Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2002. Том 43, № 5

УДК 517.55

СПЕЦИАЛЬНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ ЛОКАЛЬНОГО ВЫЧЕТА

Б. А. Шаимкулов

Аннотация: Получено новое интегральное представление для локального вычета с интегрированием мероморфной m^2-формы по m^2-мерному циклу в $\mathbb{C}^{m^2}$.

Ключевые слова: голоморфное отображение, интегральное представление, вычет

Введение

В алгебраической геометрии широко известно понятие локального вычета Гротендика, ассоциированного с регулярной последовательностью ростков голоморфных функций $f_1, \dots, f_n$ в локальном кольце $\mathscr{O}_a$, $a \in \mathbb{C}^n$ (см. [1, гл. 5]). Такой вычет определяет невырожденное спаривание

$$\operatorname{res}_f : [\mathscr{O}_a / I_a(f)] \otimes [\mathscr{O}_a / I_a(f)] \to \mathbb{C},$$

где $I_a(f)$ — идеал в кольце $\mathscr{O}_a$, порожденный последовательностью $f_1, \dots, f_n$. По-видимому, в работе [2] впервые было получено интегральное представление для локального вычета с интегрированием мероморфной n-формы по n-циклу. Далее, в книге Ф. Гриффитса и Д. Харриса [1] была дана другая интегральная интерпретация для локального вычета в виде $(2n-1)$-мерного интеграла с ядром, аналогичным форме Мартинелли — Бохнера. Доказательство эквивалентности указанных двух интегральных представлений для локального вычета было проведено в [1] на основе техники Майера — Виеториса и изоморфизма Дольбо. Затем А. К. Цихом [3] было предъявлено другое обоснование этой эквивалентности с помощью непосредственной гомотопии циклов интегрирования и принципа непрерывности.

Цель настоящей статьи — дать новое интегральное представление для локального вычета в одной специальной размерности $n = m^2$. В этой размерности ростки отображений $f = (f_1, \dots, f_{m^2}) : \mathbb{C}^{m^2} \to \mathbb{C}^{m^2}$ уместно интерпретировать в виде отображений

$$f = f(z) : \mathbb{C}[m \times m] \to \mathbb{C}[m \times m] \tag{1}$$

пространств $m \times m$-матриц. Наше определение локального вычета использует ядро интегрального представления Хуа — Локена для обобщенного круга в пространстве матриц [4, гл. 4], а обоснование эквивалентности этого и традиционного определений базируется на схеме А. К. Циха [3].

1. Определение локального вычета и основная теорема

Пусть отображение (1) голоморфно в замкнутой окрестности $\overline{U}_a$ и имеет в точке $a \in \mathbb{C}[m \times m]$ изолированный нуль. Для нас переменные z и $f(z)$ — это матрицы $z = (z_{ij})$ и $f(z) = (f_{ij}(z_{ij}))$. Введем следующий m^2-мерный цикл:

$$\Gamma_{f,\varepsilon} = \{z \in U_a : ff^* = \varepsilon^2 I\},$$

где I — единичная $m \times m$-матрица, $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. Ориентацию $\Gamma_{f,\varepsilon}$ зададим условием $\bigwedge\limits_{i,j} df_{ij} \geq 0$.

Определение. Для ростка $h : U_a \to \mathbb{C}$ и отображения (1) действие локального вычета в точке a введем по формуле

$$\operatorname{res}_f(h) = C_m \int\limits_{\Gamma_{f,\varepsilon}} \frac{h\,dz}{\det^m f}, \tag{2}$$

где $dz = \bigwedge\limits_{i,j} dz_{ij}$, а C_m выбрано условием

$$C_m \int\limits_{zz^*=1} \frac{dz}{\det^m z} = 1.$$

Будем считать, что локальный вычет (2) сопоставлен дифференциальной форме $\omega = h\dot{z}/\det^m f$, и обозначать его через $\operatorname{res}_a \omega$ (здесь $\dot{z} = C_m \bigwedge\limits_{i,j} dz_{ij}$).

