Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2002. Том 43, № 6

УДК 519.21

О СУБЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ И АСИМПТОТИКЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСИМУМА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ СУММ

А. А. Боровков

Аннотация: Изучаются свойства субэкспоненциальных распределений. Найдены новые достаточные и необходимые условия принадлежности классу этих распределений. Установлена связь между классами субэкспоненциальных и семиэкспоненциальных распределений. Приведены условия сохранения асимптотики субэкспоненциальных распределений при рассмотрении «функций от распределений». Аналогичные задачи изучены для класса так называемых локально-субэкспоненциальных распределений. В качестве приложений этих результатов найдено уточнение асимптотики распределения супремума последовательных сумм случайных величин с отрицательным сносом, в частности, локальные теоремы.

Ключевые слова: субэкспоненциальные распределения, асимптотические свойства, максимум сумм, уточнение асимптотики, локальная асимптотика

§ 1. Субэкспоненциальные распределения и их основные свойства

Пусть $\zeta \geq 0$ — случайная величина с распределением G: $G(B) = \mathbf{P}(\zeta \in B)$. Допуская некоторую неаккуратность в обозначениях (это не будет приводить к недоразумениям), тем же символом G со скалярным аргументом мы будем обозначать вероятность $G(x) = \mathbf{P}(\zeta \geq x) = G([x, \infty))$. Функцию $G(x)$ называют *хвостом распределения* ζ. *Сверткой* $G^{*(2)}(x) = G * G(x)$ хвостов $G(x)$ называется функция

$$G^{*(2)}(x) = \int G(dt)G(x-t) = \mathbf{P}(Z_2 \geq x),$$

где $Z_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \zeta_i$, ζ_i независимы и распределены, как ζ. (Сверткой $G^{*(2)}(B)$ двух распределений G называется мера $G^{*(2)}(B) = \int G(B-t)G(dt)$.)

Определение 1.1. Распределение G (или случайная величина ζ) *принадлежит классу* $\mathscr{S}$ *субэкспоненциальных распределений*, если при $x \to \infty$

$$G^{*(2)}(x) \sim 2G(x). \tag{1.1}$$

Здесь и в дальнейшем соотношение $f(x) \sim cg(x)$ при $x \to \infty$ означает, что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c$. Буквой c с индексами или без мы будем обозначать различные постоянные.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов № 02–01–00902 и № 00–15–96178) и INTAS (проект № 00–265).

Изучению свойств субэкспоненциальных распределений, введенных в [1], посвящено значительное количество работ (см., например, [2–16] и библиографию там). Понятие субэкспоненциальности оказывается весьма полезным при асимптотическом анализе случайных блужданий.

В § 1, 2 предлагаемой работы проводится систематическое изучение субэкспоненциальных и локально субэкспоненциальных распределений. Установлена связь между классами субэкспоненциальных и семиэкспоненциальных распределений. Некоторые из полученных результатов полностью или частично известны (см. также последующие библиографические ссылки). Мы приводим их для полноты, цельности и систематичности изложения.

§ 3 посвящен асимптотике функций от локально-субэкспоненциальных распределений и от знакопеременных дискретных субэкспоненциальных последовательностей.

В § 4 результаты § 3 применяются для получения интегро-локальных теорем о распределении максимума последовательных сумм. Близкие результаты были получены в [14, 16].

В § 5 найден второй член асимптотического разложения для распределения максимума последовательных сумм.

Определение 1.2. Функция $G(t)$ называется *асимптотически локально-постоянной* (л.п.), если для любого фиксированного v

$$\frac{G(t-v)}{G(t)} \to 1 \tag{1.2}$$

при $t \to \infty$. Для краткости такие функции мы будем называть просто *локально-постоянными.*

Заметим, что *функция* $L(t) = G(\ln t)$, *где* G *л.п., в силу* (1.2)) *является медленно меняющейся функцией* (м.м.ф). *И наоборот, если* L — *м.м.ф., то* $G(t) = L(e^t)$ *является л.п.* Отсюда и из теоремы о равномерной сходимости для м.м.ф. (см., например, [6]) следует, что сходимость в (1.2) равномерна по v на любом фиксированном отрезке.

Качественно субэкспоненциальные распределения можно представлять себе как «почти правильно» меняющиеся на бесконечности распределения, убывающие медленнее, чем любая экспонента. Приведенные ниже утверждения подтверждают такую характеристику. Пусть $G^{*(n)}$ есть n-я свертка G.

Теорема 1.1. *Если* $G \in \mathscr{S}$, *то*

1) G *локально постоянна;*

2) *при* $t \to \infty$ *и любом фиксированном* $n \geq 1$

$$\frac{G^{*(n)}(t)}{G(t)} \to n; \tag{1.3}$$

3) *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $b = b(\varepsilon) < \infty$ *такое, что*

$$\frac{G^{*(n)}(t)}{G(t)} \leq b(1+\varepsilon)^n$$

для всех n *и* t.

Положим

$$\widetilde{G}(t) = \int\limits_t^\infty G(u)\, du.$$

Если хоть одна из функций G или $\widetilde{G}$ субэкспоненциальна, то

$$G(t) = o(\widetilde{G}(t)). \tag{1.4}$$

Доказательство этих утверждений можно найти в [2, 13].

«Субэкспоненциальный» характер $G \in \mathscr{S}$ иллюстрируется также следующим частично известным (см. [2–15]) утверждением.

Теорема 1.2. *Пусть $G \in \mathscr{S}$. Тогда $G(t)$ представима в виде $G(t) = e^{-l(t)}$, где*

1) $l(t) = o(t)$, (1.5)

2) $l(pt)+l((1-p)t)-l(t) \to \infty$ *при* $t \to \infty$ *и любом фиксированном* $p \in (0, 1)$. (1.6)

Кроме того, для любого $M = M(x) \to \infty$ при $x \to \infty$

$$\int\limits_M^{px} G(x-t)G(dt) = o(G(x)). \tag{1.7}$$

Обратно, если G л.п. и при $p = 1/2$ выполнены (1.6), (1.7) *для $M = M(x) \to \infty$ такого, что $\frac{G(x-M)}{G(x)} < c < \infty$ при $x \to \infty$, то $G \in \mathscr{S}$.*

Доказательство. Докажем (1.5). В силу теоремы 1.1 G является л.п. функцией и, стало быть, существует t_0 такое, что при любом $\varepsilon > 0$ и всех $t > t_0$

$$\frac{G(t+1)}{G(t)} > e^{-\varepsilon}. \tag{1.8}$$

Считая для простоты $t - t_0$ целым, получим

$$G(t) = G(t_0)\frac{G(t_0+1)}{G(t_0)}\cdots\frac{G(t)}{G(t-1)} > G(t_0)e^{-\varepsilon(t-t_0)}, \quad e^{-l(t)} > e^{-l(t_0)-\varepsilon(t-t_0)}.$$

Это означает, что $l(t) < c + \varepsilon t$, и доказывает (1.5).

Докажем теперь (1.6), (1.7). Имеем

$$G^{*(2)}(x) = \int\limits_0^{px} G(x-t)G(dt) + \int\limits_0^{(1-p)x} G(x-t)G(dt) + G(px)G((1-p)x), \tag{1.9}$$

где при любом фиксированном M и $x \to \infty$

$$\int\limits_0^{M} G(x-t)G(dt) \sim G(x)(1-G(M)), \tag{1.10}$$

$G(M) \to 0$ при $M \to \infty$. Поэтому из (1.9) и субэкспоненциальности G с необходимостью вытекает, что

$$\int\limits_M^{px} G(x-t)G(dt) = o(G(x)), \quad G(px)G((1-p)x) = o(G(x))$$

при $x \to \infty$, $M \to \infty$. Последнее соотношение эквивалентно (1.6).

Пусть теперь G л.п. и выполнены (1.6), (1.7) при $p = 1/2$ и $M \to \infty$ таком, что $\frac{G(x-M)}{G(x)} < c$. Тогда из (1.9), (1.10) следует, что правая часть в (1.9) асимптотически эквивалентна $2G(x)$, т. е. $G \in \mathscr{S}$. Теорема доказана.

Перейдем теперь к достаточным условиям, обеспечивающим принадлежность $G \in \mathscr{S}$.

Очевидно, что степенные и регулярные функции G, т. е. функции, представимые в виде $G(x) = x^{-\alpha}L(x)$, $\alpha > 0$, $L(x)$ — м.м.ф., обладают свойством

$G(bx) \sim cG(x)$ при $x \to \infty$, где $c = b^{-\alpha}$. Следуя [17], введем в рассмотрение следующий класс функций.

Определение 1.3. Функцию G будем называть *надстепенной*, если для всех достаточно больших x

$$G(bx) > c_1 G(x) \quad \text{при} \quad b > 1, \quad c_1 < \infty,$$

или, другими словами,

$$G(px) < cG(x) \quad \text{при } p < 1.$$

Теорема 1.3. *Если л.п. функция G является надстепенной, то $G \in \mathscr{S}$.*

Доказательство теоремы можно найти в [7, 8]. Для полноты изложения мы все же приведем здесь доказательство этой теоремы, так как она является простым следствием теоремы 1.2.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1.2 и проверим выполнение условий (1.5)–(1.7). Свойство (1.5) вытекает из того, что G — л.п. функция. Далее имеем

$$G(px)G((1-p)x) < cG^2(x) = o(G(x))$$

при $x \to \infty$. Это означает выполнение (1.6). Кроме того,

$$\int_M^{px} G(x-t)G(dt) < cG(x)G(M) = o(G(x))$$

при $M \to \infty$, что влечет за собой (1.7). Теорема доказана.

Ясно, что класс л.п. надстепенных функций шире, чем класс $\mathscr{R}$ регулярных функций (функций вида $t^{-\alpha}L(t)$, L — м.м.ф.). В него могут входить, например, функции, полученные умножением функций из $\mathscr{R}$ на «медленно колеблющиеся», отделенные от нуля множители $m(t)$.

То же самое можно сказать о функциях из $\mathscr{S}$. Пусть л.п. функция $m(t)$ обладает свойством

$$0 < m_1 \le m(t) \le m_2 < \infty. \tag{1.11}$$

Теорема 1.4. *Если $G \in \mathscr{S}$ и л.п. функция $m(t)$ удовлетворяет условию (1.11), то $G_1 = mG \in \mathscr{S}$.*

Это утверждение содержится в теореме 2.1 в [8]. Его без труда можно получить и как следствие теоремы 1.2. Из него следует, в частности, что если $G(t) = e^{-l(t)} \in \mathscr{S}$, то $G_1(t) = e^{-l(t)+\varepsilon(t)}$, где $\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to \infty$, также принадлежит $\mathscr{S}$. Стало быть, $\mathscr{S}$ можно разбить на подклассы эквивалентности: G и G_1 принадлежат одному подклассу, если $G(t) \sim G_1(t)$. В каждом подклассе всегда найдется распределение $G \in \mathscr{S}$ такое, что функция $l(t) = -\ln G(t)$ дифференцируема. Действительно, если положить

$$\tilde{l}(t) = \int_t^{t+1} l(u)\,du, \tag{1.12}$$

то, очевидно, $\tilde{l}(t) = l(t) + o(1)$ (так как G локально постоянна) и $\tilde{l}$ дифференцируема. В качестве $\tilde{l}$ можно брать также линейную интерполяцию l с узлами в точках $k = 1, 2, \dots$, и т. д.

Таким образом, функцию $l(t) = -\ln G(t)$, $G \in \mathscr{S}$, всегда можно считать дифференцируемой с точностью до слагаемого $o(1)$.

Построим теперь более широкие, в известном смысле, условия для принадлежности классу $\mathscr{S}$. Прежде всего мы определим более широкий класс правильно меняющихся функций, включающий в себя $\mathscr{R}$, который будет вложен в $\mathscr{S}$.

Определение 1.4. $G(x) = e^{-l(x)}$ *принадлежит классу* $\mathscr{S}e$ *семиэкспоненциальных распределений*, если

$$1)\ l(x) = x^\alpha L(x),\ 0 \le \alpha \le 1,\ L \text{ — м.м.ф.};\quad L(x) \to 0, \text{ если } \alpha = 1; \tag{1.13}$$

$$2)\ l(x+\Delta) - l(x) \sim \frac{\alpha l(x)\Delta}{x} \text{ при } x \to \infty,\ \Delta = o(x),\ \frac{l(x)\Delta}{x} > \varepsilon \tag{1.14}$$

для любого фиксированного $\varepsilon > 0$;

$$3)\ l(x+\Delta) - l(x) = o(1) \text{ при } x \to \infty,\quad \frac{\Delta l(x)}{x} \to 0. \tag{1.15}$$

Из определения видно, что если $G = e^{-l(x)} \in \mathscr{S}e$, то функция $G_1(x) = e^{-l_1(x)} {\sim} G(x)$ ($l_1(x) = l(x) + o(1)$ при $x \to \infty$) тоже принадлежит $\mathscr{S}e$. Таким образом, $\mathscr{S}e$, как и $\mathscr{S}$, разбивается на подклассы (асимптотической) эквивалентности. Функцию $l(t)$ в определении 1.4 в силу (1.12), (1.14) также можно считать дифференцируемой с точностью до слагаемого $o(1)$ при $t \to \infty$.

