Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2002. Том 43, № 5

УДК 517.958

КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ДЛЯ СЛУЧАЯ КОМПТОНОВСКОГО РАССЕЯНИЯ

Д. С. Аниконов, Д. С. Коновалова

Аннотация: Уточняется известная форма уравнения переноса, учитывающая рассеяние по Комптону. Ставится и исследуется прямая задача о нахождении распределения плотности излучения при заданных характеристиках среды и известной плотности внешних источников. Доказаны теоремы существования и единственности решения рассмотренной краевой задачи. Характер ограничений более всего соответствует процессу миграции фотонов в веществе с непрерывно меняющимися характеристиками относительно пространственных и энергетических переменных. В отличие от подобных результатов, утверждения доказаны без использования традиционных неравенств для коэффициентов уравнения переноса.

Ключевые слова: комптоновское рассеяние, кинетическое уравнение, теория переноса, миграция фотонов

Введение

В работе изучается стационарное уравнение переноса с энергетической зависимостью, являющееся основной частью многих математических моделей переноса радиации в веществе. Полученные результаты могут быть интерпретированы для различных видов излучения, однако выбор ограничений и граничных условий в основном соответствует миграции фотонов в веществе. Подразумевается, что энергия рассматриваемых фотонов характерна для эффекта комптоновского рассеяния. Как известно [1, 2], индикатриса рассеяния по Комптону содержит δ-функцию Дирака, поэтому к этому случаю неприменимы выводы подобных работ, в которых присутствуют только обычные числовые функции. В то же время, имеются приближенные численные алгоритмы, учитывающие эффект Комптона (см., например, [3, 4]). Можно отметить также работы [5, 6], в которых подобные уравнения использовались для описания процесса переноса нейтронов и численных методов решения возникающих при этом задач. Однако полное теоретическое обоснование сопутствующих фундаментальных вопросов для уравнения переноса до сих пор отсутствует. Эти обстоятельства побудили авторов выполнить настоящее формальное исследование соответствующей краевой задачи. Будучи начальной, эта работа содержит некоторые упрощающие ограничения, снижающие ее общность. В основном это ограничения типа непрерывности изменения свойств среды по пространственным и энергетическим переменным. В дальнейшем авторы намерены исследовать аналогичные вопросы для гораздо более широких классов функций, чтобы тем самым существенно расширить область возможного применения результатов. Вместе с

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–01–00128) и Программы поддержки молодых ученых РАН.

тем отметим, что уже в рассмотренном нами случае обнаружился новый математический эффект: существование и единственность решения краевой задачи доказаны без традиционного ограничения типа неравенства для коэффициентов уравнения переноса. Это обстоятельство является прямым следствием закона Комптона, устанавливающего строгое соотношение между изменением угла траектории движения фотона и потерей его энергии при рассеянии. Для удобства чтения результаты исследования сформулированы в виде трех, все более общих, теорем.

§ 1. Уточнение математической модели переноса излучения для комптоновского рассеяния

Рассмотрим процесс распространения фотонов в некоторой среде G. Для его описания используем стационарное линейное уравнение переноса излучения [1, 2]:

$$\omega\nabla_r f(r,\omega,\alpha)+\mu(r,\alpha)f(r,\omega,\alpha)=\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\alpha}^{\alpha_2}k(r,\omega\omega',\alpha,\alpha')f(r,\omega',\alpha')\,d\alpha'd\omega'+J(r,\omega,\alpha). \tag{1.1}$$

Здесь $r\in G$, $G\subset\mathbb{R}^3$ — строго выпуклая ограниченная область, $\Omega=\{\omega\in\mathbb{R}^3:|\omega|=1\}$, ω — единичный вектор, указывающий направление движения фотонов после взаимодействия с электроном, $\omega'\in\Omega$ — направление движения до взаимодействия, $\omega\omega'$ — их скалярное произведение; $\alpha',\alpha\in[\alpha_1,\alpha_2]$ — энергия фотонов до и после взаимодействия соответственно, выраженная в единицах энергии покоя электрона, $\alpha_1>0,\alpha_2<\infty$; $\mu(r,\alpha)$ — коэффициент полного взаимодействия; $k(r,\omega\omega',\alpha,\alpha')$ — дифференциальное сечение рассеяния фотонов. Интегральное слагаемое в правой части уравнения (1.1) обычно называется *интегралом столкновений*.

Распространим это уравнение на случай комптоновского рассеяния. Согласно [1, 2] интеграл столкновений в этом случае имеет вид

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\alpha}^{\alpha_2}\delta(1-\omega\omega'-1/\alpha+1/\alpha')\sigma(r,\omega\omega',\alpha,\alpha')f(r,\omega',\alpha')\,d\alpha'd\omega', \tag{1.2}$$

где $\sigma(r,\omega\omega',\alpha,\alpha')$ — числовая непрерывная по α' функция, а $\delta(1-\omega\omega'-1/\alpha+1/\alpha')$ представляет собой суперпозицию выражения $(1-\omega\omega'-1/\alpha+1/\alpha')$ и одномерной δ-функции Дирака (в обобщенном смысле).

Запишем выражение (1.2) в более формализованном виде:

$$\int\limits_{\Omega}\langle\delta(1-\omega\omega'-1/\alpha+1/\alpha'),\sigma(r,\omega\omega',\alpha,\alpha')f(r,\omega',\alpha')\rangle\,d\omega'.$$

Тогда уравнение (1.1) примет вид

$$\omega\nabla_r f(r,\omega,\alpha)+\mu(r,\alpha)f(r,\omega,\alpha)$$
$$=\int\limits_{\Omega}\langle\delta(1-\omega\omega'-1/\alpha+1/\alpha'),\sigma(r,\omega\omega',\alpha,\alpha')f(r,\omega',\alpha')\rangle\,d\omega'+J(r,\omega,\alpha). \tag{1.3}$$

Традиционная трактовка (см., например, [7]) подынтегрального выражения в (1.3), выделенного скобками, заключается в том, что при фиксированных ω, ω',

α оно является значением линейного непрерывного функционала, действующего на непрерывные по α' функции. Переменные ω, ω', α считаются параметрами этого функционала, т. е. рассматривается семейство таких функционалов. В [7] показано, что если $a(x) \in C^1(\mathbb{R}^1)$, x_k — изолированные простые нули $a(x)$, а $\varphi(x)$ — произвольная непрерывная в $\mathbb{R}^1$ функция, то

$$\delta(a(x)) = \sum_k \frac{\delta(x - x_k)}{|a'(x_k)|}, \quad \langle \delta(a(x)), \varphi(x) \rangle = \sum \frac{\varphi(x_k)}{|a'(x_k)|} \tag{1.4}$$

Если же $a(x)$ не обращается в 0, то $\langle \delta(a(x)), \varphi(x) \rangle = 0$.