Замечание. Все существующие до сих пор интегральные интерпретации локального вычета давали способ введения соответствующего вычетного потока (см. [5]). Видимо, наше определение также приводит к соответствующему вычетному потоку, который рассматривается как функционал от гладкой тестовой функции h в (2), но при условии, что в (2) берется предел интегралов при $\varepsilon \to 0$. Иными словами, правдоподобно, что такой предел всегда существует для любой гладкой функции h.

Для формулировки основной теоремы матрицу f будем интерпретировать как вектор с m^2 координатами, нумеруя каким-либо образом элементы этой матрицы в виде последовательности $f_1, \dots, f_{m^2}$.

Теорема 1. *Пусть $f : \overline{U}_a \to \mathbb{C}[m \times m]$ — голоморфное отображение и точка a является изолированным нулем отображения f. Тогда для локального вычета* (2) *имеет место равенство*

$$\operatorname{res}_a \omega = \int\limits_{\partial U_a} \eta_\omega, \tag{3}$$

где

$$\eta_\omega = \frac{(m^2-1)!}{(2\pi i)^{m^2}} \frac{h}{|f|^{2m^2}} \sum_{k=1}^{m^2} (-1)^{k-1} \bar{f}_k \, d\bar{f}[k] \wedge dz,$$

$$|f|^2 = \sum_{k=1}^{m^2} |f_k|^2, \quad d\bar{f}[k] = d\bar{f}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{f}_{k-1} \wedge d\bar{f}_{k+1} \wedge \dots \wedge d\bar{f}_{m^2}.$$

Хотя подынтегральная форма η_ω в формуле (3) неголоморфна, в отличие от самой формы ω в интеграле (2) она имеет простую особенность — изолированные нули отображения f. Формула (3) может быть полезной при исследовании локального вычета.

Замечание. Интеграл в правой части (3) совпадает с первоначальным интегральным представлением локального вычета в виде интеграла от мероморфной формы [1–3].

Для доказательства теоремы потребуется следующий факт, который имеет, на наш взгляд, самостоятельный интерес.

Пусть $f : G \to \mathbb{C}[m \times m]$ — голоморфное отображение области $G \subset \mathbb{C}^{m^2}$ такое, что $D_{f,\varepsilon} = \{z \in G : \varepsilon^2 I - ff^* > 0\} \Subset G$.

Область $D_{f,\varepsilon}$ не что иное, как прообраз обобщенного круга $\{w \in \mathbb{C}[m \times m] : \varepsilon^2 I - ww^* > 0\}$ радиуса ε при отображении $w = f(z)$. Для квадратной матрицы ξ обозначим через $\|\xi\|_s$ ее спектральную норму.

Лемма 1. *Пусть ξ — $(m \times m)$-матрица такая, что $\varepsilon^2 I - \xi\xi^* > 0$. Тогда для всех δ, $0 < \delta < \varepsilon - \|\xi\|_s$, в $G_* = G \setminus \{z : \det(f(z) - \xi) = 0\}$ имеет место гомология циклов $\Gamma_{f-\xi,\delta} \sim \Gamma_{f,\varepsilon}$, где $\Gamma_{f-\xi,\delta} = \{z \in G : \delta^2 I - (f(z) - \xi)(f(z) - \xi)^* = 0\}$.*

Доказательство. Рассмотрим следующую $(m^2 + 1)$-мерную цепь:

$$C = \{z \in G : (\varepsilon - t\|\xi\|_s)^2 I = (f(z) - t\xi)(f(z) - t\xi)^*,\ 0 \le t \le 1\}.$$

Ясно, что для точек C выполняется равенство $\|f(z) - t\xi\|_s = \varepsilon - t\|\xi\|_s$. Покажем, что цепь C лежит в $\overline{D}_{f,\varepsilon}$. Действительно, если $z^0 \in G \setminus \overline{D}_{f,\varepsilon}$, то $\|f(z^0)\|_s > \varepsilon$, поскольку $\|f\|_s < \varepsilon$ тогда и только тогда, когда $\varepsilon^2 I - ff^* > 0$. Следовательно, $\|f(z^0) - t\xi\|_s \ge \|f(z^0)\|_s - t\|\xi\|_s > \varepsilon - t\|\xi\|_s$. Таким образом, C — компактная цепь. Теперь докажем, что носитель $|C|$ цепи C лежит в G_*. В самом деле, если $z \in |C|$, то $\det(f(z) - \xi) \ne 0$. Предположим, что $\det(f(z) - \xi) = 0$. Тогда существует такой ненулевой вектор z^1, что $z^1(f(z) - \xi) = 0$ или $z^1(f(z) - t\xi + t\xi - \xi) = 0$. Отсюда

$$(f(z) - t\xi)^*(z^1)^* = (1 - t)\xi^*(z^1)^*, \quad z^1(f(z) - t\xi) = (1 - t)z^1\xi.$$