Из сказанного вытекает также, что определение $\mathscr{S}e$ можно записать и в следующем виде: $G \in \mathscr{S}e$, *если* $G(x) = e^{-l(x)+\varepsilon(x)}$, *где* $\varepsilon(x) \to 0$ *при* $x \to \infty$, *функция* $l(x)$ *дифференцируема и обладает свойством* (1.14) *при всех* $\Delta = o(x)$. Но если $l(x)$, а стало быть, и $L(x)$ дифференцируемы и

$$L'(x) = o\left(\frac{L(x)}{x}\right) \quad \text{при } x \to \infty,$$

то (1.14) вытекает из (1.13) при всех $\Delta = o(x)$.

Нетрудно видеть, что $\mathscr{R} \subset \mathscr{S}e$, так как для $G \in \mathscr{R}$ имеем

$$l(x) = -\ln x^{-\gamma} L(x) = \gamma \ln x - \ln L(x)$$

и выполнены условия (1.13)–(1.15) при $\alpha = 0$ ((1.14) при $\alpha = 0$ следует понимать как $l(x+\Delta) - l(x) = o\big(\frac{l(x)\Delta}{x}\big)$). Несмотря на отмеченное включение, класс $\mathscr{R}$ мы будем часто выделять ввиду его важности.

Другая характеризация класса $\mathscr{S}e$ приведена ниже в теореме 1.8.

Приведем теперь утверждения, показывающие, что классы $\mathscr{S}e$ при $\alpha < 1$ и их существенные расширения принадлежат $\mathscr{S}$.

Теорема 1.5. *Пусть* G *л.п. и* $l(t) = -\ln G(t)$ *обладает свойствами:*

$$1)\ l(t) = o(t),\ 2l(t/2) - l(t) \to \infty \text{ при } t \to \infty; \tag{1.16}$$

$$2)\ l(x-t) - l(x) \ge -\frac{tl(x)}{x}(\gamma + o(1)) - c \text{ при } t \in [0, \varepsilon x], \quad \varepsilon = \varepsilon(x) \to 0,\ 0 \le \gamma < 1,\ c < \infty. \tag{1.17}$$

Тогда $G \in \mathscr{S}$.

Как уже отмечалось, условие 1 и свойство локальной постоянности необходимы для принадлежности $G \in \mathscr{S}$.

Замечание 1.1. Как это будет следовать из леммы 1.1, приведенной ниже, условие 2 можно записывать также в следующей эквивалентной форме:

2′) $l(x+t) - l(x) \le \frac{tl(x)}{x}(\gamma + o(1)) + c$;

2″) $l(x+t) - l(x) \le \frac{tl(x+t)}{x+t}(\gamma + o(1)) + c, \quad t = o(x)$.

Доказательство теоремы 1.5. Воспользуемся теоремой 1.2. Нам достаточно проверить выполнение (1.7) при $p = 1/2$. Обозначим

$$z(y) = \frac{y}{l(y)}.$$

Заметим предварительно, что при доказательстве теоремы мы можем слагаемое $o(1)$ в правой части (1.17) опустить, так как при выполнении (1.17) всегда найдется $\gamma_1 > \gamma$, $0 < \gamma_1 < 1$, такое, что справедливо неравенство (1.17), в котором $\gamma + o(1)$ заменено на γ_1.

Нам понадобится ряд свойств функции z.

Лемма 1.1. *Если выполнено условие* 2 *теоремы* 1.5 (*или условия* $2'$, $2''$), *то*

1) $z(y - \varepsilon y) \sim z(y)$ *при* $y \to \infty$, $\varepsilon \to 0$;

2) $z(y - \varepsilon y) < z(y)(1 - c_1\varepsilon)$ *при* $y \to \infty$, $\varepsilon \geq \frac{c_2}{l(y)}$ *и подходящих* $c_1 > 0$, $c_2 < \infty$.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из того, что $l(y - \varepsilon y) \leq l(y)$ и в силу (1.17)

$$l(y - \varepsilon y) \geq l(y) - \frac{\gamma \varepsilon y l(y)}{y} - c = l(y)\left(1 - \gamma\varepsilon - \frac{c}{l(y)}\right) = l(y)(1 + o(1)).$$

Второе утверждение при малых ε следует из неравенств

$$\frac{z(y - \varepsilon y)}{z(y)} = \frac{(y - \varepsilon y)}{y}\frac{l(y)}{l(y - \varepsilon y)} < \frac{1 - \varepsilon}{1 - \gamma\varepsilon - \frac{c}{l(y)}} = 1 - \varepsilon + O\left(\frac{1}{l(y)}\right) < 1 - c_1\varepsilon,$$

справедливых при $y \to \infty$, $\varepsilon \geq \frac{c_2}{l(y)}$ и подходящих c_1, c_2.

Если ε сравнимо с 1, то надо воспользоваться только что доказанным неравенством и соотношением

$$z(y - \varepsilon y) = z(y)\frac{z(y - \Delta)}{z(y)} \cdots \frac{z(y - k\Delta)}{z(y - (k-1)\Delta)},$$

справедливым при $\Delta = \frac{\varepsilon}{k}$ и произвольном k.

Достаточность условий $2'$, $2''$ устанавливается точно так же. Лемма доказана.

Из леммы и ее доказательства видно, что функцию $z(y)$ можно считать монотонно сходящейся к ∞ с точностью до множителя $(1 + o(1))$.

Вернемся к доказательству теоремы. Из (1.17) вытекает, что в качестве значения M в (1.7) можно взять $M = z(x) = o(x)$.

Область интегрирования $[M, x/2]$ в (1.7) разобьем на интервалы вида $[y, y + z(y)]$, $M \leq y < x/2$. Имеем в силу (1.17)

$$\int\limits_y^{y+z(y)} G(x - t)\,dG(t) \leq G(x)e^c \int\limits_y^{y+z(y)} e^{\frac{\gamma t}{z(x)}}\,dG(t), \tag{1.18}$$

где

$$\int\limits_y^{y+z(y)} e^{\frac{\gamma t}{z(x)}}\,dG(t) \leq e^{\frac{\gamma(y+z(y))}{z(x)} - l(y)}, \tag{1.19}$$

$$\frac{\gamma(y + z(y))}{z(x)} - l(y) = -l(y)\left[1 - \gamma\frac{z(y)}{z(x)}\left(1 + \frac{1}{l(y)}\right)\right].$$

Так как $\frac{z(y)}{z(x)} \leq 1 + o(1)$ при $y \leq x \to \infty$, последнее выражение равно

$$-l(y)(1 - \gamma(1 + o(1))) \quad \text{при всех} \;\; y \leq x/2.$$

Это означает, что существует $\theta \in (0, 1-\gamma)$ такое, что интеграл (1.19) не превосходит

$$e^{-\theta l(y)}(1 - e^{l_z(y)}), \tag{1.20}$$

где

$$0 \ge l_z(y) \equiv l(y) - l(y + z(y)) \ge -\gamma \frac{z(y) l(y + z(y))}{y + z(y)} - c$$

$$\ge -\gamma \frac{z(y)}{z(y + z(y))} - c = -\gamma(1 + o(1)) - c.$$

Поэтому если $l_z(y) < -\delta < 0$, то при некотором c_1

$$1 - e^{l_z(y)} < -l_z(y) < c_1(1 - e^{\theta l_z(y)}).$$

Если $l_z(y) \to 0$, то

$$1 - e^{l_z(y)} \sim -l_z(y) \sim \frac{1}{\theta}(1 - e^{\theta l_z(y)}).$$

Возвращаясь к (1.20), мы получим для интеграла в (1.19) оценку сверху

$$c_1(e^{-\theta l(y)} - e^{-\theta l(y+z(y))}). \tag{1.21}$$

Введем теперь в рассмотрение хвост распределения

$$G_\theta(t) = e^{-\theta l(t)}.$$

Тогда из оценок (1.18), (1.19) получим, что при $M \to \infty$

$$\int\limits_M^{x/2} G(x-t)dG(t) \le e^c G(x) \int\limits_M^{x/2} dG_\theta(t) = o(G(x)).$$

Свойство (1.7), а вместе с ним и теорема 1.5 доказаны.

Приведем теперь важное следствие теоремы 1.5. Мы уже отмечали, что предположение о том, что функции G из $\mathscr{S}$ представимы в виде $G(t) = e^{-l(t)+o(1)}$, где l дифференцируема, не является ограничением общности.

Теорема 1.6. *Пусть $G(t) = e^{-l(t)+o(1)}$, где $l(t)$ дифференцируема, и при некотором $\gamma < 1$ и всех достаточно больших t*

$$(\ln l(t))' \le \frac{\gamma}{t}. \tag{1.22}$$

Тогда выполнены все условия теоремы 1.5 и, стало быть, $G \in \mathscr{S}$.

Из теоремы 1.6 вытекает

Следствие 1.1. *Если*

$$\varlimsup_{t\to\infty} t(\ln\ln G^{-1}(t))' < 1, \tag{1.23}$$

то $G \in \mathscr{S}$.

Приведем еще одно следствие теоремы 1.6, показывающее, что условия (1.22), (1.23) в известном смысле близки к необходимым. Положим

$$r(k) = \frac{l(k+1) - l(k)}{l(k)}, \quad k = 0, 1, \dots .$$

Теорема 1.7. *Если G л.п. и*

$$\tilde{\gamma} = \varlimsup_{k\to\infty} kr(k) < 1, \tag{1.24}$$

то $G \in \mathscr{S}$.

Обратно, если $G \in \mathscr{S}$, то

$$\varliminf_{k\to\infty} kr(k) \le 1. \tag{1.25}$$

Доказательство. Пусть $\tilde{l}(t)$ — линейная интерполяция $l(t)$ по целочисленным точкам: $\tilde{l}'(t) = l(k+1) - l(k)$ при $t \in [k, k+1)$. Тогда

$$\frac{\tilde{l}'(t)}{\tilde{l}(t)} \le r(k) \quad \text{при } t \in [k, k+1).$$

Так как для л.п. G выполнено $l(t) = \tilde{l}(t) + o(1)$ и в силу (1.24)

$$\frac{\tilde{l}'(t)}{\tilde{l}(t)} < \frac{\tilde{\gamma}}{t}(1 + O(1/t)), \quad \tilde{\gamma} < 1,$$

то выполнены условия теоремы 1.6 и, стало быть, $G \in \mathscr{S}$.

Докажем второе утверждение. Пусть выполнено более слабое предположение $kr(k) \ge 1$ при $k \ge k_0$, чем обратное к (1.25). Тогда

$$\frac{\tilde{l}'(t)}{\tilde{l}(t)} \ge \frac{1}{t} \quad \text{при} \quad t \ge k_0, \quad \ln\frac{\tilde{l}(t)}{\tilde{l}(k_0)} \ge \ln\frac{t}{k_0}, \quad \tilde{l}(t) \ge \frac{l(k_0)}{k_0}t.$$

Это противоречит принадлежности $G \in \mathscr{S}$. Теорема доказана.

Приведенные утверждения показывают, что *«регулярная» часть $\mathscr{S}$, т. е. та часть, для которой верхние и нижние пределы* (1.24) *и* (1.25) *совпадают, есть не что иное, как класс $\mathscr{S}e$*. Более точно, справедлива

Теорема 1.8. *Если $G \in \mathscr{S}e$, то найдется $G_1 \sim G$, $G_1(t) = e^{-l_1(t)}$, такая, что существует*

$$\lim_{t\to\infty} t(\ln l_1(t))' = \alpha \in [0, 1]. \tag{1.26}$$

Обратно, если $G \in \mathscr{S}$ и существует предел (1.26), *то $G \in \mathscr{S}e$.*

Первое утверждение теоремы означает, что $G \in \mathscr{S}$, если $\alpha < 1$. Замечания по поводу «критического» случая $\alpha = 1$ см. после доказательства теоремы 1.6.