Обозначим $-q = 1 - \omega\omega' - 1/\alpha$, $y = 1/\alpha' - q$. Интегральное слагаемое в (1.4) примет вид

$$\int_\Omega \langle \delta(y), \sigma(r, \omega\omega', \alpha, \alpha') f(r, \omega', \alpha') \rangle \, d\omega', \quad \alpha' = \frac{1}{y + q}.$$

В силу (1.4) получим

$$\begin{aligned} &\langle \delta(y), \sigma(r, \omega\omega', \alpha, \alpha') f(r, \omega', \alpha') \rangle \\ &\qquad = \langle \delta(y), (1/(y+q)^2) \cdot \sigma(r, \omega\omega', \alpha, 1/(y+q)) f(r, \omega', 1/(y+q)) \rangle \\ &\qquad\qquad = \frac{1}{q^2} \sigma(r, \omega\omega', \alpha, 1/q) f(r, \omega', 1/q), \end{aligned} \tag{1.5}$$

если уравнение

$$y = 0, \quad \text{т. е.} \quad 1 - \omega\omega' - 1/\alpha + 1/\alpha' = 0, \tag{1.6}$$

разрешимо относительно α' при фиксированных ω, ω', α, и

$$\langle \delta(y), \sigma(r, \omega\omega', \alpha, \alpha') f(r, \omega', \alpha') \rangle = 0$$

в противном случае. В силу того, что $\alpha' \leq \alpha_2$, имеем

$$1 - \omega\omega' - 1/\alpha + 1/\alpha' \geq 1 - \omega\omega' - 1/\alpha + 1/\alpha_2.$$

Поскольку при $\alpha' = \alpha_2$ это неравенство обращается в равенство, уравнение (1.6) будет иметь решение в том и только в том случае, когда

$$1 - \omega\omega' - 1/\alpha + 1/\alpha_2 < 0, \quad \text{или} \quad \omega\omega' > 1 - 1/\alpha + 1/\alpha_2. \tag{1.7}$$

Так как $\omega\omega' = \cos\psi$, ясно, что если $-1/\alpha + 1/\alpha_2 < -2$, то неравенство (1.7) имеет место для любых направлений $\omega' \in \Omega$. В случае же, когда $-1/\alpha + 1/\alpha_2 \geq -2$, т. е. $\alpha \geq \alpha_2/(1 + 2\alpha_2)$, первое слагаемое в правой части (1.4) принимает вид

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \langle \delta(1 - \omega\omega' - 1/\alpha + 1/\alpha'), \sigma(r, \omega\omega', \alpha, \alpha') f(r, \omega', \alpha') \rangle \, d\omega' \\ &\qquad\qquad = \int_{\Omega_{\omega,\alpha}} \frac{1}{q^2} \sigma(r, \omega\omega', \alpha, 1/q) f(r, \omega', 1/q) \, d\omega', \end{aligned}$$

где $\Omega_{\omega,\alpha} = \{\omega' \in \Omega : \omega\omega' \geq 1 - 1/\alpha + 1/\alpha_2\}$, $1/q = \alpha/(1 + \alpha(\omega\omega' - 1))$.

§ 2. Постановка и исследование прямой задачи

Перейдем теперь к постановке и исследованию краевой задачи для уравнения (1.4). Итак, в случае комптоновского рассеяния уравнение переноса принимает следующий вид:

$$\omega\nabla_r f(r,\omega,\alpha) + \mu(r,\alpha) f(r,\omega,\alpha) = \int\limits_{\Omega_{\omega,\alpha}} \frac{1}{q^2}\sigma(r,\omega\omega',\alpha,1/q) f(r,\omega',1/q)\,d\omega' + J(r,\omega,\alpha), \quad (2.1)$$

где $1/q = \alpha/(1+\alpha(\omega\omega'-1))$,

$$\Omega_{\omega,\alpha} = \begin{cases} \{\omega' \in \Omega : \omega\omega' \geq 1 - 1/\alpha + 1/\alpha_2\}, & \text{если} \quad \alpha \geq \alpha_2/(2\alpha_2+1), \\ \Omega, & \text{если} \quad \alpha < \alpha_2/(2\alpha_2+1). \end{cases}$$

Поскольку определение множества $\Omega_{\omega,\alpha}$ различно для $\alpha \geq \alpha_2/(1+2\alpha_2)$ и $\alpha < \alpha_2/(1+2\alpha_2)$, рассмотрим далее каждый случай отдельно. Аналогично [8] введем следующие обозначения: $I = [\alpha_1, \alpha_2]$, $I_0 = [\alpha_2/(1+2\alpha_2), \alpha_2]$, $x = (r,\omega,\alpha) \in X = G \times \Omega \times I$, $X_0 = G \times \Omega \times I_0$, $L_{r,\omega} = \{r + \omega t : t \geq 0\}$ — луч, исходящий из точки r в направлении ω; $d(r,\omega)$ — расстояние от точки $r \in \overline{G}$ до границы $\partial G = \overline{G}\backslash G$ в направлении ω: $d(r,\omega) = \mathrm{mes}_1(L_{r,\omega} \cap \overline{G})$, где mes_1 — мера Лебега множества на прямой. Будем предполагать, что $\partial G \in C^1$. Согласно [8] функция $d(r,\omega)$ принадлежит $C(\overline{G} \times \Omega)$. Рассмотрим также множества

$$\Gamma^-_\omega = \{r \in \partial G : L_{r,\omega} \cap G \neq \varnothing\}, \quad \Gamma^- = \{(r,\omega,\alpha) \in \partial G \times \Omega \times I : r \in \Gamma^-_\omega\}.$$

В точках множества Γ^-_ω излучение в направлении ω «входит» в среду G. К уравнению (2.1) присоединим граничное условие

$$f(\xi,\omega,\alpha) = h(\xi,\omega,\alpha), \quad (\xi,\omega,\alpha) \in \Gamma^-. \quad (2.2)$$

Обозначим через $C(Y)$ пространство функций, непрерывных на множестве Y, с конечной нормой $\|\varphi\|_{C(Y)} = \sup\limits_{y\in Y} |\varphi(y)|$. В дальнейшем будем предполагать, что функции μ, σ, J, h неотрицательны, $\mu(r,\alpha) \in C(\overline{G} \times I)$, $J(x) \in C(\overline{X})$, $h(\xi,\omega,\alpha) \in C(\overline{\Gamma^-})$, $\sigma(r,\omega\omega',\alpha,\alpha') \in C(\overline{X} \times \Omega \times I)$. Для краткости введем следующие обозначения:

$$lf(r,\omega,\alpha) = \frac{d}{dt} f(r + t\omega,\omega,\alpha)\Big|_{t=0} + \mu(r,\alpha) f(r,\omega,\alpha);$$

$$N(r,\omega,\alpha) = \int\limits_{\Omega_{\omega,\alpha}} \frac{1}{q^2}\sigma(r,\omega\omega',\alpha,\alpha',1/q) f(r,\omega',1/q) d\omega', \quad \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{1+\alpha(\omega\omega'-1)};$$

$$P(x) = N(x) + J(x);$$

Определение. Функцию $f(x)$ будем называть *решением задачи* (2.1), (2.2), если $f(x) \in C(\overline{X})$ и для всех точек $(\xi,\omega,\alpha) \in \Gamma^-$ функция $f(\xi + t\omega,\omega,\alpha)$

(1) абсолютно непрерывна по $t \in [0, d(\xi,\omega)]$ и дифференцируема по $t \in (0, d(\xi,\omega))$;

(2) при $t = 0$ удовлетворяет условию (2.2);

(3) на множестве $\{\xi + t\omega : t \in (0, d(\xi,\omega))\}$ удовлетворяет уравнению

$$lf(\xi + t\omega,\omega,\alpha) = N(\xi + t\omega,\omega,\alpha) + J(\xi + t\omega,\omega,\alpha).$$

Рассмотрим функции

$$\tau(r,\omega,\alpha,t)=\int\limits_0^t \mu(r-t'\omega,\alpha)\,dt',\quad \tau(r,\omega,\alpha)=\int\limits_0^{d(r,-\omega)} \mu(r-t'\omega,\alpha)\,dt'$$

— оптические расстояния между точкой r и $r-t\omega$, $r-d(r,-\omega)\omega$ соответственно.

Представим теперь задачу (2.1), (2.2) в эквивалентной форме.