Перемножая последние равенства, получим

$$z^1((\varepsilon - t\|\xi\|_s)^2 I - (1 - t)^2\xi\xi^*)(z^1)^* = 0.$$

Отсюда $(1 - t)\|\xi\|_s = \varepsilon - t\|\xi\|_s$, или $\|\xi\|_s = \varepsilon$, что противоречит условию леммы. Наконец, для любых $\delta < \varepsilon - \|\xi\|_s$ циклы $\Gamma_{f-\xi,\delta}$ принадлежат G_* и имеет место гомология циклов $\Gamma_{f-\xi,\delta} \sim \Gamma_{f-\xi,\varepsilon-\|\xi\|_s} = \partial c - \Gamma_{f,\varepsilon}$, откуда получаем утверждение леммы.

Доказательство теоремы 1. Отметим, что $\eta_\omega = h\omega_1(f, \bar f)/J_f$, где

$$\omega_1 = \frac{(m^2 - 1)!}{(2\pi i)^{m^2}} \frac{h}{|f|^{2m^2}} \sum_{k=1}^{m^2} (-1)^{k-1} \bar f_k d\bar f[k] \wedge df$$

— ядро Мартинелли — Бохнера, $J_f = \frac{\partial f}{\partial z}$ — якобиан отображения f.

Теорему докажем вначале для случая простого нуля, т. е. для случая $J_f(a) \ne 0$. Тогда отображение $w = f(z)$ допускает голоморфное обращение $z^{-1}(w)$ и по формуле Хуа — Локена [4, гл. 4] имеем

$$\operatorname{res}_a \omega = \int\limits_{\Gamma_{f,\varepsilon}} hJ_f\dot z/J_f \cdot \det{}^m f = \int\limits_{ww^* = \varepsilon^2 I} h(z^{-1}(w)\dot w/J_f(z^{-1}(w)) \cdot \det{}^m w = \frac{h(a)}{J_f(a)}.$$

С другой стороны, согласно интегральной формуле Мартинелли — Бохнера (см. [5, гл. 1])

$$\int\limits_{\partial U_a} \eta_w = \int\limits_{\partial U_a} h(z) w_1(f, \bar{f})/J_f(z)$$

$$= \int\limits_{f(\partial U_a)} h(z^{-1}(w)) w_1(w, \bar{w})/J_f(z^{-1}(w) = h(a)/J_f(a).$$

Тем самым утверждение теоремы в этом случае доказано.

Пусть теперь a — кратный нуль отображения f. Тогда для почти всех $\xi \in \{|\xi_j| < \varepsilon,\ j = 1, 2, \dots, m^2\}$ отображение $w = f(z) - \xi$ имеет в U_a лишь простые нули $z^{(\nu)}(\xi)$, $\nu = 1, \dots, \mu$ (см. [6, гл. 1]).

Применяя доказанную лемму к множеству $G = U_a$ и циклам $\Gamma_{f,\varepsilon}, \Gamma_{f-\xi,\delta}$, имеем

$$\operatorname{res}_a \omega = \int\limits_{\Gamma_{f,\varepsilon}} h\dot{z}/\det{}^m f = \lim_{\xi\to 0} \int\limits_{\Gamma f,\varepsilon} h\dot{z}/\det{}^m (f(z) - \xi) = \lim_{\xi\to 0} \int\limits_{\Gamma_{f-\xi,\delta}} h\dot{z}/\det{}^m (f(z) - \xi).$$