Доказательство. Пусть $g \in \mathscr{S}e$. Разобьем область $[1, \infty)$ на полуинтервалы вида $[x, x+\Delta_x)$, где $\Delta_x \to \infty$, $\Delta_x = o(z(x))$, $z(x) = \frac{x}{l(x)} \to \infty$ при $x \to \infty$, и построим G_1 путем линейной интерполяции G по точкам $\dots x, x + \Delta_x, x + \Delta_x + \Delta_{x+\Delta_x}, \dots$. Тогда, очевидно, в силу свойств (1.14), (1.15) выполняется $G_1 \sim G$,

$$l_1'(t) = \frac{l(x+\Delta_x) - l(x)}{\Delta_x} \quad \text{при} \quad t \in (x, x+\Delta_x),$$

если x — узел интерполяции. В силу тех же свойств (1.14), (1.15)

$$l_1'(t) = \frac{\alpha l(x)}{x}, \quad l_1(t) \sim l(x),$$
$$t(\ln l_1(t))' = t\frac{l_1'(t)}{l_1(t)} \sim \alpha \quad \text{при} \quad t \in [x, x+\Delta_x].$$

Это доказывает (1.26).

Обратно, пусть $G \in \mathscr{S}$ и выполнено (1.26). Тогда, полагая $l_1 = l$, получим

$$(\ln l(t))' = \frac{\alpha}{t} + \frac{\varepsilon(t)}{t}, \quad \varepsilon(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty,$$

$$\ln l(t) = \alpha \ln t + \int\limits_1^t \frac{\varepsilon(u)}{u}\, du,$$

$$l(t) = t^\alpha L(t), \quad \text{где} \quad L(t) = e^{\int_0^t \frac{\varepsilon(u)}{u}\, du}.$$

Это означает, что $L(t)$ — м.м.ф. Так как $G \in \mathscr{S}$, то $l(t) = o(t)$ и, стало быть, $L(t) \to 0$ при $\alpha = 1$. Далее, при $\Delta = o(t)$ из (1.26) получаем

$$\ln \frac{l(t+\Delta)}{l(t)} = \alpha \ln \frac{t+\Delta}{t} + \int\limits_t^{t+\Delta} \frac{\varepsilon(u)}{u}\, du,$$

где последний интеграл есть $o(1)$,

$$\frac{l(t+\Delta)}{l(t)} = \left(1 + \frac{\Delta}{t}\right)^\alpha e^{o(1)}, \quad l(t+\Delta) - l(t) \sim \frac{\alpha \Delta l(t)}{t}(1 + o(1)).$$

Все условия определения 1.4 выполнены. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.6. Пусть t_0 таково, что при $t \ge t_0$ выполнено (1.22). Тогда

$$\ln \frac{l(t)}{l(t_0)} \le \gamma \ln \frac{t}{t_0}, \quad l(t) \le \frac{l(t_0)}{t_0^\gamma} t^\gamma,$$

так что $z(t) = \frac{t}{l(t)} \to \infty$ при $t \to \infty$.

Далее, аналогичным образом при $t > t_0$ и фиксированном $\Delta > 0$ получаем

$$\ln \frac{l(t+\Delta)}{l(t)} \le \gamma \ln \frac{t+\Delta}{t} \le \gamma \frac{\Delta}{t}, \quad \frac{l(t+\Delta)}{l(t)} \le 1 + \frac{\gamma\Delta}{t}(1 + o(1)),$$

$$l(t+\Delta) - l(t) \le \frac{\gamma \Delta l(t)}{t}(1 + o(1)) = o(1)$$

при $t \to \infty$. Отсюда следует, что G локально постоянна.

Выполнение условия 1 теоремы 1.5 вытекает из того, что

$$\ln \frac{l(t)}{l(t/2)} \le \gamma \ln 2, \quad l(t) \le 2^\gamma l(t/2),$$

$$2l(t/2) - l(t) \ge 2^{1-\gamma} l(t) - l(t) = l(t)(2^{1-\gamma} - 1) \to \infty.$$

Наконец, условие 2 следует из того, что $l'(t) \le \frac{\gamma l(t)}{t}$,

$$l(x) - l(x-t) = \int\limits_{x-t}^x l'(u)\, du \le \gamma \int\limits_{x-t}^x \frac{l(u)}{u}\, du \le \frac{\gamma l(x) t}{x-t} = \frac{\gamma t}{z(x)}(1 + o(1))$$

при $t = o(x)$. Это доказывает (1.17), возможно, при чуть большем значении $\gamma < 1$, чем в (1.22). Теорема доказана.

В граничном случае, когда в (1.24) $\tilde{\gamma} = 1$, возможны оба варианта $G \in \mathscr{S}$ и $G \notin \mathscr{S}$. В частности, принадлежность распределения $G \in \mathscr{S}e$ при $\alpha = 1$ классу $\mathscr{S}$ можно установить лишь при дополнительном условии на производную $L'(t) = \frac{o(L(t))}{t}$. Именно, приходится предполагать, что

$$L'(t) = -\frac{\varepsilon(t)}{t} \tag{1.27}$$

(напомним, что $L(t) \to 0$ при $\alpha = 1$), где $\varepsilon(t) = o(L(t))$ *есть м.м.ф.* Для «регулярных» $L(t)$ это не есть ограничительное условие, так как предположение о том, что $\varepsilon(t)$ убывает более быстрым образом, например, $\varepsilon(t) \sim ct^{-\gamma}$, $\gamma > 0$, приводит к соотношению $L(t) \sim c_1 t^{-\gamma}$, которое невозможно.

Если верно (1.27), то выполнение условия 2 теоремы 1.2 при $p = 1/2$ следует из того, что

$$2l\left(\frac{x}{2}\right) - l(x) = x(L(x/2) - L(x)), \tag{1.28}$$

где

$$L\left(\frac{x}{2}\right) - L(x) = \int_{x/2}^{x} \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt \sim \varepsilon(x)\ln 2, \quad x\varepsilon(x)\ln 2 \to \infty \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Если (1.27) не выполнено, то условие 2 теоремы 1.2 также может не выполняться. Это будет происходить (точнее, приращение (1.28) будет обращаться в 0) в том случае, если $L(t)$ сделать постоянной на интервалах $[4^k, 4^k(1+\delta)]$, $1 > \delta > 1/2$, сосредоточив убывание L на интервалах $[4^k(1+\delta), 4^{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots$, таким образом, чтобы это не противоречило принадлежности $G \in \mathscr{S}e$ или, что то же, свойству $L'(t) = \frac{o(L(t))}{t}$.

Проверка условия 3 теоремы 1.2 при выполнении (1.27) проходит несколько сложнее, и останавливаться на этом мы здесь не будем.

Приведем еще одну характеризацию класса $\mathscr{S}$. (Более точно, дифференцируемых функций из $\mathscr{S}$.) Как уже отмечалось, в каждом подклассе эквивалентности из $\mathscr{S}$ есть дифференцируемые распределения. Положим $h(t) = -G'(t)$. Функцию $l'(t) = \frac{h(t)}{G(t)}$ в теории риска (когда G есть распределение выплат страховых компаний) называют «hazard rate».

Теорема 1.9 [13]. *Пусть $l'(t) \to 0$ при $x \to \infty$. Тогда*

(i) $G \in \mathscr{S} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x h(y)e^{yl'(x)}\,dy = 1$;

(ii) *если*

$$\int_0^\infty h(y)e^{yl'(y)}dy < \infty,$$

то $G \in \mathscr{S}$.

Приведем теперь пример, показывающий, что функции из $\mathscr{S}$ могут иметь очень большие флуктуации около функций из $\mathscr{S}e$ (значительно бо́льшие, чем те, что названы в теореме 1.4).

Пример 1.1. Положим $t_k = 2^k$, $k = 0, 1, \dots$, и разобьем область $[1, \infty)$ на полуинтервалы $[t_k, t_k(1+\delta))$, $[t_k(1+\delta), t_{k+1})$, $k = 0, 1, \dots$; $\delta < 1$. Положим

$$l(t) = l(t_k) \quad \text{при } t_k \le t \le (1+\delta)t_k,$$
$$l(t) = l(t_k) + t^\gamma - ((1+\delta)t_k)^\gamma \quad \text{при } (1+\delta)t_k \le t \le t_{k+1},$$

так что $l'(t) = 0$ на интервалах первого типа и $l'(t) = \gamma t^{\gamma-1}$ на интервалах второго типа. Ясно, что

$$l(t_{k+1}) = l(t_k) + 2^{(k+1)\gamma} - (1+\delta)^\gamma 2^{k\gamma} = l(t_k) + 2^{(k+1)\gamma} q_1,$$

где $q_1 = 1 - \frac{(1+\delta)^\gamma}{2}$,

$$l(t_k) = l(1) + q_1 \sum_{i=1}^k 2^{i\gamma} = q2^{k\gamma} + O(1) = ql_0(t_k) + O(1), \quad q = \frac{q_1}{1 - 2^{-\gamma}}, \quad l_0(t) = t^\gamma.$$

Ясно, что функция $l(t)$ «колеблется» около $ql_0(t)$. Положим $t'_k = t_k(1+\delta)$. Тогда $l(t'_k) = l(t_k)$ и функция $l_1(t) = q\big(\frac{t}{1+\delta}\big)^\gamma + O(1)$, проведенная через «нижние узлы» $(t'_k, l(t'_k))$ функции l, будет обладать свойством $l_1(t) \le l(t)$. Поэтому

$$l'(t) \le \gamma t^{\gamma-1} = \frac{\gamma}{t}\left(l_1(t)\frac{(1+\delta)^\gamma}{q} + O(1)\right) \le \frac{\gamma}{t} l(t)\frac{(1+\delta)^\gamma}{q}(1+o(1)).$$

Это означает, что если $\gamma_1 \equiv \gamma\frac{(1+\delta)^\gamma}{q} < 1$, то будут выполнены условия теоремы 1.6 и, следовательно, $G \in \mathscr{S}$.

Отметим также следующее.

1. Если $\gamma < 1$, то при достаточно малом $\delta > 0$ будет выполняться также $\gamma_1 < 1$.

2. Флуктуации функции l относительно $ql_0(t) = qt^\gamma$ не ограничены:

$$\varlimsup_{t\to\infty}(l(t) - ql_0(t)) = \varlimsup_{t\to\infty}(ql_0(t) - l(t)) = \infty.$$

Это соответствует неограниченной *относительной* флуктуации G относительно $G_0(t) = e^{-qt^\gamma} \in \mathscr{S}e$.

Пример показывает также, что функции из $\mathscr{S}$ аналогичным образом можно конструировать из «кусков» функций из $\mathscr{S}e$ при разных α.

Сделаем теперь несколько замечаний относительно *субэкспоненциальных распределений, определенных на всей оси.*

Мы будем говорить, что *распределение G случайной величины ζ со значениями на всей оси принадлежит $\mathscr{S}$, если $\zeta^+ = \max(0,\zeta) \in \mathscr{S}$.*

Покажем сначала, что неотрицательность $\zeta \in \mathscr{S}$ является существенной для справедливости утверждений теоремы 1.1.

Пусть $V(t)$ — регулярный хвост, а хвост распределения $G(t)$ имеет при $t \to \infty$ вид

$$G(t) = e^{-\mu t}V(t). \tag{1.29}$$

Обращаясь к вычислению свертки, мы получим

$$G^{*(2)}(t) = 2\int\limits_{-\infty}^{x/2} G(dt)G(x-t) + G^2\left(\frac{x}{2}\right),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{x/2} G(dt)G(x-t) = e^{-\mu x}\int\limits_{-\infty}^{x/2} e^{\mu t}V(x-t)G(dt) = e^{-\mu x}\left[\int\limits_{-M}^{M} + \int\limits_{-\infty}^{-M} + \int\limits_{M}^{x/2}\right],$$

где

$$G^2\left(\frac{x}{2}\right) = e^{-\mu x}V^2\left(\frac{x}{2}\right) \le ce^{-\mu x}V^2(x) = o(G(x));$$

$$\int\limits_{-M}^{M} e^{\mu t}V(x-t)G(dt) \sim V(x)g(\mu), \quad g(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mu t}G(dt) = \mathbf{E}e^{\mu\zeta};$$

$$\int\limits_{-\infty}^{-M} + \int\limits_{M}^{x/2} = o(e^{-\mu x}V(x)).$$

Таким образом, в этом случае

$$G^{*(2)}(x) \sim 2e^{-\mu x}V(x)g(\mu) = 2g(\mu)G(x). \tag{1.30}$$

Ясно, что всегда можно подобрать распределение ζ, $\mathbf{E}\zeta < 0$, таким образом, что $g(\mu) = 1$ и определение (1.1) субэкспоненциальности будет выполнено, хотя $G(t)$ убывает экспоненциальным образом (ср. с теоремой 1.1).