Лемма 1. *Для того чтобы функция $f(x)$ была решением задачи* (2.1), (2.2), *необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ для всех $x\in X$ удовлетворяла уравнению*

$$f(r,\omega,\alpha)=h(r-d(r,-\omega)\omega,\omega,\alpha)\exp(-\tau(r,\omega,\alpha)) + \int\limits_0^{d(r,-\omega)} \exp(-\tau(r,\omega,\alpha,t))P(r-t\omega,\omega,\alpha)\,dt \tag{2.3}$$

в классе $C(\overline{X})$.

Доказательство. Для доказательства этой леммы используем прием, предложенный в [8], для обоснования подобного результата.

Необходимость. Пусть $f(x)$ является решением задачи (2.1), (2.2). Тогда для любых $x\in X$

$$lf(r-t\omega,\omega,\alpha)=P(r-t\omega,\omega,\alpha). \tag{2.4}$$

Так как функция $f(r-t\omega,\omega,\alpha)$ абсолютно непрерывна по $t\in[0,d(\xi,\omega)]$, то $lf(r-t\omega,\omega,\alpha)$ интегрируема по t. Умножим равенство (2.4) на $\exp(-\tau(r,\omega,\alpha,t))$ и проинтегрируем по $t\in[0,d(r,-\omega)]$:

$$\int\limits_0^{d(r,-\omega)} \exp(-\tau(r,\omega,\alpha,t))lf(r-t\omega,\omega,\alpha)\,dt=\int\limits_0^{d(r,-\omega)} \exp(-\tau(r,\omega,\alpha,t))P(r-t\omega,\omega,\alpha)\,dt. \tag{2.5}$$

Поскольку $\tau(r,\omega,\alpha,t)$ абсолютно непрерывна по t, а $lf(r-t\omega,\omega,\alpha)$ — интегрируемая функция, к левой части (2.5) можно применить формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_0^{d(r,-\omega)} \exp(-\tau(r,\omega,\alpha,t))lf(r-t\omega,\omega,\alpha)\,dt$$
$$=f(r,\omega,\alpha)-f(r-d(r,-\omega)\omega,\omega,\alpha)\cdot\exp(-\tau(r,\omega,\alpha))$$
$$-\int\limits_0^{d(r,-\omega)} \exp(-\tau(r,\omega,\alpha,t))(-\mu(r-t\omega,\alpha)f(r-t\omega,\omega,\alpha)+\mu(r-t\omega,\alpha)f(r-t\omega,\omega,\alpha))\,dt.$$

Отсюда с учетом граничного условия (2.2) получим

$$\int\limits_0^{d(r,-\omega)} \exp(-\tau(r,\omega,\alpha,t))P(r-t\omega,\omega,\alpha)\,dt$$
$$=f(r,\omega,\alpha)-h(r-d(r,-\omega)\omega,\omega,\alpha)\exp(-\tau(r,\omega,\alpha)).$$

Таким образом, если функция $f(r,\omega,\alpha)$ является решением задачи (2.1), (2.2), то эта функция удовлетворяет условию (2.3). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть функция $f(x)\in C(\overline{X})$ удовлетворяет уравнению (2.3). Тогда для любых $(\xi,\omega,\alpha)\in\Gamma^-$ из этого уравнения с учетом равенства $d(\xi+t\omega,-\omega)=t$ имеем

$$f(\xi+t\omega,\omega,\alpha)=\exp(-\tau(\xi,-\omega,\alpha,t))\Biggl(h(\xi,\omega,\alpha)+\int\limits_0^t\exp(\tau(\xi,-\omega,\alpha,t'))P(\xi+t'\omega,\omega,\alpha)dt'\Biggr). \quad (2.6)$$

Неопределенный интеграл от интегрируемой по t функции — абсолютно непрерывная функция, сумма и произведение абсолютно непрерывных функций также абсолютно непрерывны. Поэтому из (2.6) следует, что $f(\xi+t\omega,\omega,\alpha)$ абсолютно непрерывна по $t\in[0,d(\xi,\omega)]$. Кроме того, $f(x)\in C(\overline{X})$, следовательно, $P(\xi+t'\omega,\omega,\alpha)\in C(\overline{X})$, и представление (2.6) означает, что $f(\xi+t\omega,\omega,\alpha)$ дифференцируема по $t\in(0,d(\xi,\omega))$. При $t=0$ функция $f(\xi+t\omega,\omega,\alpha)$ удовлетворяет краевому условию (2.2). Преобразуем равенство (2.6):

$$\begin{aligned}lf(\xi+t\omega,\omega,\alpha)&=-\mu(\xi+t\omega,\alpha)\exp(-\tau(\xi,-\omega,\alpha,t))(h(\xi,\omega,\alpha)\\&\quad+\int\limits_0^t\exp(\tau(\xi,-\omega,\alpha,t'))P(\xi+t'\omega,\omega,\alpha)\,dt')\\&\quad+\exp(-\tau(\xi,-\omega,\alpha,t))\exp(\tau(\xi,-\omega,\alpha,t))P(\xi+t\omega,\omega,\alpha)\\&\quad+\mu(\xi+t\omega,\alpha)\exp(-\tau(\xi,-\omega,\alpha,t))\\&\quad\times\Biggl(h(\xi,\omega,\alpha)+\int\limits_0^t\exp(\tau(\xi,-\omega,\alpha,t'))P(\xi+t'\omega,\omega,\alpha)\,dt'\Biggr)=P(\xi+t\omega,\omega,\alpha).\end{aligned}$$

Таким образом, $f(x)\in C(\overline{X})$, является решением уравнения (2.3) и удовлетворяет условиям (1)–(3), т. е. будет решением краевой задачи (2.1), (2.2). Лемма доказана.

Отметим следующее простое свойство переменной $1/q$.

Лемма 2. *Если $\alpha\le\beta$, $\omega'\in\Omega_{\omega,\alpha}$, то $1/q\in[\alpha,\beta]$.*

Доказательство. Поскольку $\Omega_{\omega,\alpha}=\{\omega'\in\Omega:\omega\omega'\ge 1-1/\alpha+1/\beta\}$, имеем следующие оценки:

$$q=1/\alpha+(\omega\omega'-1)\le 1/\alpha,\quad q\ge 1/\alpha+1-1/\alpha+1/\beta-1=1/\beta,$$

т. е. $1/\beta\le q\le 1/\alpha$, $\alpha\le 1/q\le\beta$. Лемма доказана.

Рассмотрим линейные интегральные выражения:

$$\begin{aligned}(A\varphi)(r,\omega,\alpha)&=\int\limits_0^{d(r,-\omega)}\exp(-\tau(r,\omega,\alpha,t))\varphi(r-t\omega,\omega,\alpha)\,dt,\\(S\varphi)(r,\omega,\alpha)&=\int\limits_{\Omega_{\omega,\alpha}}\frac{1}{q^2}\sigma(r,\omega\omega',\alpha,1/q)\varphi(r,\omega',1/q)\,d\omega',\end{aligned}\quad (2.7)$$

$1/q = \alpha/(1+\alpha(\omega\omega'-1))$. Равенства (2.7) определяют линейные операторы, действующие из пространства $C(\overline{X})$ в $C(\overline{X})$. Кроме того, сужения этих операторов на пространство $C(\overline{X}_0)$ также являются линейными операторами, действующими из $C(\overline{X}_0)$ в $C(\overline{X}_0)$. Действительно, полагая в лемме 2 $\beta = \alpha_2$, получим, что если $\omega' \in \Omega_{\omega,\alpha}$, то $1/q \in [\alpha, \alpha_2]$. Поэтому подынтегральное выражение в (2.7) определено для любой функции $\varphi(x) \in C(\overline{X}_0)$ и принадлежит $C(\overline{X}_0)$. Теперь уравнение (2.3) можно представить в виде

$$f(x) = f_0(x) + (ASf)(x), \quad x \in X, \tag{2.8}$$

где $f_0(x) = h(r - d(r,-\omega)\omega, \omega, \alpha)\exp(-\tau(r,\omega,\alpha)) + (AJ)(r,\omega,\alpha)$.