Отсюда ввиду очевидной гомологии

$$\Gamma_{f-\xi,\delta} \sim \sum_{\nu=1}^{\mu} \Gamma_{z^{(\nu)}(\xi)},$$

где $\Gamma_{z^{(\nu)}(\xi),\rho} = \{z \in U_{z^{(\nu)}(\xi)} : (f(z) - \xi)(f(z) - \xi)^* = \rho^2 I,\ \rho \ll \delta\}$, и доказанного утверждения в случае простого нуля получаем

$$\operatorname{res}_a \omega = \lim_{\xi\to 0} \sum_{\nu=1}^{\mu} \int\limits_{\Gamma_{z^{(\nu)}(\xi)}} h\dot{z}/\det{}^m (f(z) - \xi)$$

$$= \lim_{\xi\to 0} \sum_{\nu=1}^{\mu} \operatorname{res}_{z^{(\nu)}(\xi)} f - \xi(h) = \lim_{\xi\to 0} \sum_{\nu=1}^{\mu} \int\limits_{\partial U_{z^{(\nu)}(\xi)}} \eta_{\omega(f-\xi)}.$$

Так как в области регулярности замкнутой формы $\eta_{\omega(f-\xi)}$ имеет место гомология $\partial U_a \sim \sum\limits_{\nu=1}^{\mu} \partial U_{z^{(\nu)}(\xi)}$, из формулы Стокса и непрерывности по ξ формы $\eta_{\omega(f-\xi)}$ выводим

$$\lim_{\xi\to 0} \sum_{\nu=1}^{\mu} \int\limits_{\partial U_{z^{(v)}(\xi)}} \eta_{\omega(f-\xi)} = \lim_{\xi\to 0} \int\limits_{\partial U_a} \eta_{\omega(f-\xi)} = \int\limits_{\partial U_a} \eta_{\omega(f)}.$$

Теорема доказана.

2. Некоторые следствия основной теоремы

Поскольку мы доказали эквивалентность введенного выше локального вычета (2) с традиционном вычетом, мы можем переформулировать ряд свойств на языке вычета (2). Первое утверждение представляет собой вариант формулы логарифмического вычета [3, 6].

Теорема 2. *Если $h = J_f$ — якобиан отображения f, то*

$$\int\limits_{\Gamma_{f,\varepsilon}} J_f \dot{z} / \det^m f = N,$$

где N — число нулей (с учетом кратности) отображения f, лежащих в $D_{f,\varepsilon}$.

Следующее утверждение выражает теорему локальной двойственности [1, гл. 5].

Теорема 3. *Росток h принадлежит идеалу $I_a(f)$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{res}_f(hg) = 0$ для всех $g \in \mathscr{O}_a$.*

Наконец, третье важное свойство — это формула преобразования локального вычета [1, гл. 5].

Пусть отображение $f = \left(f_1, \dots f_m^2\right)$ имеет в точке $a \in \mathbb{C}^{m^2}$ изолированный нуль и $g = Af$, где $A = (a_{i,j}(z))$ — $(m^2 \times m^2)$-матрица, элементами которой являются голоморфные функции в окрестности U_a точки a.

Теорема 4. *Если голоморфные отображения f и $g = Af$ имеют в точке a изолированный нуль, то для любого $h \in \mathscr{O}_a$ верно равенство*

$$\operatorname{res}_f h = \operatorname{res}_g (h \cdot \det A).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гриффитс Ф., Харрис Дж.* Принципы алгебраической геометрии. М.: Мир, 1982.
2. *Tong T. L.* Integral representation formule and Grothendieck residue symbol // Amer. J. Math. 1973. V. 4. P. 904–917.
3. *Цих А. К.* Многомерные вычеты и их применения. Новосибирск: Наука, 1988.
4. *Хуа Локен.* Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
5. *Passare M., Tsikh A., Yger A.* Residue current of the Bochner — Martinelli type // Publ. Math. 2000. V. 44. P. 85–117.
6. *Айзенберг Л. А, Южаков А. П.* Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. Новосибирск: Наука, 1979.

Статья поступила 30 октября 2001 г.

Шаимкулов Баходир Аллабердиевич
Национальный университет Узбекистана, механико-математический факультет,
Вузгородок, Тошкент 700174, Узбекистан
davlat@tps.uz