Таким образом, для разнозначных ζ для того чтобы оставаться в классе л.п. распределений при определении субэкспоненциальности, надо предполагать дополнительно выполнение свойства (1.2). *В этом случае все утверждения теорем* 1.1–1.4 *полностью сохранятся.* (Вместо (1.2) можно накладывать и другие дополнительные условия. Можно требовать, например, чтобы $\mathbf{E}\zeta \geq 0$, или предполагать, что $g(\mu) \neq 1$. Мы предоставляем читателю убедиться в этом самостоятельно.)

Замечание 1.2. Определение 1.1 и утверждения теорем 1.1–1.4 очевидным образом распространяются на случай «ненормированных» мер, т. е. на конечные меры G, для которых $G((-\infty,\infty)) = g \neq 1$. В этом случае свойство субэкспоненциальности записывается в виде

$$\frac{G^{*(2)}(t)}{G(t)} \to 2g \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Лишь в некоторые из утверждений теорем 1.1–1.4 нужно внести очевидные изменения. Второе и третье утверждения теоремы 1.1, например, примут вид

$$\frac{G^{*(n)}(t)}{G(t)} \to n g^{n-1}, \qquad \frac{G^{*(n)}(t)}{G(t)} \leq b g^{n-1}(1+\varepsilon)^n.$$

Для доказательства этих утверждений надо ввести в рассмотрение субэкспоненциальные распределения $G_1(\cdot) = \frac{G(\cdot)}{g}$ и воспользоваться теоремами 1.1–1.4.

§ 2. Локально-субэкспоненциальные распределения

Наряду с субэкспоненциальностью можно рассматривать более тонкое свойство *локальной субэкспоненциальности*. Начнем с более простого дискретного случая, когда рассматриваются распределения (или меры) $G = \{g_k, k \geq 0\}$ на множестве целых чисел (они изучались, например, в [3]). *Сверткой последовательности* $\{g_k\}$ с собой мы будем называть последовательность

$$g_k^{(2)} = \sum_{j=0}^{k} g_j g_{k-j}.$$

Определение 2.1. Последовательность

$$\{g_k \geq 0; k \geq 0\}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} g_k = 1,$$

называется *субэкспоненциальной*, если

$$\lim_{k\to\infty} \frac{g_{k+1}}{g_k} = 1, \tag{2.1}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{g_k^{(2)}}{g_k} \to 2. \tag{2.2}$$

Легко видеть, что регулярная последовательность

$$g_k = k^{-\alpha-1} L(k), \quad \alpha > 1,$$

где L — м.м.ф., после ее нормировки принадлежит классу субэкспоненциальных последовательностей, как и семиэкспоненциальная последовательность $g_k =$

$e^{-k^\alpha L(k)}$, $\alpha \in (0,1)$. При отсутствии нормировки в правой части (2.2) должно стоять $2g$, где $g = \sum\limits_{k=0}^{\infty} g_k$.

Для субэкспоненциальных последовательностей будут иметь место аналоги теорем 1.1–1.4 (с той разницей, что свойство (2.1) здесь внесено в определение, а не доказывается). Остановимся сначала на аналогах утверждений теоремы 1.1. (Возможно, они известны.)

Теорема 2.1. *Если последовательность* $\{g_k, k \geq 0\}$ *субэкспоненциальна, то при каждом фиксированном* n

$$\lim_{k\to\infty} \frac{g_k^{(n)}}{g_k} = n. \tag{2.3}$$

Доказательство. Воспользуемся индукцией. Пусть (2.3) верно. Тогда

$$\frac{g_k^{(n+1)}}{g_k} = \sum_{j=0}^{k} \frac{g_j g_{k-j}^{(n)}}{g_k} = \sum_{j=0}^{k-M} + \sum_{j=k-M+1}^{k}. \tag{2.4}$$

Первую сумму в правой части можно записать в виде

$$\sum_{j=0}^{k-M} = \sum_{j=0}^{k-M} g_j \frac{g_{k-j}^{(n)}}{g_{k-j}} \frac{g_{k-j}}{g_k},$$

где отношение $\frac{g_{k-j}^{(n)}}{g_{k-j}}$ может быть выбором M сделано при всех $j \leq k-M$ сколь угодно близким к n, в то время как

$$\sum_{j=0}^{k-M} g_j \frac{g_{k-j}}{g_k} = \sum_{j=0}^{k} - \sum_{j=k-M+1}^{k} \to 1 + G(M) \quad \text{при } k \to \infty. \tag{2.5}$$

Последнее соотношение следует из того, что

$$\sum_{j=0}^{k} = \frac{g_k^{(2)}}{g_k} \to 2, \qquad \sum_{j=k-M+1}^{k} g_j \frac{g_{k-j}}{g_k} \to \sum_{j=k-M+1}^{k} g_{k-j} \to 1 - G(M), \tag{2.6}$$

где $G(M) = \sum\limits_{j=M}^{\infty} g_j$ может быть выбором M сделано сколь угодно малым. Таким образом, первая сумма в (2.4) может быть выбором M сделана сколь угодно близкой к n.

Вторая сумма в (2.4) при $k \to \infty$

$$\sum_{j=k-M+1}^{k} g_j \frac{g_{k-j}^{(n)}}{g_k} \sim \sum_{j=0}^{M-1} g_j^{(n)} \tag{2.7}$$

выбором M может быть сделана сколь угодно близкой к 1, так как

$$\sum_{j=0}^{\infty} g_j^{(n)} = 1.$$

Поскольку левая часть (2.4) от M не зависит, мы доказали, что

$$\frac{g_k^{(n+1)}}{g_k} \to n+1 \quad \text{при } k \to \infty.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.2. *Если последовательность $\{g_k, k \geq 0\}$ субэкспоненциальна, то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $M = M(\varepsilon) < \infty$ и $b = b(\varepsilon)$ такие, что при всех $n \geq 1$ и $k \geq M$*

$$\frac{g_k^{(n)}}{g_k} < b(1+\varepsilon)^n.$$

Доказательство. Обозначим

$$\alpha_n = \sup_{k \geq M} \frac{g_k^{(n)}}{g_k}.$$

Тогда

$$\alpha_{n+1} = \sup_{k \geq M} \left(\sum_{j=0}^{k} g_j \frac{g_{k-j}^{(n)}}{g_k} \right)$$

$$\leq \sup_{k \geq M} \left(\sum_{j=0}^{k-M} \frac{g_j g_{k-j}^{(n)}}{g_{k-j}} \frac{g_{k-j}}{g_k} \right) + \sup_{k \geq M} \left(\sum_{j=k-M+1}^{k} g_j \frac{g_{k-j}^{(n)}}{g_k} \right). \quad (2.8)$$

Здесь первый sup в силу (2.5) не превосходит при достаточно больших M

$$\alpha_n \sum_{j=0}^{k-M} \frac{g_j g_{k-j}}{g_k} \leq \alpha_n(1+\varepsilon).$$

Второй sup в (2.8) не превосходит

$$\max(\sup_{M \leq k < N}, \sup_{k \geq N}),$$

где N мы выберем так, чтобы $\frac{g_{k-i}}{g_k} < 2$ при $k \geq N$, $i \leq M$. Тогда

$$\sup_{k \geq N} \leq 2 \sum_{j=0}^{M-1} g_j^{(n)} < 2.$$

Далее, при выбранных M и N обозначим

$$m = \max_{\substack{M \leq k < N \\ k-M < j \leq k}} \frac{g_j}{g_k}.$$

Тогда

$$\sup_{M \leq k < N} \leq m \sum_{j=0}^{M-1} g_j^{(n)} < m.$$

Считая, не ограничивая общности, $m \geq 2$, получим в итоге

$$\alpha_{n+1} \leq \alpha_n(1+\varepsilon) + m, \quad n \geq 1, \quad \alpha_1 = 1.$$

Отсюда вытекает, что

$$\alpha_{n+1} \leq (1+\varepsilon)^n + m \frac{(1+\varepsilon)^n}{\varepsilon}.$$

Теорема доказана.

Теорема 1.2 переносится на случай последовательностей очевидным образом. Нетрудно получить и аналоги теорем 1.3, 1.4.

Свойства (2.1), (2.2) можно назвать свойством *локальной субэкспоненциальности* решетчатого распределения $G = \{g_k\}$.

Возможны два пути распространения этого понятия на нерешетчатые распределения. Один из них состоит в рассмотрении распределений, имеющих плотность $h(t) = \frac{G(dt)}{dt} = -G'(t)$. *Плотность* $h(\cdot)$ мы будем называть *субэкспоненциальной*, если

$$h^{*(2)}(t) = \int\limits_0^t h(u)h(t-u)\,du \sim 2h(t), \quad \frac{h(t+v)}{h(t)} \to 1 \tag{2.9}$$

при $t \to \infty$ и любом фиксированном v. (Так как $L(u) = h(\ln u)$ есть м.м.ф., то сходимость (2.9) будет равномерной по $v \in [0,1]$, см. замечание к определению 1.2.) Для таких распределений имеют место полные аналоги теорем 2.1, 2.2. Их доказательства по сути остаются без изменений по сравнению с дискретным случаем (см. также [3, 12, 15]).

Второй путь распространения понятия локальной субэкспоненциальности не требует существования плотности. Обозначим через $\Delta(t)$ полуинтервал

$$\Delta(t) = [t, t+\Delta)$$

длины Δ и через $\Delta_1(t)$ полуинтервал $\Delta(t)$ при $\Delta = 1$.

Определение 2.2. Распределение G на $[0,\infty)$ будем называть *локально-субэкспоненциальным* (принадлежащим классу $\mathscr{S}_{\mathrm{loc}}$), если для любого фиксированного $\Delta > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G(\Delta(t))}{G(\Delta_1(t))} = \Delta, \tag{2.10}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G^{*(2)}(\Delta(t))}{G(\Delta(t))} = 2. \tag{2.11}$$

Вновь нетрудно убедиться, что если при каждом фиксированном Δ выполняется

$$G(\Delta(t)) \sim \Delta t^{-\alpha-1} L(t), \quad \alpha > 1, \tag{2.12}$$

где L — м.м.ф., то $G \in \mathscr{S}_{\mathrm{loc}}$. Это будет следовать также из теоремы 2.5, приведенной ниже. Свойство (2.12), очевидно, всегда выполнено для

$$G(t) = \int\limits_t^\infty t^{-\alpha-1} L(t)\,dt.$$

Ясно также, что если G имеет субэкспоненциальную плотность, то $G \in \mathscr{S}_{\mathrm{loc}}$.

Если распределение $G = \{g_k, k \geq 0\}$ решетчато и последовательность $\{g_k\}$ субэкспоненциальна, то в этом случае мы также будем говорить, что $G \in \mathscr{S}_{\mathrm{loc}}$, но *свойства* (2.10), (2.11) *будут выполнены здесь лишь для целых* $\Delta \geq 1$. В дальнейшем для решетчатых G мы будем иметь в виду в (2.10), (2.11) лишь целочисленные Δ.

Аналоги основных утверждений о свойствах класса $\mathscr{S}_{\mathrm{loc}}$, которые были установлены в дискретном случае, имеют следующий вид.

Теорема 2.3. *Если $G \in \mathscr{S}_{\mathrm{loc}}$, то при каждых фиксированных n и Δ*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G^{*(n)}(\Delta(t))}{G(\Delta(t))} = n.$$

Доказательство следует тому же пути, что и в теореме 2.1, и использует индукцию. Имеем

$$\frac{G^{*(n+1)}(\Delta(t))}{G(\Delta(t))} = \int\limits_0^{t+\Delta} \frac{G(du)G^{*(n)}(\Delta(t-u))}{G(\Delta(t))} = \int\limits_0^{t-M} + \int\limits_{t-M}^{t+\Delta}. \tag{2.13}$$

В первом интеграле

$$\int_0^{t-M} \frac{G(du)G^{*(n)}(\Delta(t-u))}{G(\Delta(t-u))} \frac{G(\Delta(t-u))}{G(\Delta(t))} \tag{2.14}$$

отношение

$$\frac{G^{*(n)}(\Delta(t-u))}{G(\Delta(t-u))}$$

в силу предположения индукции может быть при всех $u \le t-M$ сделано выбором M сколь угодно близким к n. Далее,

$$\int_0^{t-M} \frac{G(du)G(\Delta(t-u))}{G(\Delta(t))} = \frac{G^{*(2)}(\Delta(t))}{G(t)} - \int_{t-M}^{t+\Delta}. \tag{2.15}$$

Здесь для оценки

$$\int_{t-M}^{t+\Delta} \frac{G(du)G(\Delta(t-u))}{G(\Delta(t))} \tag{2.16}$$

нам понадобится

Лемма 2.1. *Положим $G(v) = 1$ при $v < 0$, и пусть $Q(v)$ — ограниченная невозрастающая функция на $(-\infty, \infty)$. Тогда для $G \in \mathscr{S}_{\mathrm{loc}}$*

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t-M}^{t+\Delta} \frac{G(du)Q(t-u)}{G(\Delta(t))} = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta}^{M} Q(v)dv. \tag{2.17}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное фиксированное разбиение $[t-M, t+\Delta)$ на полуинтервалы

$$\Delta_1, \dots, \Delta_K,\ \Delta_k = [t-M+(k-1)\delta, t-M+k\delta),\ \delta = \frac{M+\Delta}{K},\ k = 1, \dots, K.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{G(\Delta_k)}{G(\Delta(t))} Q(M-\delta(k-1)) \le \int_{t-M}^{t+\Delta} \frac{G(du)}{G(\Delta(t))} Q(t-u) \le \sum_{k=1}^{K} \frac{G(\Delta_k)}{G(\Delta(t))} Q(M-\delta k). \tag{2.18}$$

Но

$$\frac{G(\Delta_k)}{G(\Delta(t))} \to \frac{\delta}{\Delta} \quad \text{при } t \to \infty$$

и левая сумма в (2.18) будет сходиться при $t \to \infty$ к

$$\frac{\delta}{\Delta} \sum_{k=1}^{K} Q(M-\delta(k-1)).$$

Аналогичный предел будет иметь место для правой суммы в (2.18). Но каждая из этих сумм может быть выбором δ сделана сколь угодно близкой к

$$\frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta}^{M} Q(v)dv.$$

Так как левая часть в (2.15) от δ не зависит, то лемма доказана.

