Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2002. Том 43, № 5

УДК 517.988

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА. II

А. А. Толстоногов

Аннотация: Продолжаются исследования, начатые в первой части. Основное внимание уделено граничности множества допустимых пар «траектория-управление» системы с невыпуклыми ограничениями в множестве допустимых пар «траектория-управление» системы с овыпукленными ограничениями. Даны необходимые и достаточные условия замкнутости в соответствующих функциональных пространствах множества допустимых пар «траектория-управление» системы с невыпуклыми ограничениями. На примере управляемой гиперболической системы представлена интерпретация полученных абстрактных результатов. В качестве приложения рассмотрена задача минимизации интегрального функционала на решениях управляемой системы.

Ключевые слова: эволюционная управляемая система, невыпуклое ограничение, граничность, оптимальное управление, гиперболическая управляемая система

Введение

В работе продолжается начатое в [1] изучение свойств множеств решений управляемой системы

$$\begin{gathered} \ddot{x}(t) + A(t, \dot{x}(t)) + Bx(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t))u(t) \quad \text{п. в.}, \\ x(0) = x_0 \in V, \quad \dot{x}(0) = y_0 \in H \end{gathered} \tag{0.1}$$

со смешанными ограничениями на управление

$$u(t) \in U(t, x(t), \dot{x}(t)) \quad \text{п. в.}, \tag{0.2}$$

$$u(t) \in \overline{\text{co}} U(t, x(t), \dot{x}(t)) \quad \text{п. в.}, \tag{0.3}$$

$$u(t) \in U(t, x(t), \dot{x}(t)) \cap \operatorname{ext} \overline{\text{co}} U(t, x(t), \dot{x}(t)) \quad \text{п. в.}, \tag{0.4}$$

где $A : T \times V \to V^*$ — нелинейный оператор, $B : V \to V^*$ — линейный оператор, $U : T \times H \times H \to Y$ — многозначное отображение с невыпуклыми замкнутыми значениями, $f : T \times H \times H \to \mathscr{L}(Y, H)$ — нелинейное отображение. Здесь $\mathscr{L}(Y, H)$ — пространство непрерывных линейных операторов из Y в H. Основное внимание в работе уделено вопросам граничности множества решений управляемых систем (0.1), (0.2) и (0.1), (0.4) в множестве решений системы (0.1), (0.3), а также необходимым и достаточным условиям замкнутости множества решений системы (0.1), (0.2). Эти условия объясняют существенность соответствующих предположений выпуклости в задачах оптимального управления. Абстрактные результаты проиллюстрированы на примере управляемой гиперболической системы. В качестве приложения рассматривается задача минимизации интегрального функционала на решениях управляемой системы (0.1), (0.3).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00216).

§ 1. Основные определения и обозначения

В основном мы следуем обозначениям и определениям из [1]. Для удобства приведем некоторые из них.

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — сепарабельное банахово пространство, $T = [0,1]$ — отрезок числовой прямой с мерой Лебега μ и σ-алгеброй Σ μ-измеримых подмножеств. Для множества $A \subset X$ через $\operatorname{co} A$ обозначается выпуклая оболочка A, через $\overline{\operatorname{co}} A$ — замкнутая выпуклая оболочка и через $\operatorname{ext} \overline{\operatorname{co}} A$ — множество экстремальных (крайних) точек $\overline{\operatorname{co}} A$. Через $D(\cdot,\cdot)$ обозначим метрику Хаусдорфа на пространстве cbX — непустых замкнутых ограниченных множеств в X и через $d(x, A)$ — расстояние от точки x до A. Под $ccbX$ мы понимаем совокупность всех непустых замкнутых выпуклых ограниченных множеств из X.

Если $F : T \to cbX$, то через S_F^p, $1 \le p < \infty$, обозначим множество всех элементов пространства $L^p(T, X)$, являющихся селекторами отображения $t \to F(t)$.