Для доказательства разрешимости и единственности решения задачи (2.1), (2.2) достаточно доказать существование и единственность решения операторного уравнения (2.8) в классе $C(\overline{X})$. Прежде чем перейти к доказательству этого факта, исследуем вспомогательную задачу. Рассмотрим пространство $C(\overline{X}_\varepsilon)$, где $\overline{X}_\varepsilon = \overline{G} \times \Omega \times I_\varepsilon$ и множество $I_\varepsilon = [a,b]$ таково, что

$$|1/a - 1/b| < \varepsilon. \tag{2.9}$$

Пусть требуется найти функцию $f \in C(\overline{X}_\varepsilon)$, удовлетворяющую уравнению

$$f(x) = (AS_\varepsilon f)(x) + F(x), \quad x \in X_\varepsilon, \tag{2.10}$$

где $F(x) \in C(\overline{X}_\varepsilon)$ — известная функция,

$$(S_\varepsilon f)(x) = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \frac{1}{q^2}\sigma(r,\omega\omega',\alpha,1/q)\varphi(r,\omega',1/q)\,d\omega',$$

$$\Omega^\varepsilon = \{\omega' \in \Omega : \omega\omega' \geq 1 - 1/\alpha + 1/\beta\}, \quad 1/q = \alpha/(1+\alpha(\omega\omega'-1)).$$

В дальнейшем будем обозначать эту задачу символом (1_ε). Пусть также

$$R = \sup_{(x,\omega')\in\overline{X}\times\Omega} |\sigma(r,\omega\omega',\alpha,\alpha/(1+\alpha(\omega\omega'-1)))|, \quad d = \operatorname{diam} G.$$

Покажем разрешимость задачи (1_ε) для достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Теорема 1. *Если $\varepsilon < \min\{1/(4\pi R d b^2), 2\}$, то существует единственное решение задачи (1_ε).*

Доказательство. Достаточно показать, что уравнение (2.10) имеет единственное решение в классе $C(\overline{X}_\varepsilon)$. Для этого рассмотрим сужения операторов A, S на пространство $C(\overline{X}_\varepsilon)$. Поскольку $\alpha \in [a,b]$, в силу леммы 2 $1/q \in [\alpha, b] \subseteq [a,b]$. Поэтому данные операторы являются линейными операторами, действующими из $C(\overline{X}_\varepsilon)$ в $C(\overline{X}_\varepsilon)$. Отметим также, что из условий $\varepsilon < 2$, $1/a - 1/b < \varepsilon$ следует, что $1 - 1/\alpha + 1/\beta > -1$. Поэтому $\operatorname{mes}\Omega^\varepsilon = 2\pi(1/\alpha - 1/\beta)$. Покажем теперь, что имеет место оценка

$$\|AS_\varepsilon f\|_{C(\overline{X}_\varepsilon)} \leq g\|f\|_{C(\overline{X}_\varepsilon)}, \quad g = \text{const} < 1,$$

для любых $f \in C(\overline{X}_\varepsilon)$. В силу принципа сжимающих отображений с учетом линейности операторов A, S_ε эта оценка гарантирует существование и единственность решения задачи (1_ε). Обозначим $(S_\varepsilon f)(r,\omega,\alpha) = \Phi(r,\omega,\alpha)$. Учитывая предположение на $\sigma(r,\omega\omega',\alpha,\alpha')$, получаем

$$\|AS_\varepsilon f\| = \sup_{x\in\overline{X}_\varepsilon}|AS_\varepsilon f| = \sup_{x\in\overline{X}_\varepsilon}\left|\int\limits_0^{d(r,-\omega)} \exp(-\tau(r,\omega,\alpha,t))\Phi(r-t\omega,\omega,\alpha)\,dt\right|$$
$$\le d\sup_{x\in\overline{X}_\varepsilon}|\Phi(r,\omega,\alpha)| \le d\sup_{x\in\overline{X}_\varepsilon}\int\limits_{\Omega_{\omega,\alpha}}|\sigma(r,\omega\omega',\alpha,1/q)1/q^2 f(r,\omega,1/q)|\,d\omega'$$
$$\le d\sup_{x\in\overline{X}_\varepsilon}\sup_{\omega'\in\Omega_{\omega,\alpha}}\frac{1}{q^2}|\sigma(r,\omega\omega',\alpha,1/q)f(r,\omega',1/g)|\operatorname{mes}\Omega_{\omega,\alpha}$$
$$\le dR\sup_{x\in\overline{X}_\varepsilon}\sup_{\omega'\in\Omega^\varepsilon}\frac{1}{q^2}|f(r,\omega',1/q)|2\pi(1/\alpha-1/\beta).$$

Как отмечено выше, $1/q\in[\alpha,\beta]$ для любых $\omega'\in\Omega^\varepsilon$. Поэтому

$$\sup_{\omega'\in\Omega^\varepsilon}|f(r,\omega',1/q)| \le \sup_{\alpha\in I_\varepsilon}\sup_{\omega'\in\Omega}|f(r,\omega',\alpha)|,$$

т. е.

$$\sup_{x\in\overline{X}_\varepsilon}\sup_{\omega'\in\Omega^\varepsilon}|f(r,\omega',1/q)| \le \sup_{x\in\overline{X}_\varepsilon}|f(r,\omega',\alpha)| = \|f\|_{C(\overline{X}_\varepsilon)}. \tag{2.11}$$

Кроме того,

$$1/q^2\le b^2,\quad 1/\alpha-1/b\le 1/a-1/b<\varepsilon<\min\{1/(2\pi Rdb^2),2\}.$$

Следовательно,

$$\|AS_\varepsilon f\|_{C(\overline{X}_\varepsilon)} < 2\pi dRb^2\min\{1/(4\pi b^2dR),2\}\|f\|_{C(\overline{X}_\varepsilon)}$$
$$=\min\{1/2,4\pi dRb^2\}\|f\|_{C(\overline{X}_\varepsilon)}\le\|f\|_{C(\overline{X}_\varepsilon)}/2. \tag{2.12}$$

Полученная оценка завершает доказательство теоремы 1.

Замечание 1. Неравенство $1/a-1/b<\varepsilon$, в частности, будет выполнено, если $|b-a|<\varepsilon a^2$.

В следующей теореме показаны разрешимость и единственность решения задачи (2.1), (2.2) для $\alpha\in[\alpha_2/(2\alpha_2+1),\alpha_2]$.