Если применить лемму к функциям $Q(t) = G(t)$ и $Q(t) = G(t+\Delta)$, то мы получим, что интеграл (2.16) сходится при $t \to \infty$ к

$$\frac{1}{\Delta}\left[\int\limits_{-\Delta}^{M} G(v)dv - \int\limits_{0}^{M+\Delta} G(v)dv\right]$$

$$= \frac{1}{\Delta}\left[\int\limits_{-\Delta}^{0} G(v)dv - \int\limits_{M}^{M+\Delta} G(v)dv\right] = 1 - \frac{1}{\Delta}G(\Delta(M)).$$

Отсюда следует, что интеграл в (2.15) при $t \to \infty$ выбором M может быть сделан сколь угодно близким к 1, а первый интеграл в (2.13) — к n.

Пользуясь опять леммой 2.1, аналогичным образом убеждаемся, что для второго интеграла в (2.13) справедливо

$$\lim_{t\to\infty} \int \frac{G(du)G^{*(n)}(\Delta(t-u)))}{G(\Delta(t))} = 1 - \frac{1}{\Delta}G^{*(n)}(\Delta(M)),$$

где

$$G^{*(n)}(\Delta(M)) \le G^{*(n)}(M) \to 0 \quad \text{при } M \to \infty.$$

Поэтому второй интеграл в (2.13) при больших t можно сделать выбором M сколь угодно близким к 1. Таким образом, левая часть в (2.13) сходится при $t \to \infty$ к $n+1$.

Теорема доказана.

Теорема 2.4. *Если $G \in \mathscr{S}_{\mathrm{loc}}$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $M = M(\varepsilon)$ и $b = b(\varepsilon)$ такие, что для всех n, $t \ge M$ и каждого фиксированного Δ*

$$\frac{G^{*(n)}(\Delta(t))}{G(\Delta(t))} \le b(1+\varepsilon)^n.$$

Доказательство этой теоремы повторяет доказательство теоремы 2.2 с внесением в него тех же модификаций, связанных с леммой 2.1, которые были внесены в доказательство теоремы 2.4.

Достаточные условия принадлежности классу локально субэкспоненциальных распределений содержатся в следующем утверждении.

Теорема 2.5. *Пусть $G \in \mathscr{S}$ и при $t \to \infty$ и каждом фиксированном $\Delta > 0$*

$$G(\Delta(t)) \sim \Delta G(t) v(t), \tag{2.19}$$

где $v(t) \to 0$ — л.п. надстепенная функция, т. е. функция, удовлетворяющая соотношениям

$$v(t+\Delta) \sim v(t), \quad v(pt) < cv(t) \tag{2.20}$$

при фиксированном $p \in (0,1)$, $c < \infty$. Тогда $G \in \mathscr{S}_{\mathrm{loc}}$.

Замечание 2.1. Если $G \in \mathscr{R}$ и G «дифференцируема на бесконечности», т. е.

$$G(t) - G(t+\Delta) \sim \alpha\Delta t^{-\alpha-1}L(t) = \frac{\alpha\Delta G(t)}{t}$$

при каждом фиксированном Δ, то условие теоремы 2.5, очевидно, выполнено.

Если $G \in \mathscr{S}e$ и соотношение (1.14) определения 1.4 выполнено при каждом фиксированном Δ (т. е. $l(t+\Delta) - l(t) \sim \Delta v(t)$, $v(t) = \frac{\alpha l(t)}{t}$), то

$$G(t) - G(t+\Delta) = e^{-l(t)}(1 - e^{l(t)-l(t+\Delta)}) = e^{-l(t)}(1 - e^{-\Delta v(t)(1+o(1))}) \sim G(t)\Delta v(t)$$

и условия теоремы 2.5 вновь выполнены.

Доказательство теоремы 2.5. Пусть ζ_i, $i = 1, 2$, независимы, $\zeta_i \in G$, $Z_2 = \zeta_1 + \zeta_2$. Имеем

$$G^{*(2)}(\Delta(x)) = \mathbf{P}(Z_2 \in \Delta(x)) = 2 \int\limits_0^{x/2} G(\Delta(x-t)G(dt) + q,$$

где в силу (2.19)

$$q = \mathbf{P}(\zeta_1 \in \Delta(x/2), \zeta_2 \in \Delta(x/2), Z_2 < x + \Delta) \le G^2(\Delta(x/2)) \le cv^2(x) G^2\left(\frac{x}{2}\right) = o(v(x)G(x)).$$

Если $M \to \infty$ достаточно медленно, то

$$\int\limits_0^M G(\Delta(x-t))G(dt) \sim \Delta \int\limits_0^M v(x-t)G(x-t)G(dt) \sim \Delta v(x)G(x).$$

Кроме того, в силу (1.7)

$$\int\limits_M^{x/2} G(\Delta(x-t))G(dt) < c\Delta v(x) \int\limits_M^{x/2} G(x-t)G(dt) = o(v(x)G(x)).$$

Отсюда следует, что

$$G^{*(2)}(\Delta(x)) \sim 2\Delta v(x)G(x) \sim 2G(\Delta(x)).$$

Теорема доказана.

§ 3. Асимптотические свойства «функций от распределений»

Смысл термина «функция от распределений» будет ясен из дальнейшего изложения. Через G, как и прежде, мы будем обозначать распределение случайной величины ζ : $G(B) = \mathbf{P}(\zeta \in B)$ и тем же символом G от скалярного аргумента будем обозначать хвост этого распределения: $G(x) = G([x, \infty))$.

Пусть $\psi(\lambda) = \mathbf{E}e^{i\lambda\zeta}$, $\mathscr{A}(w)$ — некоторая функция комплексного переменного w. В целом ряде задач (см., например, § 4) ответ на вопрос о характере некоторого искомого распределения получается в терминах некоторых преобразований над этим распределением (например, в виде его характеристической функции), которые имеют вид $\mathscr{A}(\psi(\lambda))$. Спрашивается, что можно сказать об асимптотике хвостов этого распределения, если асимптотика $G(x)$ известна?

Распределение, соответствующее характеристической функции $\mathscr{A}(\psi(\lambda))$ (или какому-нибудь другому преобразованию), и названо нами в заголовке этого раздела «функцией от распределения G».

В какой-то мере ответ на поставленный выше вопрос содержит

Теорема 3.1. *Пусть распределение G случайной величины ζ субэкспоненциально, $\mathscr{A}(w)$ аналитична в области $|w| \le 1$. Тогда существует конечная мера A такая, что $\mathscr{A}(\psi(\lambda))$ представима в виде*

$$\mathscr{A}(\psi(\lambda)) = \int e^{i\lambda x} A(dx), \quad \operatorname{Im}\lambda = 0; \tag{3.1}$$

$$A(x) =: A([x, \infty)) \sim \mathscr{A}'(1)G(x) \quad \textit{при } x \to \infty.$$

Доказательство этого утверждения (в его несколько более общем виде) можно найти в [3].

Для локально-субэкспоненциальных распределений справедлив следующий аналог теоремы 3.1. Пусть, как и прежде, $\Delta(t) = [t, t+\Delta)$ есть полуинтервал длины Δ.

Теорема 3.2. *Пусть $G \in \mathscr{S}_{\rm loc}$ и $\mathscr{A}(w)$ аналитична в области $|w| \le 1$. Тогда существует конечная мера A такая, что*

$$\mathscr{A}(\psi(\lambda)) = \int e^{i\lambda x} A(dx)$$

и для любого фиксированного Δ и $t \to \infty$

$$A(\Delta(t)) \sim \mathscr{A}'(1) G(\Delta(t)). \tag{3.2}$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству в [3] теоремы 3.1. Мера A имеет вид

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} A_k G^{*(k)},$$

где для коэффициентов A_k разложения $\mathscr{A}(w)$ справедливы неравенства $A_k \le c(1+\delta)^k$ при некотором $\delta > 0$. После этого надо воспользоваться теоремами 2.3 и 2.4, в силу которых

$$\frac{G^{*(k)}(\Delta(t))}{G(\Delta(t))} \to k \quad \text{при } k \to \infty$$

и

$$\frac{G^{*(k)}(\Delta(t))}{G(\Delta(t))} < b(1+\varepsilon)^k \quad \text{при всех } k \text{ и } t \ge M.$$

Полагая $\varepsilon = \delta/2$, мы с помощью теоремы о мажорируемой сходимости получим (3.2).

Теорема доказана.

Имеют место также полные аналоги теоремы 3.2 в случае, когда G имеет субэкспоненциальную плотность, и в случае, когда $G = \{g_k, k \ge 0\}$ дискретно, а последовательность $\{g_k\}$ субэкспоненциальна. В дискретном случае, например, справедлива

Теорема 3.3. *Если последовательность $\{g_k\}$ субэкспоненциальна и $\mathscr{A}(w)$ аналитична в области $|w| \le 1$, то существует конечная дискретная мера $A = \{a_k, k \ge 0\}$ такая, что*

$$\mathscr{A}(g(w)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k, \quad \text{где } g(w) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k w^k,$$

и

$$a_k \sim \mathscr{A}'(1) g_k$$

при $k \to \infty$.

Доказательство теоремы повторяет доказательство теоремы 3.2. Надо лишь вместо теорем 2.3, 2.4 использовать теоремы 2.1, 2.2.

Теорема доказана.

Несколько иные, в известном смысле более общие, версии теоремы 3.3 содержатся в [3, 17, 18].

Возникает естественный вопрос, насколько сохранятся утверждения теорем 3.2, 3.3 при переходе к обобщенным мерам? Например, при изучении асимптотики распределения времени первого прохождения (см. [19]) возникает задача об аналоге теоремы 3.3 в случае, когда $\{g_k\}$ — знакопеременная последовательность. Мы приведем здесь аналог теоремы 3.3, ограничившись рассмотрением регулярных последовательностей. В дальнейшем соотношение $a_k \sim cb_k$ при $c = 0$ мы будем понимать как $a_k = o(b_k)$ при $k \to \infty$.

