приоритетом e, который никогда не отменялся, то нашелся бы полуинтервал $[x', x)$ такой, что $[x', x) \in \mathbb{S}$, $\varphi_e([x', x)) = \bigcup\limits_{i=1}^{m} (a_i, b_i) \notin \mathbb{S}$. Значит, φ_e не может быть нетривиальным автоморфизмом. Таким образом, запрета R_e не существует.

По лемме 1 после некоторого шага $t = t_0$ все запреты с приоритетом, выше либо равным e, не создаются и не уничтожаются.

Так как A_e — плотное множество, из которого лишь конечное число элементов попадает в запреты с приоритетами выше, чем e (которые после шага t_0 уже не изменяются), найдутся $x', x \in A_e$, удовлетворяющие условиям 1–6. Следовательно, на некотором шаге $t_1 > t_0$ требование R_e получит внимание.

После шага t_1 запрет с приоритетом e будет создан; противоречие.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Downey R.* Handbook of Recursive Mathematics. V. 2. Studies in Logic and Foundations of Mathematics. Amsterdam; Lausanne; New York; Oxford; Shannon; Singapore; Tokyo: Elsevier, 1998.

2. *Morozov A. S.* Handbook of Recursive Mathematics. V. 1. Studies in Logic and Foundations of Mathematics. Amsterdam; Lausanne; New York; Oxford; Shannon; Singapore; Tokyo: Elsevier, 1998.

3. *Роджерс Х.* Теория функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.

4. *Гончаров С. С.* Счетные булевы алгебры и разрешимость. Новосибирск: Научная книга, 1996.

Статья поступила 26 ноября 2001 г.

Бузыкаева Анна Николаевна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Коптюга, 4, Новосибирск 630090
A.N.Buzykaeva@inp.nsk.su