Теорема 2. *Краевая задача* (2.1), (2.2) *имеет на множестве* X_0 *единственное решение.*

Доказательство. Разобьем интервал $[\alpha_2/(1+2\alpha_2),\alpha_2]$ на n частей $[\beta_i-\Delta,\beta_i]$, где $\beta_n=\alpha_2$, $\beta_0=\alpha_2/(1+2\alpha_2)$, так, чтобы $\Delta<\varepsilon(\alpha_2/(1+2\alpha_2))^2$. Тогда, учитывая замечание 1, имеем $|1/(\beta_i-\Delta)-1/\beta_i|<\varepsilon$ для всех $i=\overline{1,n}$. Поскольку $\alpha_2/(2\alpha_2+1)>0$, число n конечно. Обозначим $\beta_{i-1}=\beta_i-\Delta$ и рассмотрим произвольное $\alpha\in[\beta_{i-1},\beta_i]$. Определим для всех $j=\overline{i,n}$ линейное интегральное выражение

$$S_j\varphi=\int\limits_{\Omega^j_{\omega,\alpha}}\sigma(r,\omega\omega',\alpha,\alpha')\varphi(r,\omega',\alpha/(1+\alpha(\omega\omega'-1)))\,d\omega', \tag{2.13}$$

где $\Omega^j_{\omega,\alpha}$ определяется так:

$$\Omega^j_{\omega,\alpha}=\begin{cases}\{\omega'\in\Omega: 1-\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta_j}\le\omega\omega'<1-\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta_{j-1}}\}, & \text{если}\quad j=\overline{i+1,n},\\ \{\omega'\in\Omega:\omega\omega'\ge 1-\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta_j}\}, & \text{если}\quad j=i.\end{cases} \tag{2.14}$$

Из определения $\Omega^j_{\omega,\alpha}$ следует, что если $\alpha \in [\beta_{i-1}, \beta_i]$, то определенное ранее множество $\Omega_{\omega,\alpha}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}\Omega_{\omega,\alpha} &= \{\omega' \in \Omega : \omega\omega' \geq 1 - 1/\alpha + 1/\alpha_2\} = \{\omega' \in \Omega : \omega\omega' \geq 1 - 1/\alpha + 1/\beta_n\} \\ &= \{\omega' \in \Omega : 1 - 1/\alpha + 1/\beta_n \leq \omega\omega' < 1 - 1/\alpha + 1/\beta_{n-1}\} \\ &\bigcup \{\omega' \in \Omega : 1 - 1/\alpha + 1/\beta_{n-1} \leq \omega\omega' < 1 - 1/\alpha + 1/\beta_{n-2}\} \\ &\qquad \ldots \bigcup \{\omega' \in \Omega : \omega\omega' \geq 1 - 1/\alpha + 1/\beta_i\} = \bigcup_{j=i}^{n} \Omega^j_{\omega,\alpha}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Учитывая (2.13), имеем

$$\begin{aligned}(Sf)(x) &= \int\limits_{\Omega_{\omega,\alpha}} \frac{1}{q^2}\sigma(r, \omega\omega', \alpha, 1/q) f(r, \omega', 1/q)\, d\omega' \\ &= \sum_{j=i}^{n} \int\limits_{\Omega^j_{\omega,\alpha}} \frac{1}{q^2}\sigma(r, \omega\omega', \alpha, 1/q) f(r, \omega', 1/q)\, d\omega' = \sum_{j=i}^{n} (S_j f)(x).\end{aligned}$$

Отсюда

$$(ASf)(x) = \sum_{j=i}^{n} (AS_j f)(x). \tag{2.16}$$

Отметим, что если $\omega' \in \Omega^j_{\omega,\alpha}$, то $\beta_{j-1} \leq 1/q \leq \beta_j$. Действительно, из определения $\Omega^j_{\omega,\alpha}$ получим

$$-1/\alpha + 1/\beta_j \leq \omega\omega' - 1 \leq -1/\alpha + 1/\beta_{j-1}, \quad \alpha/\beta_j \leq 1 + \alpha(\omega\omega' - 1) \leq \alpha/\beta_{j-1},$$
$$\beta_{j-1} \leq \frac{\alpha}{1 + \alpha(\omega\omega' - 1)} \leq \beta_j, \quad \beta_{j-1} \leq \frac{1}{q} \leq \beta_j.$$

Таким образом, выражение $S_j\varphi$ определено, в частности, для любой функции $\varphi \in C(\overline{X}_j)$, $X_j = G \times \Omega \times [\beta_{j-1}, \beta_j]$. Положим $\varepsilon = 1/(4\pi R d\alpha_2^2)$, $I_\varepsilon = I_i = [\beta_{i-1}, \beta_i]$. Определим функции $\{f_i\}$, $i = \overline{1, n}$, следующим образом. Пусть $f_i \in C(\overline{X}_i)$, $X_i = G \times \Omega \times I_i$, является решением уравнения

$$f_i(x) = (AS_i f_i)(x) + F_i(x), \quad x \in X_i,$$

где

$$F_n(x) = f_0(x), \quad F_i(x) = f_0(x) + \sum_{j=i+1}^{n} (AS_j f_j)(x), \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Такие функции действительно могут быть построены: в силу теоремы 1 существует единственная функция $f_n \in C(\overline{X}_n)$, являющаяся решением уравнения

$$f_n(x) = (ASf_n)(x) + F_n(x), \quad x \in X_n.$$

Функция $f_n(x)$ принадлежит $C(\overline{X}_n)$ — как указано выше, этого достаточно для определения выражения $(S_n f_n)(x)$. Поэтому также вследствие теоремы 1 существует единственная функция $f_{n-1} \in C(\overline{X}_{n-1})$, которая является решением уравнения

$$f_{n-1}(x) = (ASf_{n-1})(x) + F_{n-1}(x), \quad x \in X_{n-1},$$

где $F_{n-1}(x) = f_0(x) + (AS_n f_n)(x)$ — известная функция. Предположим теперь, что функции $f_n, \dots, f_{i+1}$ построены. Поскольку $f_j \in C(\overline{X}_j)$, $j = \overline{i+1, n}$, $X_j = G \times \Omega \times [\beta_{j-1}, \beta_j]$, выражения $S_j f_j$ также определены. Поэтому функция $f_i \in C(\overline{X}_i)$ определяется как решение уравнения

$$f_i(x) = (AS_i f_i)(x) + (AS_{i+1} f_{i+1})(x) + \ldots + (AS_n f_n)(x) + f_0(x) = (AS_i f_i)(x) + F_i(x).$$

Оно существует и единственно в силу теоремы 1. Так определяется f_i для любого $i = \overline{1, n}$.

Определим теперь функцию $\tilde{f}(x)$, $x \in X_0$, следующим образом:

$$\tilde{f}(r, \omega, \alpha) = \begin{cases} f_i(r, \omega, \alpha), & \text{если} \quad \alpha \in (\beta_{i-1}, \beta_i],\ i = \overline{2, n}, \\ f_1(r, \omega, \alpha), & \text{если} \quad \alpha \in [\beta_0, \beta_1]. \end{cases} \tag{2.17}$$

Эта функция непрерывна по переменным $r \in G$, $\omega \in \Omega$ и кусочно-непрерывна по $\alpha \in I$, причем число возможных точек разрыва этой функции не превосходит n. Отметим, что введенный ранее оператор S определен также и для кусочно-непрерывных функций, в частности, для $\tilde{f}(r, \omega, \alpha)$. Покажем, что эта функция удовлетворяет уравнению (2.8). Рассмотрим произвольное $\alpha \in I_0$. Пусть $\alpha \in (\beta_{i-1}, \beta_i]$. Из равенств (2.16) следует, что уравнение (2.8) можно переписать в виде

$$\tilde{f}(x) = \sum_{j=i}^{n} (AS_j \tilde{f})(x) + f_0(x),$$

или с учетом (2.17)

$$f_i(x) = (AS_i f_i)(x) + \sum_{j=i+1}^{n} (AS_j f_j)(x) + f_0(x) = (AS_i f_i)(x) + F_i(x). \tag{2.18}$$

Функция $f_i(x)$ — решение (2.18) по определению. С другой стороны, равенство (2.18) можно преобразовать к виду (2.8). Таким образом, $\tilde{f}(x)$ действительно удовлетворяет этому уравнению.