Пусть

$$g_n \sim cn^{-\alpha}L(n),\ \alpha > 1,\ |c| < \infty,\ L \text{ — м.м.ф.},\ \hat{g}_n = |g_n|,\ \hat{g}(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{g}_k w^k. \quad (3.3)$$

Теорема 3.4. *Пусть знакопеременная (вообще говоря) последовательность* $\{g_k\}$ *имеет вид* (3.3), *а функция* $\mathscr{A}(w)$ *аналитична в области* $|w| \le \hat{g}(1)$. *Тогда* $\mathscr{A}(g(w))$ *представима в виде абсолютно сходящегося ряда* $\mathscr{A}(g(w)) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k w^k$ *и при* $k \to \infty$

$$a_k \sim \mathscr{A}\,'(g(1))g_k.$$

Доказательство. Пусть, как и прежде, $g_n^{(k)}$ обозначает k-ю свертку последовательности $\{g_n\}$:

$$g_n^{(k+1)} = \sum_{j=0}^{n} g_j^{(k)} g_{n-j}, \quad k \ge 1,$$

так что $\sum g_n^{(k)} w^n = g^k(w)$. Нетрудно видеть, что $g_n^{(2)} \sim 2g(1)g_n$ и далее по индукции

$$g_n^{(k)} \sim kg^{(k-1)}(1)g_n \quad (3.4)$$

для каждого фиксированного k. Очевидно, что $\left|g_n^{(k)}\right| < \hat{g}_n^{(k)}$, где $\hat{g}_n^{(k)}$ — k-я свертка последовательности $\{\hat{g}_n = |g_n|\}$, так что

$$\sum \hat{g}_n^{(k)} w^n = \hat{g}^k(w).$$

Очевидно, что $\frac{\hat{g}_n}{\hat{g}(1)}$ образуют субэкспоненциальную последовательность и, стало быть, в силу теоремы 2.2 для любого $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших k и n выполняется

$$\hat{g}_n^{(k)} \le \hat{g}_n \hat{g}^{k-1}(1) \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^k. \quad (3.5)$$

Далее, из соотношения

$$\mathscr{A}(g(w)) = \sum A_k g^k(w)$$

получаем

$$a_n = \sum_{k=0}^{\infty} A_k g_n^{(k)} = \sum_{k \le N} + \sum_{k > N}, \quad (3.6)$$

где в силу (3.4) при каждом фиксированном N

$$\frac{1}{g_n} \sum_{k \le N} \to \sum_{k \le N} A_k k g^{k-1}(1) = \mathscr{A}\,'(g(1)) + r_N, \quad (3.7)$$

$r_N \to 0$ при $N \to \infty$. Для второй суммы в (3.6) в силу (3.5) находим

$$\Bigl|\sum_{k>N}\Bigr| \le \sum_{k>N} \bigl|A_k g_n^{(k)}\bigr| \le \sum_{k>N} |A_k| g_n \hat{g}^{k-1}(1)(1+\varepsilon)^{k/2}.$$

Так как $|A_k| \le c_1[\hat{g}(1)(1+\varepsilon)]^{-k}$ при подходящем $\varepsilon > 0$, то $|A_k|\hat{g}^k(1)(1+\varepsilon)^{k/2}$ убывает экспоненциально быстро. Поэтому

$$\Bigl|\sum_{k>N}\Bigr| \le c_2 g_n (1+\varepsilon)^{-N/2}. \quad (3.8)$$

Сравнивая (3.6)–(3.8) и пользуясь произвольностью N, мы получим утверждение теоремы.

Теорема доказана.

§ 4. Локальные теоремы об асимптотике распределения максимума сумм

Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ независимы и одинаково распределены, $\mathbf{E}\xi < 0$,

$$S = \max_{k \ge 0} S_k, \quad S_k = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \quad V(x) = \mathbf{P}(\xi > x).$$

Обозначим

$$\widetilde{V}(x) = \int_x^\infty V(u)\, du.$$

Теорема 4.1. *Если функция $\widetilde{V}(x)$ субэкспоненциальна ($\widetilde{V} \in \mathscr{S}$), то при $x \to \infty$*

$$\mathbf{P}(S > x) \sim -\frac{1}{\mathbf{E}\xi} \widetilde{V}(x).$$

Доказательство этого утверждения см. в [20].

Целью этого раздела является доказательство следующего уточнения теоремы 4.1.

Теорема 4.2. *Пусть распределение ξ нерешетчатое, $\mathbf{E}\xi < 0$, V л.п., $\widetilde{V} \in \mathscr{S}$. Предположим, что*

$$\widetilde{V}(x) \sim \frac{V(x)}{v(x)}, \tag{4.1}$$

где $v(x) \to 0$ — л.п. надстепенная функция (*см. определения* 1.2, 1.3). *Тогда для любого $\Delta > 0$, $\Delta = o(x)$,*

$$\mathbf{P}(S \in \Delta(x)) \sim -\frac{\Delta}{\mathbf{E}\xi} V(x). \tag{4.2}$$

Если распределение ξ решетчатое с шагом решетки, равным 1, *то для целых $x \to \infty$*

$$\mathbf{P}(S = x) \sim \frac{V(x)}{\mathbf{E}\xi}. \tag{4.3}$$

Следствие 4.1. *Пусть $\mathbf{E}\xi < 0$. Если $V \in \mathscr{R}$ или $V \in \mathscr{S}e$, то выполнены* (4.2), (4.3).

Утверждение следствия можно усилить, заменив условия $V \in \mathscr{R}$ и $V \in \mathscr{S}e$ более слабыми условиями соответственно теорем 1.3–1.5. Следствие 4.1 будет вытекать также из теоремы 5.1.

Утверждение, близкое к теореме 4.2 и следствию 4.1, получено в [14, 16]. В [16] в качестве условия, обеспечивающего выполнение (4.2), (4.3), используется принадлежность V классу распределений S^*, который характеризуется тем, что

$$\int_0^\infty V(t)V(x-t)\, dt \sim 2\mathbf{E}\xi^+ V(x), \quad \xi^+ = \max(0, \xi).$$

Доказательство следствия 4.1. Если $V \in \mathscr{R}$, то утверждение следствия почти очевидно. В этом случае V л.п.,

$$\widetilde{V}(x) = \int_x^\infty u^{-\alpha} L(u)\,du \sim \frac{x^{-\alpha+1}L(x)}{\alpha-1} = \frac{V(x)}{v(x)},$$

где $v(x) = \frac{(\alpha-1)}{x}$. Условия теоремы 4.2 выполнены.

Пусть теперь $V \in \mathscr{S}e$. Тогда

$$l(x+u) - l(x) \sim \frac{\alpha u l(x)}{x} \quad \text{при } x \to \infty, \quad u = o(x), \quad \frac{ul(x)}{x} \to \infty. \tag{4.4}$$

Положим

$$v(x) = \frac{\alpha l(x)}{x}$$

и выберем $N = N(x)$ так, что $N = o(x)$, $Nv(x) \to \infty$. Тогда в силу (4.4)

$$\int_x^{x+N} e^{-l(t)}\,dt = e^{-l(x)} \int_0^N e^{-(l(x+u)-l(x))}\,du = e^{-l(x)} \int_0^N e^{-uv(x)(1+o(1))}\,du$$

$$= \frac{e^{-l(x)}}{v(x)} \int_0^{Nv} e^{-u(1+o(1))}\,du \sim \frac{V(x)}{v(x)}.$$

Повторяя эти же рассуждения для

$$\int_{x+N}^{x+N+N(x+N)} e^{-l(t)}\,dt$$

и т. д., получим

$$\widetilde{V}(x) \sim \frac{V(x)}{v(x)}.$$

Это доказывает (4.1) и тот факт, что $\widetilde{V}(x) \in \mathscr{S}e$ и, следовательно, $\widetilde{V} \in \mathscr{S}$. Условия теоремы 4.2 вновь выполнены.

Следствие доказано.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 4.2.

Схема доказательства здесь примерно та же, что в [17, 20]. Оно основано на двух элементах: на хорошо известных фактах, связанных с факторизационными тождествами, и на теоремах 2.5 и 3.2 (3.3 в дискретном случае). Первый элемент может быть выражен в виде следующего, во многом известного утверждения. Чтобы его сформулировать, нам понадобятся ряд обозначений и факторизационные тождества. Обозначим

$$\eta_+ = \min\{k \ge 1 : S_k > 0\}, \quad \eta_- = \min\{k \ge 1 : S_k \le 0\}.$$

На множествах $\{\eta_\pm < \infty\}$ определены случайные величины

$$\chi_\pm = S_{\eta_\pm},$$

которые суть соответственно первые положительная и неотрицательная суммы. Ясно, что в случае $\mathbf{E}\xi < 0$

$$\mathbf{P}(\eta_- < \infty) = 1, \quad \mathbf{P}(\eta_+ < \infty) = \mathbf{P}(S > 0) \equiv p < 1.$$

Положим, далее,

$$\varphi(\lambda) = \mathbf{E}e^{i\lambda\xi},$$

введем в рассмотрение случайную величину χ с распределением

$$\mathbf{P}(\chi < t) = \mathbf{P}(\chi_+ < t / \eta_+ < \infty)$$

и обозначим

$$U(x) = \mathbf{P}(\chi > x).$$

Той же буквой U мы будем обозначать распределение U.

Лемма 4.1. (i) *В случае* $\mathbf{E}\xi < 0$ *при* $\operatorname{Im}\lambda = 0$ *справедливы следующие тождества:*

$$1 - \varphi(\lambda) = [1 - p\mathbf{E}e^{i\lambda\chi}][1 - \mathbf{E}e^{i\lambda\chi_-}], \tag{4.5}$$

$$\mathbf{E}e^{i\lambda S} = \frac{1-p}{1 - p\mathbf{E}e^{i\lambda\chi}}. \tag{4.6}$$

Кроме того, для л.п. V *справедливы соотношения*

$$U(x) \sim \frac{\widetilde{V}(x)}{pa_-}, \quad a_- = -\mathbf{E}\chi_-, \tag{4.7}$$

$$U(\Delta(x)) \sim \frac{\Delta V(x)}{pa_-}. \tag{4.8}$$

В решетчатом случае с шагом решетки 1 *величину* Δ *в* (4.8) *следует выбирать целочисленной.*

(ii) *Если* $\mathbf{E}\xi < 0$, $\mathbf{E}\xi^2 < \infty$, V *л.п., то для нерешетчатых* ξ

$$U(x) = \frac{\widetilde{V}(x)}{a_- p} + \frac{b}{p} V(x) + o(V(x)), \tag{4.9}$$

где $b = \frac{a_{(2)}}{2a_-^2}$, $a_{(2)} = \mathbf{E}\chi_-^2 < \infty$.

В решетчатом случае (4.9) *сохранится, но множитель при* $V(x)$ *будет несколько иным (вместо* $a_{(2)}$ *будет* $a_{(2)} + a_-$).

Доказательство утверждений (4.5)–(4.7) можно найти, например, в [17, 21, 22]. Тождество (4.6) легко получить также непосредственно из представления $S = \sum_{i=1}^{\nu} \chi_i$, где χ_i независимы и распределены как χ, ν не зависит от $\{\chi_i\}$ и есть число «лестничных моментов» последовательности $\{S_k\}$, $\mathbf{P}(\nu = k) = (1-p)p^k$.

Так как формально (4.8) из (4.7) не следует, то мы приведем доказательство (4.8) (а вместе с ним и (4.7)).

Пусть

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \le 0, \\ 1 & \text{при } t > 0, \end{cases} \qquad F_0(t) = \delta(t) - \mathbf{P}(\xi < t) \equiv \delta(t) - F(t),$$

так что $F_0(t) \to 0$ при $t \to \pm\infty$. Тогда $1 - \varphi(\lambda)$ и $\frac{1}{1 - \mathbf{E}e^{i\lambda\chi_-}}$ можно записать соответственно в виде

$$1 - \varphi(\lambda) = \int e^{i\lambda x}\, dF_0(x), \quad \frac{1}{1 - \mathbf{E}e^{i\lambda\chi_-}} = -\int_{-\infty}^{0} e^{i\lambda x}\, dH(-x),$$

где $H(x)$ — функция восстановления случайной величины $-\chi_- \ge 0$. Дифференцируя тождество (4.5) в точке $\lambda = 0$, получим

$$a_- = -\mathbf{E}\chi_- = -\frac{\mathbf{E}\xi}{1-p} > 0, \quad \mathbf{E}\chi_-^2 < \infty, \text{ если } \mathbf{E}\xi^2 < \infty.$$

В силу сказанного тождество (4.5) можно записать в виде равенства

$$-\left(\int e^{i\lambda x} dF_0(x)\right)\left(\int_{-\infty}^{0} e^{i\lambda x}\, dH(-x)\right) = 1 - p\mathbf{E}e^{i\lambda\chi},$$

из которого следует, что при $x > 0$

$$pU(x) = \int_x^\infty dF(t)H(t-x). \tag{4.10}$$

Отсюда и из теоремы восстановления вытекает (4.7). Докажем (4.8). Для л.п. V в силу локальной теоремы восстановления получаем

$$pU(\Delta(x)) = \int_x^{x+\Delta} dF(t)H(t-x) + \int_{x+\Delta}^\infty dF(t)[H(t-x) - H(t-x-\Delta)]$$
$$= o(V(x)) + \frac{\Delta}{a_-}V(x+\Delta)(1+o(1)) = \frac{\Delta V(x)}{a_-} + o(V(x)).$$

Докажем теперь утверждение (ii). Если $\mathbf{E}\xi^2 < \infty$, то

$$H(t) = \frac{t}{a_-} + b + \varepsilon(t),$$

$\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to \infty$ (см., например, [17, 21, 22]). Поэтому в силу (4.10)

$$U(x) = \frac{1}{p}\int_x^\infty H(t-x)\, dF(t) = \frac{\widetilde{V}(x)}{a_- p} + \frac{bV(x)}{p} + \varepsilon_1(x),$$

где $\varepsilon_1(x) = \frac{1}{p}\int_0^\infty \varepsilon(v)\, dF(x+v) = o(V(x))$, если V л.п.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4.2. Ограничимся рассмотрением нерешетчатого случая. Воспользуемся теоремой 2.5, где в качестве $G(x)$ возьмем функцию $U(x)$. Выполнение условия (2.19) следует из леммы 4.1 и (4.1). Остальные условия теоремы 2.5 выполнены очевидным образом. Из нее следует, что $U \in \mathscr{S}_{\mathrm{loc}}$. Остается воспользоваться представлением (4.6), которое имеет вид

$$\mathbf{E}e^{i\lambda S} = \mathscr{A}(g(\lambda)), \tag{4.11}$$

где $g(\lambda) = \mathbf{E}e^{i\lambda\chi}$, $\mathscr{A}(w) = \frac{1-p}{1-pw}$. Функция $\mathscr{A}(w)$ аналитична в области $|w| < \frac{1}{p}$, и мы можем воспользоваться теоремой 3.2, в силу которой

$$\mathbf{P}(S \in \Delta(x)) \sim \mathscr{A}'(1)U(\Delta(x)).$$

Отсюда и из леммы 4.1 получаем (4.2).

Теорема доказана.

§ 5. Уточнение интегральной теоремы для максимума сумм

В этом разделе мы получим другое уточнение теоремы 4.1, содержащее следующий член асимптотического разложения для $\mathbf{P}(S > x)$. Такое уточнение в случае $V \in \mathscr{R}$ было получено в [23] (см. следствие 3 в [23]), но при дополнительных моментных условиях и условиях на гладкость V. Как это будет следовать из теоремы 5.1, эти дополнительные условия оказываются излишними.

Для систем обслуживания типа $M/G/1$, т. е. в случае, когда $\xi = \xi_1 - \xi_2$, ξ_i неотрицательны и независимы, ξ_2 имеет показательное распределение, а ξ_1 имеет плотность специального вида с тяжелым хвостом, уточнение для распределения S (или для предельного распределения времени ожидания в системе $M/G/1$) получено в [24].

Теорема 5.1. *Пусть $V \in \mathscr{R}$ или $V \in \mathscr{S}e$, $\alpha \in (0,1)$, $\mathbf{E}\xi < 0$, $\mathbf{E}\xi^2 < \infty$, распределение ξ нерешетчато. Тогда*

$$\mathbf{P}(S > x) = -\frac{\widetilde{V}(x)}{\mathbf{E}\xi} + cV(x) + o(V(x)), \tag{5.1}$$

где $c = \frac{b}{1-p} - \frac{2a_+p}{\mathbf{E}\xi(1-p)}$, $a_+ = \mathbf{E}\chi$, b и $\widetilde{V}(x)$ определено в § 4.

В решетчатом случае это представление сохранится при целых x и несколько иных значениях c (см. лемму 4.1).

Справедливо также равенство

$$c = \frac{\mathbf{E}\xi^2}{2(\mathbf{E}\xi)^2} - \frac{\mathbf{E}S}{\mathbf{E}\xi}.$$

(В [23] при вычислении постоянной c допущена ошибка: в соответствующем разложении не были учтены члены, соответствующие вторым производным V'' и дающие зависимость c от дисперсии ξ.)

Замечание 5.1. Очевидно, что в случае $\mathbf{E}\xi^2 < \infty$ из теоремы 5.1 вытекает следствие 4.1. Как и в следствии 4.1, условия $V \in \mathscr{R}$ и $V \in \mathscr{S}e$ можно ослабить. Например, вместо $V \in \mathscr{R}$ достаточно предполагать, что

1) V обладает свойством

$$\frac{V(x + v\ln x)}{V(x)} \to 1 \quad \text{при } x \to \infty \ \text{ и любом фиксированном } \ v;$$

2) V является надстепенной функцией;

3) V допускает регулярную мажоранту $\widehat{V}$ такую, что $x^{-1}\widehat{V}(x) = o(V(x))$.

Схема доказательства теоремы 5.1 примерно та же, что и в теореме 4.2: в основе его лежат факторизационные тождества, лемма 4.1 (часть (ii)) и прямые вычисления, связывающие распределение S с распределениями

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i,$$

где $\zeta_i = \chi_i - a_+$, χ_i независимы и распределены как χ. Распределение $\zeta = \chi - a_+$ мы обозначим через G. Для выполнения этого последнего этапа нам понадобится вспомогательное предложение об уточнении асимптотики $\mathbf{P}(Z_n > x)$. Оно является незначительной модификацией (и упрощением) теоремы 3 в [23] в случае $G \in \mathscr{R}$ и теоремы 2.1 в [25] в случае $G \in \mathscr{S}e$. Рассмотрим следующее условие гладкости в случае $G \in \mathscr{R}$:

$[\mathrm{D}_{1,q}]$ *при* $t \to \infty$, $\Delta \to 0$

$$G(t(1+\Delta)) - G(t) = -G(t)[\Delta\alpha_G(1+o(1)) + o(q(t))], \quad q(t) \to 0. \tag{5.2}$$

Это условие является ослаблением условия $[\mathrm{D}_1]$ в [23], в котором отсутствовало слагаемое $o(q(t))$ в правой части (5.2), и оно почти совпадает с условием $[\mathrm{D}_{(1,q)}]$ в [26], в котором вместо $o(q(t))$ использовалось $O(q(t))$. Как отмечено в замечании 3.2 в [26], остаточный член $o(q(t))$ можно сразу вносить в окончательный ответ (ср. с (5.4), (5.6)), предполагая после этого, что выполнено $[\mathrm{D}_{1,0}]$.

В случае $G \in \mathscr{S}e$ условие $[\mathrm{D}_{1,q}]$ будет иметь следующий вид. Положим $z(t) = \frac{t}{l(t)}$.

$[\mathrm{D}_{1,q}]$ *При* $t\to\infty$, $\Delta=o(l^{-1}(t))$ (*или* $\Delta t=o(z(t))$)
$$G(t(1+\Delta))-G(t)=-G(t)[\Delta\alpha l(t)(1+o(1))+o(q(t))]. \tag{5.3}$$
Это условие является ослаблением условия $[\mathrm{D}_1]$ в [25].

В случае $G\in\mathscr{R}$, $\alpha_G<2$ нам понадобится обратная функция
$$N(n)=V^{(-1)}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Теорема 5.2. *Пусть* $\mathbf{E}\zeta=0$.

(i) *Если* $\mathbf{E}\zeta^2<\infty$, $G\in\mathscr{R}$ *и выполнено* $[\mathrm{D}_{1,q}]$, *то*
$$\mathbf{P}(Z_n>x)=nG(x)[1+o(q(x))+o(\sqrt{n}x^{-1})] \tag{5.4}$$
равномерно по $n<\frac{(1+\varepsilon)x^2}{2(\alpha_G-2)\ln x}$, $\varepsilon>0$.

(ii) *Если* $\mathbf{E}\zeta^2=\infty$, $G\in\mathscr{R}$, $\mathbf{P}(\zeta<-t)\le cG(t)$ *и выполнено* $[\mathrm{D}_{1,q}]$, *то*
$$\mathbf{P}(Z_n>x)=nG(x)\left[1+o(q(x))+o\left(\frac{N(n)}{x}\right)\right] \tag{5.5}$$
равномерно по $n<\frac{\varepsilon}{G(x)}$.

(iii) *Если* $G\in\mathscr{S}e$, $\alpha\in(0,1)$, $\mathbf{E}\zeta^2<\infty$ *и выполнено* (5.3), *то*
$$\mathbf{P}(Z_n>x)=nG(x)[1+o(q(x))+o(\sqrt{n}z^{-1})], \tag{5.6}$$
где $z=z(x)=\frac{l(x)}{x}$, *равномерно по* $n=o(z^2)$.

Доказательство. Пусть сначала $G\in\mathscr{R}$ и $\mathbf{E}\zeta^2<\infty$. В этом случае полностью сохраняются все рассуждения доказательства теоремы 3 в [23], за исключением того места, где используется условие гладкости $[\mathrm{D}_1]$ из [23]. В частности, справедлива лемма 2 в [23] и в ней формула (20):
$$\mathbf{P}(Z_n>x)=n\mathbf{E}[G(x-Z_{n-1});|Z_{n-1}|<\varepsilon x]+o(n^2G(x)x^{-2}).$$
Здесь в силу $[\mathrm{D}_{1,q}]$ и соотношений $\mathbf{E}Z_{n-1}=0$, $\mathbf{E}|Z_{n-1}|=O(\sqrt{n})$ находим, считая, что $\varepsilon\to0$ достаточно медленно,
$$\begin{aligned}\mathbf{E}&[G(x-Z_{n-1});|Z_{n-1}|<\varepsilon x]\\ &=G(x)\mathbf{E}\left[1-\alpha_G\frac{Z_{n-1}}{x}+o\left(\frac{|Z_{n-1}|}{x}\right)+o(q(x));|Z_{n-1}|<\varepsilon x\right]\\ &=G(x)\biggl[1+o(\sqrt{n}x^{-1})+o(q(x))+O(\mathbf{P}(|Z_{n-1}|\ge\varepsilon x)\\ &\quad+\mathbf{E}\left(\frac{|Z_{n-1}|}{x};|Z_{n-1}|\ge\varepsilon x\right)\biggr]=G(x)[1+o(\sqrt{n}x^{-1})+o(q(x))].\end{aligned} \tag{5.7}$$
Это доказывает (5.4).

Утверждение (ii) следует непосредственно из [26] (см. теорему 2.1 в [26]) с учетом замечания 2.1. В нашем случае выполнено условие $[\mathrm{Q}_1]$ из [26]. Для упрощения изложения в [26] предполагалось, что $\alpha_G\in(1,2)$, и не рассматривались граничные значения $\alpha_G=1,2$. Переход к этим значениям связан лишь с незначительными техническими модификациями.

Случай $G\in\mathscr{S}e$ рассматривается совершенно аналогично. Здесь сохраняются все рассуждения в доказательстве теоремы 3.1 в [25], за исключением оценки значения E_2', определенного в (2.50), [25]:
$$E_2'=\mathbf{E}[G(x-Z_{n-1});|Z_{n-1}|\le z],$$

которое дает главную часть исследуемой асимптотики. Более точно, в силу (2.43), (2.44), (2.49) из [25] при $z \gg \sqrt{n}$ справедливо представление

$$\mathbf{P}(Z_n > x) = nE_2' + nG(x)o\left(\frac{n}{z^2}\right). \tag{5.8}$$

Так как $|G(x - vz) - G(x)| < cG(x)$ при $|v| \le 1$, то оценка части интеграла E_2' по области $\varepsilon z < |Z_{n-1}| \le z$ при ε, стремящемся к нулю достаточно медленно, имеет вид $G(x)O(\mathbf{P}(\varepsilon z \le |Z_{n-1}| \le z) = G(x)o(nz^{-2})$. Поэтому аналогично предыдущему все сводится к оценке

$$\mathbf{E}(G(x - Z_{n-1}); |Z_{n-1}| \le \varepsilon z),$$

где $\varepsilon \to 0$, для которой аналогично (5.7) получаем в силу (5.3) значение

$$G(x)[1 + o(\sqrt{n}z^{-1}) + o(q(x))].$$

Вместе с (5.8) это доказывает (5.6). Теорема 5.2 доказана.