Покажем, что эта функция непрерывна по $\alpha \in [\alpha_2/(2\alpha_2 + 1), \alpha_2]$. Пусть сначала $\alpha \in (\beta_{n-2}, \beta_n]$. Единственной возможной точкой разрыва функции $\tilde{f}(x)$ на этом множестве является $\alpha = \beta_{n-1}$. Покажем теперь, что

$$f_n(r, \omega, \beta_{n-1}) = f_{n-1}(r, \omega, \beta_{n-1}). \tag{2.19}$$

В силу единственности функций f_n, f_{n-1} и их непрерывности на множествах $\overline{X}_n$, $\overline{X}_{n-1}$ соответственно это будет означать, что $\tilde{f}(x)$ непрерывна по $\alpha \in (\beta_{n-2}, \beta_n]$. Равенство (2.19) действительно имеет место, поскольку $f_n(r, \omega, \beta_{n-1})$ и $f_{n-1}(r, \omega, \beta_{n-1})$ определяются равенствами

$$f_n(r, \omega, \beta_{n-1}) = (AS_n f_n)(r, \omega, \beta_{n-1}) + f_0(r, \omega, \beta_{n-1}),$$

$$\begin{aligned} f_{n-1}(r, \omega, \beta_{n-1}) &= (AS_{n-1} f_{n-1})(r, \omega, \beta_{n-1}) + F_{n-1}(r, \omega, \beta_{n-1}) \\ &= (AS_{n-1} f_{n-1})(r, \omega, \beta_{n-1}) + f_0(r, \omega, \beta_{n-1}) + (AS_n f_n)(r, \omega, \beta_{n-1}). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Но из (2.14) следует, что

$$\begin{aligned} \Omega^{n-1}_{\omega, \alpha_{n-1}} &= \{\omega' \in \Omega : \omega\omega' \geq 1 - 1/\alpha_{n-1} + 1/\alpha_{n-1}\} \\ &= \{\omega' \in \Omega : \omega\omega' \geq 1\} = \{\omega' \in \Omega : \omega\omega' = 1\}, \end{aligned}$$

т. е. при фиксированном направлении $\omega \in \Omega$ существует единственное направление $\omega' \in \Omega^{n-1}_{\omega,\alpha_{n-1}}$, и $\operatorname{mes}\Omega^{n-1}_{\omega,\alpha_{n-1}} = 0$. Поэтому $(AS_{n-1}f_{n-1})(r,\omega,\beta_{n-1}) = 0$, а равенство (2.20) принимает вид

$$f_{n-1}(r,\omega,\beta_{n-1}) = (AS_n f_n)(r,\omega,\beta_{n-1}) + f_0(r,\omega,\beta_{n-1}) = f_n(r,\omega,\beta_{n-1}).$$

Соотношение (2.19) доказано. Следовательно, $\tilde f(r,\omega,\alpha)$, определяемая равенством (2.17), непрерывна на множестве $\overline{G}\times\Omega\times(\beta_{n-2},\beta_n]$. Рассуждая далее так же, получим, что $\tilde f(r,\omega,\alpha)$ непрерывна на множестве $\overline{G}\times\Omega\times(\beta_0,\beta_n]$, т. е. $\tilde f(r,\omega,\alpha)\in C(\overline{X}_0)$. В силу леммы 1 эта функция обладает свойствами (1)–(3) и поэтому будет решением краевой задачи (2.1), (2.2).

Докажем теперь единственность этого решения. Предположим что $f_1 \in C(\overline{X}_0)$, $f_2 \in C(\overline{X}_0)$ — решения задачи (2.1), (2.2).

Рассмотрим $\bar f = f_1 - f_2$. Очевидно,

$$f_1 = f_2, \quad \text{если } \alpha \in (\beta_{n-1},\beta_n]. \tag{2.21}$$

Следовательно, $AS_n f_1 = AS_n f_2$. Пусть теперь $\alpha \in (\beta_{n-2},\beta_{n-1}]$. Тогда ввиду (2.15)

$$\bar f = f_1 - f_2 = AS(f_1-f_2) = AS_{n-1}(f_1-f_2) + AS_n(f_1-f_2) = AS_{n-1}(f_1-f_2). \tag{2.22}$$

Полагая в теореме 1 $a = \beta_{n-1}, b = \beta_{n-1}$, получим, что $AS_{n-1} = AS_\varepsilon$. Так как $|1/\beta_{n-2} - 1/\beta_{n-1}| < \varepsilon$, оценка (2.12) имеет место для функции $f \in C(\overline{X}_{n-1})$: $\|\bar f\|_{C(\overline{X}_{n-1})} \le 0.5\|\bar f\|_{C(\overline{X}_{n-1})}$, т. е. $\bar f = 0$ для $\alpha \in (\beta_{n-2},\beta_{n-1}]$. Вообще, поскольку $|1/\beta_{i-1} - 1/\beta_i| < \varepsilon$, полагая в теореме 1 $a = \beta_{i-1}$, $b = \beta_i$ и учитывая, что в этом случае $AS_i = AS_\varepsilon$, приходим к оценке $\|\bar f\|_{C(\overline{X}_i)} \le 0.5\|\bar f\|_{C(\overline{X}_i)}$. Рассматривая последовательно $i = n, n-1, \dots 1$, получим, что $\bar f = 0$ на множестве $\overline{G}\times\Omega\times[\alpha_2/(2\alpha_2+1),\alpha_2]$, и решение задачи (2.1), (2.2) на множестве $\overline{X_0}$ единственно. Теорема доказана.

Теперь докажем существование и единственность решения краевой задачи (2.1), (2.2) на множестве $X = G\times\Omega\times[\alpha_1,\alpha_2]$. Для этого построим сначала решение $g(r,\omega,\alpha)$ этой задачи на множестве $G\times\Omega\times[\alpha_1,\alpha_2/(1+2\alpha_2)]$. Определяя далее $f(r,\omega,\alpha)$ равенствами

$$f(r,\omega,\alpha) = \begin{cases} g(r,\omega,\alpha), & \alpha \in [\alpha_1,\alpha_2/(1+2\alpha_2)], \\ \tilde f(r,\omega,\alpha), & \alpha \in (\alpha_2/(1+2\alpha_2),\alpha_2], \end{cases}$$

покажем, что эта функция является решением краевой задачи (2.1), (2.2).

Теорема 3. *Краевая задача* (2.1), (2.2) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Предположим сначала, что $\alpha \in [\alpha_1,\alpha_2/(1+2\alpha_2)]$. В этом случае $-1/\alpha + 1/\alpha_2 < -2$, и неравенство $\omega\omega' \ge 1 - 1/\alpha + 1/\alpha_2$ справедливо для любых направлений $\omega' \in \Omega$ при фиксированных ω, α. Тем самым $\Omega_{\omega,\alpha} = \Omega$, а уравнение (1.3) примет вид

$$\omega\nabla_r f(r,\omega,\alpha) + \mu(r,\alpha)f(r,\omega,\alpha)\int\limits_\Omega \frac{1}{q^2}\sigma(r,\omega\omega',\alpha,1/q)f(r,\omega',1/q)\,d\omega + J(r,\omega,\alpha), \tag{2.23}$$

$1/q = \alpha/(1+\alpha(\omega\omega'-1))$. Выясним, как изменяется переменная $1/q$, если ω фиксировано, а $\omega' \in \Omega$. Поскольку $\omega\omega' = \cos\psi$, то

$$-2 \le \omega\omega' - 1 \le 0, \quad 1 - 2\alpha \le 1 + \alpha(\omega\omega') \le 1, \quad \alpha \le \frac{\alpha}{1+\alpha(\omega\omega'-1)} \le \frac{\alpha}{1-2\alpha}.$$

Таким образом, $1/q \in [\alpha, \alpha/(1-2\alpha)]$. Отметим, что если α достаточно близко к $\alpha_2/(1+2\alpha_2)$, то $\alpha/(1-2\alpha) \geq \alpha_2/(1+2\alpha_2)$. Более точно, если $\alpha_2/(1+2\alpha_2) \geq \alpha \geq \alpha_2/(1+4\alpha_2)$, то $\alpha/(1-2\alpha \geq \alpha_2/(1+2\alpha_2)$. Действительно,

$$0 < \frac{1}{1+2\alpha_2} < 1-2\alpha \leq 1 - \frac{2\alpha_2}{1+4\alpha_2},$$

т. е.

$$\frac{\alpha}{1-2\alpha} \geq \frac{1+4\alpha_2}{1+2\alpha_2} \cdot \frac{\alpha_2}{1+4\alpha} = \frac{\alpha_2}{1+2\alpha}.$$

Поэтому если $\alpha \in [\alpha_2/(1+4\alpha_2), \alpha_2/(1+2\alpha_2)]$, то интегральное слагаемое в (2.23) можно представить в виде

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\Omega} \frac{1}{q^2}\sigma(r, \omega\omega', \alpha, 1/q) f(r, \omega', 1/q)\, d\omega' \\ &= \int\limits_{\Omega_1} \frac{1}{q^2}\sigma(r, \omega\omega', \alpha, 1/q) f(r, \omega', 1/q)\, d\omega' + \int\limits_{\Omega_2} \frac{1}{q^2}\sigma(r, \omega\omega', \alpha, 1/q) f(r, \omega', 1/q)\, d\omega',\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \{\omega' \in \Omega : \omega\omega' > 1 - 1/\alpha + (1+2\alpha_2)/\alpha_2\}, \\ \Omega_2 &= \{\omega' \in \Omega : \omega\omega' \leq 1 - 1/\alpha + (1+2\alpha_2)/\alpha_2\}.\end{aligned}$$

Поскольку $q = 1/\alpha + \omega\omega' - 1$, из определения множеств Ω_1, Ω_2 и неравенств $-2 + 1/\alpha \leq \omega\omega' - 1 + 1/\alpha \leq 1/\alpha$ вытекает, что

$$\begin{aligned}\alpha \leq \frac{1}{q} &< \frac{\alpha_2}{1+2\alpha_2}, \quad \text{если } \omega' \in \Omega_1, \\ \frac{\alpha_2}{1+2\alpha_2} \leq \frac{1}{q} &< \frac{\alpha}{1-2\alpha}, \quad \text{если } \omega' \in \Omega_2.\end{aligned} \tag{2.24}$$

Из оценок (2.24) следует, что выражение

$$\int\limits_{\Omega_2} \frac{1}{q^2}\sigma(r, \omega\omega', \alpha, 1/q) \tilde{f}(r, \omega', 1/q)\, d\omega',$$

где $\tilde{f}(r, \omega', 1/q)$ — определенное в теореме 2 решение краевой задачи (2.1), (2.2), является известной функцией. Рассмотрим теперь на множестве $X_1 = G \times \Omega \times [\alpha_2/(1+4\alpha_2), \alpha_2/(1+2\alpha_2)]$ следующее уравнение:

$$\begin{aligned}&\omega\nabla_r f_{n+1}(r, \omega, \alpha) + \mu(r, \alpha) f_{n+1}(r, \omega, \alpha) \\ &\qquad = \int\limits_{\Omega_1} \frac{1}{q^2}\sigma(r, \omega\omega', \alpha, 1/q) f_{n+1}(r, \omega', 1/q)\, d\omega + F(r, \omega, \alpha),\end{aligned} \tag{2.25}$$

где

$$F(r, \omega, \alpha) = J(r, \omega, \alpha) + \int\limits_{\Omega_2} \frac{1}{q^2}\sigma(r, \omega\omega', \alpha, 1/q) \tilde{f}(r, \omega, \alpha)\, d\omega'.$$

Присоединяя к (2.25) краевое условие (2.2), получим краевую задачу, аналогичную задаче (2.1), (2.2): требуется найти функцию $f_{n+1}(r, \omega, \alpha) \in \overline{X}_1$, удовлетворяющую условиям (1)–(3).

Уравнение (2.25) можно записать также в следующей эквивалентной форме:

$$f = AS_1 f + F, \tag{2.26}$$

где

$$F(r,\omega,\alpha) = f_0(r,\omega,\alpha) + (AS_2 f)(r,\omega,\alpha),$$

$$S_i f = \int\limits_{\Omega_i} \frac{1}{q^2}\sigma(r,\omega\omega',\alpha,1/q) f(r,\omega',1/q)\,d\omega', \quad i = 1,2.$$

Решение ее можно получить, разбивая интервал $[\alpha_2/(1+4\alpha_2), \alpha_2/(1+2\alpha_2)]$ на n частей

$$[\bar\beta_i - \nabla, \bar\beta_i], \quad \bar\beta_n = \alpha_2/(1+2\alpha_2), \quad \bar\beta_0 = \alpha_2/(1+4\alpha_2),$$

так, чтобы $\Delta < \varepsilon(\alpha_2/(1+4\alpha_2))^2$. Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 1, можно построить единственное решение $f_{n+1}(r,\omega,\alpha) \in C(\overline{X}_1)$ краевой задачи (2.1), (2.2). Определим теперь функцию $f(r,\omega,\alpha)$ следующим образом:

$$f(r,\omega,\alpha) = \begin{cases} \tilde f(r,\omega,\alpha), & \text{если} \quad \alpha \in (\alpha_2/(1+2\alpha_2), \alpha_2], \\ f_{n+1}(r,\omega,\alpha), & \text{если} \quad \alpha \in [\alpha_2/(1+4\alpha_2), \alpha_2/(1+2\alpha_2)]. \end{cases}$$

Как и при доказательстве теоремы 2, можно показать, что функция $f(r,\omega,\alpha)$ удовлетворяет уравнению (2.23). Для доказательства непрерывности $f(r,\omega,\alpha)$ на $\overline{X}_2 = \overline{G} \times \Omega \times [\alpha_2/(1+4\alpha_2), \alpha_2]$, покажем, что

$$f_{n+1}(r,\omega,\alpha_2/(1+2\alpha_2)) = \tilde f(r,\omega,\alpha_2/(1+2\alpha_2)).$$

Действительно, если $\alpha = \alpha_2/(1+2\alpha_2)$, то $\Omega_{\omega,\alpha} = \Omega$, $\Omega_1 = \varnothing$, $\Omega_2 = \Omega$. Поэтому

$$\tilde f(r,\omega,\alpha_2/(1+2\alpha_2)), \quad f_{n+1}(r,\omega,\alpha_2/(1+2\alpha_2))$$

удовлетворяют одному и тому же уравнению:

$$\omega\nabla_r f(r,\omega,\alpha_2/(1+2\alpha_2)) + \mu(r,\alpha_2/(1+2\alpha_2)) f(r,\omega,\alpha_2/(1+2\alpha_2))$$
$$= \int\limits_{\Omega} \frac{1}{q^2}\sigma(r,\omega\omega',\alpha_2/(1+2\alpha_2),1/q) f(r,\omega,1/q)\,d\omega' + F(r,\omega,\alpha_2/(1+2\alpha_2))$$