Доказательство теоремы 5.1. Из тождества (4.6) следует, что

$$\mathbf{P}(S > x) = (1-p)\sum_{n=0}^{\infty} p^n \mathbf{P}(Z_n > x - a_+ n), \tag{5.9}$$

где $Z_n = \sum\limits_{i=1}^{n}(\chi_i - a_+)$, $a_+ = \mathbf{E}\chi$, χ_i независимы и распределены как χ, так что вероятность $\mathbf{P}(\chi > x) = U(x)$ в силу леммы 4.1(ii) имеет вид (4.9),

$$G(t) \equiv \mathbf{P}(\chi - a_+ > t) = U(t + a_+) = \frac{\widetilde{V}(t + a_+)}{a_- p} + \frac{bV(t)}{p} + o(V(t)). \tag{5.10}$$

Убедимся теперь, что $G(t)$ удовлетворяет условию $[\mathrm{D}_{1,q}]$. Пусть сначала $V \in \mathscr{R}$, $\mathbf{E}\zeta^2 < \infty$. Тогда при $t \to \infty$, $\Delta \to 0$

$$\begin{aligned} G(t(1+\Delta)) - G(t) &= -\frac{1}{a_- p}\int\limits_{t+a_+}^{t(1+\Delta)+a_+} V(u)\,du + o(V(t)) \\ &= -\frac{\Delta t}{a_- p}V(t)(1 + o(1)) + o(V(t)). \end{aligned} \tag{5.11}$$

Так как

$$G(t) \sim \frac{\widetilde{V}(t)}{a_- p} \sim \frac{tV(t)}{a_- p(\alpha - 1)},$$

то

$$G(t(1+\Delta)) - G(t) = -G(t)\left[\Delta(\alpha - 1)(1 + o(1)) + o\left(\frac{1}{t}\right)\right],$$

что означает выполнение $[\mathrm{D}_{1,q}]$ при $q(t) = t^{-1}$ и параметре α_G, равном $\alpha - 1$ и соответствующем показателю G. Стало быть, в силу (5.10) и теоремы 5.2 равномерно по $n \le \sqrt{x}$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_n > x - a_+ n) &= nG(x - a_+ n)\left[1 + o\left(\frac{\sqrt{n}}{x}\right)\right] \\ &= n\left[\frac{\widetilde{V}(x - a_+(n-1))}{a_- p} + \frac{bV(x)}{p} + o(V(x))\right]\left(1 + o\left(\frac{\sqrt{n}}{x}\right)\right) \\ &= n\left[\frac{\widetilde{V}(x)}{a_- p} + \frac{a_+(n-1)V(x)}{a_- p}(1 + o(1)) + \frac{bV(x)}{p} + o(V(x))\right]\left(1 + o\left(\frac{\sqrt{n}}{x}\right)\right). \end{aligned} \tag{5.12}$$

Вернемся теперь к (5.9) и разобьем сумму в правой части (5.9) на две части: по $n < \sqrt{x}$ и $n \ge \sqrt{x}$. Тогда вторая сумма не будет превосходить $cp^{\sqrt{x}}$, так что

$$\mathbf{P}(S > x) = O(p^{\sqrt{x}}) + \frac{\widetilde{V}(x)}{a_-(1-p)} + \frac{2a_+V(x)p}{a_-(1-p)^2} + \frac{bV(x)}{(1-p)} + o(V(x)). \tag{5.13}$$

Это доказывает (5.1).

Рассмотрим далее случай $V \in \mathscr{R}$, $\mathbf{E}\zeta^2 = \infty$. (Так как $\zeta \ge -a_+$, то это означает, что левый хвост здесь исчезает (обращается в 0) при $t < -a_+$ и, стало быть, $\alpha \le 2$.) Условие $[\mathrm{D}_{1,q}]$ при $q(t) = t^{-1}$ здесь в силу (5.11) и леммы 4.1(ii) вновь выполнено. Аналогично (5.12) находим из (5.5)

$$\mathbf{P}(Z_n > x - a_+n) = nG(x - a_+n)\left[1 + o\left(\frac{N(n)}{x}\right)\right].$$

Это вновь дает (5.13).

Пусть теперь $V \in \mathscr{S}e$. Проверим опять, что G удовлетворяет $[\mathrm{D}_{1,q}]$ в (5.3). Так как здесь

$$G(t) \sim \frac{\widetilde{V}(t)}{a_-p} \sim \frac{z(t)V(t)}{\alpha a_-p}, \quad z(t) = \frac{t}{l(t)},$$

то из (5.11) при $\Delta t = o(z(t))$ получаем $l(t(1+\Delta)) - l(t) = o(1)$,

$$\begin{aligned} G(t(1+\Delta)) - G(t) &= -\frac{\Delta t}{a_-p}V(t)(1+o(1)) + o(V(t)) \\ &= -G(t)\left[\Delta l(t)(1+o(1)) + o\left(\frac{1}{z(t)}\right)\right]. \end{aligned}$$

Условие $[\mathrm{D}_{1,q}]$ выполнено при $q(t) = z^{-1}(t)$. Следовательно, в силу теоремы 5.2 аналогично (5.12) при $z = z(x) = \frac{x}{l(x)}$ находим

$$\mathbf{P}(Z_n > x - a_+n) = nG(x - a_+n)[1 + o(\sqrt{n}z^{-1})]$$

равномерно по $n = o(\min(x, z^2))$. Обратимся теперь опять к (5.9) и разобьем сумму в (5.9) на три части: $\sum\limits_{n=0}^{n_1}$ при $n_1 = [\varepsilon z]$; $\sum\limits_{n=n_1+1}^{n_2}$ при $n_2 = [\varepsilon x]$ и $\sum\limits_{n=n_2+1}^{\infty}$, где $\varepsilon \to 0$ достаточно медленно, например, $\varepsilon > z^{-1/2}$. Тогда последняя сумма имеет вид

$$O(e^{-c\varepsilon x}) = O(e^{-c\varepsilon l(x)z}) = O(e^{-cl(x)\sqrt{z}}) = o(V(x)). \tag{5.14}$$

В первой сумме $n = o(z)$. Для таких n справедливо $l(x - a_+n) = l(x) + o(1)$ и аналогично (5.12)

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(Z_n > x - a_+n) \\ &\quad = n\left[\frac{\widetilde{V}(x)}{a_-p} + \frac{a_+(n-1)V(x)}{a_-p} + \frac{bV(x)}{p} + o(V(x))\right]\left(1 + o\left(\frac{\sqrt{n}}{z}\right)\right), \end{aligned}$$

так что, как и в (5.13),

$$(1-p)\sum_{n=0}^{n_1} = \frac{\widetilde{V}(x)}{a_-(1-p)} + \frac{a_+V(x)p}{2a_-(1-p)^2} + \frac{bV(x)}{(1-p)} + o(V(x)). \tag{5.15}$$

Во второй сумме

$$n \le \varepsilon x, \quad \sigma \equiv \frac{nl(x)}{x^2} \le \frac{\varepsilon}{z} \to 0,$$

и, стало быть, в силу следствия 5.1 в [27]

$$\mathbf{P}(Z_n > x - a_+n) \le c_1 nG(x - a_+n)^{(1-c\sigma)}, \quad c_1 < \infty, \quad c > 0.$$

Но для $n = o(x)$

$$l(x-a_+n)(1-c\sigma) = l(x) - \frac{\alpha a_+ n}{z} + o\left(\max\left(1, \frac{n}{z}\right)\right) + O\left(\frac{n}{z^2}\right) > l(x) - \frac{c_2 n}{z}, \quad c_2 > 0.$$

Поэтому

$$(1-p)\sum_{n_1+1}^{n_2} \le c_3 z \sum_{n_1+1}^{\infty} \exp\left\{-l(x) + c_2\frac{n}{z} + n\ln p\right\}$$

$$\le c_3 z \exp\left\{-l(x) + \frac{\varepsilon z}{2}\ln p\right\} \le c_3 z \exp\left\{-l(x) + \frac{\sqrt{z}}{2}\ln p\right\} = o(V(x)).$$

Сравнивая это с (5.14), (5.15), получим (5.1). Теорема доказана.

Коэффициенты c в (5.1) можно выразить несколько иначе. Так как $b = \frac{a_{(2)}}{2a_-^2}$ и в силу факторизационных тождеств

$$a_- = -\frac{\mathbf{E}\xi}{1-p}, \quad a_+ = \frac{(1-p)}{p}\mathbf{E}S, \quad \mathbf{E}\xi^2 = a_{(2)}(1-p) - 2\mathbf{E}\xi\mathbf{E}S,$$

то

$$b = \frac{(\mathbf{E}\xi^2 + 2\mathbf{E}\xi\mathbf{E}S)(1-p)}{2(\mathbf{E}\xi)^2}, \quad c = \frac{\mathbf{E}\xi^2 + 2\mathbf{E}\xi\mathbf{E}S}{2(\mathbf{E}\xi)^2} - \frac{2\mathbf{E}S}{\mathbf{E}\xi} = \frac{\mathbf{E}\xi^2}{2(\mathbf{E}\xi)^2} - \frac{\mathbf{E}S}{\mathbf{E}\xi}.$$

Как нам стало известно, в работе S. Asmussen, S. Foss, D. Korshunov, “Asymptotics for sums of random variables with local subexponential behaviour”, которая вскоре будет опубликована в “Journal of Theoretical Probability”, проводится изучение локально-субэкспоненциальных распределений и получены результаты, некоторые из которых близки к результатам настоящей работы. Например, следствие 2 и утверждение 4 названной статьи близки к теоремам 2.3 и 2.4 соответственно; теорема 2 близка к теореме 3.2 настоящей работы. Автор признателен С. Г. Фоссу и Д. А. Коршунову за информацию о названной статье, а также за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chistyakov V. P.* A theorem on sums of independent positive random variables and its application to branching random processes // Theor. Probab. Appl. 1964. V. 9. P. 640–648.
2. *Athreya K. B., Ney P. E.* Branching Processes. Berlin: Springer-Verl., 1975.
3. *Chover J., Ney P. E., Wainger S.* Functions of probability measures // J. Anal. Math. 1973. V. 26. P. 255–302.
4. *Chover J., Ney P. E., Wainger S.* Degeneracy properties of subcritical branching processes // Ann. of Probab. 1974. V. 1. P. 663–673.
5. *Teugels J. L.* The class of subexponential distributions // Ann. Probab. 1975. V. 3, N 6. P. 1000–1011.
6. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular variation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987.
7. *Goldie C. M.* Subexponential distributions and dominated-variation tails // J. Appl. Probab. 1978. V. 15. P. 440–442.
8. *Klüppelberg C.* Subexponential distributions and integrated tails // J. Appl. Probab. 1988. V. 25, N 1. P. 132–141.
9. *Pitman K. J. G.* Subexponential distribution functions // J. Austral. Math. Soc. 1980. V. 20. P. 337–347.
10. *Embrechts P., Goldie C. M., Veraverbeke N.* Subexponentiality and infinite divisibility // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete. 1979. Bd 49. S. 335–347.
11. *Embrechts P., Goldie C. M.* On convolution tails // Stochastic Process. Appl. 1982. V. 13. P. 263–278.
12. *Klüppelberg C.* Subexponential distributions and characterizations of related classes // Probab. Theory Related Fields. 1989. V. 82, N 2. P. 259–269.

13. *Embrechts P., Klüppelberg K., Mikosh T.* Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Berlin: Springer-Verl., 1997.

14. *Bertoin J., Doney R. A.* On the local behaviour of ladder height distributions // J. Appl. Probab. 1994. V. 31. P. 816–821.

15. *Сгибнев М. С.* Банаховы алгебры функций, обладающих одинаковым асимптотическим поведением на бесконечности // Сиб. мат. журн. 1981. Т. 22, № 3. С. 179–187.

16. *Asmussen S., Kalashnikov V., Konstantinides D., Klüppelberg C., Tsitsiashvili G.* A local limit theorem for random walk maxima with heavy tails // Statist. Probab. Letters. 2002. V. 56. P. 399–404.

17. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972.

18. *Боровков А. А.* Замечания к теоремам Винера и Блекуэлла // Теория вероятностей и ее применения. 1964. Т. 9, № 2. С. 331–343.

19. *Боровков А. А.* Об асимптотике распределений времен первого прохождения // Мат. заметки. (В печати.)

20. *Veraverbeke N.* Asymptotic behaviour of Wiener–Hopf factors of a random walk // Stochastic Process. Appl. 1977. V. 5, N 1. P. 27–37.

21. *Feller W.* On regular variation and local limit theorems // Proc. Fifth Berkeley Sympos. Math. Statist. Probab. 1967. V. 2, N 1. P. 373–388.

22. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. Изд-е 2-е: М.: Наука, 1986. Изд-е 3-е: М.: Изд-во Эдиториал УРСС и Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1999.

23. *Боровков А. А., Боровков К. А.* О вероятностях больших уклонений случайных блужданий. I: Распределения с правильно меняющимися хвостами // Теория вероятностей и ее применения. 2001. Т. 46, № 2. С. 209–232.

24. *Willekens E., Teugels J. L.* Asymptotic expansions for waiting time probabilities in an $M/G/1$ queue with long-tailed service time // Queueing Systems Theory Appl. 1992. V. 10, N 4. P. 295–311.

25. *Боровков А. А.* Вероятности больших уклонений для случайных блужданий с семиэкспоненциальными распределениями // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 6. С. 1290–1324.

26. *Borovkov A. A., Boxma O. J.* On large deviation probabilities for random walks with heavy tails // Siberian Adv. in Math. (В печати).

27. *Боровков А. А.* Оценки для распределения сумм и максимумов сумм случайных величин при невыполнении условия Крамера // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 5. С. 997–1038.

Статья поступила 12 сентября 2002 г.

Боровков Александр Алексеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Коптюга, 4, Новосибирск 630090
borovkov@math.nsc.ru