Поскольку $\tilde f(r,\omega,\alpha)$ непрерывна по $\alpha \in [\alpha_2/(1+2\alpha_2), \alpha_2]$, $f_{n+1}(r,\omega,\alpha)$ непрерывна по $\alpha \in [\alpha_2/(1+4\alpha_2), \alpha_2/(1+2\alpha_2)]$, то $f(r,\omega,\alpha)$ непрерывна по $\alpha \in [\alpha_2/(1+4\alpha_2), \alpha_2]$. Покажем, что решение $f(r,\omega,\alpha) \in C(\overline{X}_2)$ задачи (2.1), (2.2) единственно. Предположим, что $f_1 \in C(\overline{X}_2)$, $f_2 \in C(\overline{X}_2)$ — решения задачи. Из единственности решения в классе $C(\overline{X}_2)$ следует, что $f_1(r,\omega,\alpha) = f_2(r,\omega,\alpha)$ для $\alpha \in [\alpha_2/(1+2\alpha_2), \alpha_2]$. Пусть теперь $\alpha < \alpha_2/(1+2\alpha_2)$ и, кроме того, $\alpha \in (\bar\beta_{n-1}\bar\beta_n]$, $\bar\beta_n = \alpha_2/(1+2\alpha_2)$, $1/\bar\beta_{n-1} - 1/\bar\beta_n < \varepsilon$. Тогда обе эти функции удовлетворяют уравнению (2.26), причем

$$\Omega_1 = \left\{\omega\omega' > 1 - \frac{1}{\alpha} + \frac{1+2\alpha_2}{\alpha_2}\right\},$$

$$\operatorname{mes}\Omega_1 = \frac{1}{\alpha} - \frac{1+2\alpha_2}{\alpha_2} \le \frac{1}{\bar\beta_{n-1}} - \frac{1}{\bar\beta_n} < \varepsilon.$$

Функция $\bar f = f_1 - f_2$, следовательно, будет удовлетворять уравнению $\bar f = AS_1\bar f$. Значит, для этой функции справедлива оценка (2.12), полученная при доказательстве теоремы 1:

$$\|\bar f\| = \|AS_1\bar f\| \le 0.5\|\bar f\|,$$

которая и означает, что $f_1 = f_2$ для $\alpha \in (\bar\beta_{n-1}, \bar\beta_n]$ и, следовательно, $f_1 = f_2$ для $\alpha \in (\beta_n, \alpha_2]$. Рассматривая последовательно $\alpha \in (\beta_{i-1}, \beta_i]$, $i = \overline{n-1, 1}$, получим, что $f_1 = f_2$ для $\alpha \in [\alpha_2/(4\alpha_2 + 1), \alpha_2]$ т. е. решение $f(r, \omega, \alpha)$ задачи (2.1), (2.2) единственно в классе $C(\overline{X}_2)$.

Имеет место следующий факт: если

$$\frac{\alpha_2}{1+2m\alpha_2} < \alpha < \frac{\alpha_2}{1+2(m-1)\alpha_2}, \quad m = 2, 3, 4 \dots ,$$

то

$$\frac{\alpha_2}{1+2(m-1)\alpha_2} < \frac{\alpha}{1-2\alpha} < \frac{\alpha_2}{1+2(m-2)\alpha_2}.$$

Действительно,

$$0 < 1 - \frac{\alpha_2}{1+2(m-1)\alpha_2} \le 1 - 2\alpha \le 1 - \frac{2\alpha_2}{1+2m\alpha_2} = \frac{1+2(m-1)\alpha_2}{1+2m\alpha_2},$$

$$\frac{\alpha_2}{1+2(m-1)\alpha_2} \le \frac{\alpha}{1-2\alpha} < \frac{\alpha_2}{1+2(m-2)\alpha_2}.$$

Предположим теперь, что

$$f_{m-1}(r, \omega, \alpha) \in C(\overline{X}_{m-1}), \ X_{m-1} = G \times \Omega \times \left[\frac{\alpha_2}{1+2(m-2)\alpha_2}, \frac{\alpha_2}{1+2(m-1)\alpha_2}\right],$$

является решением задачи (2.1), (2.2). Рассмотрим $\alpha \in [\alpha_2/(1 + 2m\alpha_2), \alpha_2/(1 + 2(m-1)\alpha_2)]$ и уравнение (2.26), в котором $F = f_0 + AS_2\bar f_{m-1}$. Данная функция $F(x)$ известна, поскольку если $\omega' \in \Omega$, то

$$1/q \in [\alpha_2/(1 + 2(m-2)\alpha_2), \alpha_2/(1 + 2(m-1)\alpha_2)].$$

Решение уравнения (2.26) с функцией F существует и единственно в силу теоремы 2, а функция

$$f = \begin{cases} f_{m-1}, & \text{если } \alpha \in (\alpha_2/(1 + 2(m-1)\alpha_2), \alpha_2/(1 + 2(m-2)\alpha_2)], \\ f_m, & \text{если } \alpha \in (\alpha_2/(1 + 2m\alpha_2), \alpha_2/(1 + 2(m-1)\alpha_2)], \end{cases}$$

является непрерывным на множестве $\overline{G} \times \Omega \times (\alpha_2/(1+2m\alpha_2), \alpha_2/(1+2(m-2)\alpha_2)]$ решением задачи (2.1), (2.2). Поскольку $\alpha_2/(1 + 2m\alpha_2) \to 0$ при $m \to \infty$, то существует m_0 такое, что $\alpha_1 \in (\alpha_2/(1+2m_0\alpha_2), \alpha_2/(1+2(m_0-1)\alpha_2)]$. Рассматривая последовательно интервалы $(\alpha_2/(1+2m\alpha_2), \alpha_2/(1+2(m-1)\alpha_2)]$, $m = \overline{1, m_0}$, мы построим единственное решение задачи (2.1), (2.2). Терема доказана.

Таким образом, в работе доказаны три теоремы о существовании и единственности решения краевой задачи (2.1), (2.2). Степень общности утверждений последовательно увеличивается, и каждое из них используется при доказательстве следующих. Последняя, третья теорема применима к любому интервалу энергии $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \infty$. При интерпретации этого результата следует иметь в виду его избыточный характер, поскольку рассеяние по Комптону существенно не для всех энергий фотонов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лейпунский О. И., Новожилов Б. В., Сахаров В. Н.* Распространение гамма-квантов в веществе. М.: Физматгиз, 1960.
2. *Фано У., Спенсер Л., Бергер М.* Перенос гамма излучения. М.: Гос. изд. по атомной науке и технике, 1963.

3. *Михайлов Г. А.* Весовые методы Монте-Карло. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
4. *Hubbell J. H., Seltezer S. M.* Tables of X-ray mass attenuation coefficient and mass energy-absortion coefficient 1 Kev to 20 Mev for elements $z = 1$ to 92 and 48 additional substances of dosimetric interest. NIST, 1995.
5. *Дэвисон Б.* Теория переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1960.
6. *Марчук Г. И., Лебедев В. И.* Численные методы в теории переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1981.
7. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976.
8. *Аниконов Д. С., Ковтанюк А. Е., Прохоров И. В.* Использование уравнения переноса в томографии. М.: Логос, 2000.

Статья поступила 19 июня 2001 г., окончательный вариант — 11 января 2002 г.

Аниконов Дмитрий Сергеевич, *Коновалова Дина Сергеевна*
Институт прикладной математики ДВО РАН, ул. Радио, 7, Владивосток 690041
anik@iam-mail.febras.ru, kds@iam-mail.febras.ru