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, V — сепарабельное рефлексивное банахово пространство, которое плотно, непрерывно и компактно вложено в H, и V^* — топологически сопряженное к V. Через $\|\cdot\|$ (соответственно $|\cdot|$, $\|\cdot\|_*$) обозначаем норму в пространстве V (соответственно в H, V^*). Под $\langle x, x'\rangle$, $x \in V$, $x' \in V^*$, понимаем каноническую билинейную форму, устанавливающую двойственность между V и V^*, а $(\cdot,\cdot)$ означает скалярное произведение в H.

Для p, $2 \le p < \infty$, введем следующие пространства: $\mathscr{V} = L^p(T, V)$, $\mathscr{H} = L^p(T, H)$, $\mathscr{H}^* = L^q(T, H)$, $\mathscr{V}^* = L^q(T, V^*)$, $1/p + 1/q = 1$, и пространство $\mathscr{W} = \{\nu \in \mathscr{V}^*;\ \dot{\nu} \in \mathscr{V}^*\}$ с нормой $\|\nu\| = \left(\|\nu\|_{\mathscr{V}}^2 + \|\dot{\nu}\|_{\mathscr{V}^*}^2\right)^{1/2}$.

Билинейную форму, устанавливающую двойственность между $\mathscr{V}$ и $\mathscr{V}^*$, обозначаем через

$$\int_T \langle f(t), v(t)\rangle\, dt, \quad f \in \mathscr{V},\ v \in \mathscr{V}^*.$$

Для любого банахова пространства X символ w-X означает, что пространство X наделено слабой топологией. Такое же обозначение мы используем и для подмножеств из X. Во всех остальных случаях мы считаем, что пространство X и его подмножества наделены сильной (нормированной) топологией.

Пусть Y — сепарабельное рефлексивное банахово пространство. *Решением управляемой системы* (0.1) будем называть пару $\{(x, \dot{x}), u\} \in C(T, V) \times \mathscr{W} \times L^q(Y)$, удовлетворяющую почти всюду уравнению (0.1) и ограничению (0.2). Аналогично определяются решения управляемых систем (0.1), (0.3) и (0.1), (0.4). Через $\mathscr{R}_U(x_0, y_0) \subset C(T, V) \times \mathscr{W} \times L^q(T, Y) \hookrightarrow C(T, V) \times C(T, H) \times L^q(T, Y)$ обозначаем множество всех решений управляемой системы (0.1), (0.2). Обозначения $\mathscr{R}_{\overline{\operatorname{co}} U}(x_0, y_0)$ и $\mathscr{R}_{U \cap \operatorname{ext} \overline{\operatorname{co}} U}(x_0, y_0)$ используются для множеств всех решений систем (0.1), (0.3) и (0.1), (0.4).

Под $L_w^q(T, Y)$ мы понимаем пространство $L^q(T, Y)$ с нормой

$$\|\varphi\|_w = \sup_{0 \le t \le t' \le 1} \left\| \int_t^{t'} \varphi(t)\, d\mu \right\|.$$

Пусть $A \subset X$ — замкнутое множество и $B \subset A$. Следуя [2], множество B назовем *граничным* в A, если $A = \overline{A \backslash B}$, где черта означает замыкание в X.

Пусть $E \in \Sigma$, $\mu(E) > 0$, $t \in T$, $s > 0$. Если

$$\lim_{s \to 0+} \frac{\mu(E \cap [t-s, t+s])}{2s} = 1 \quad \left(\lim_{s \to 0+} \frac{\mu(E \cap [t, t+s])}{s} = 1 \right),$$

то точка t называется *точкой плотности* (*правой плотности*) множества E. Известно, что почти каждая точка $t \in E$ является точкой плотности (правой плотности) E [3].

Всюду в данной статье будем считать, что предположения $H(A)$, $H(B)$ [1] имеют место.

§ 2. Граничность

В этом параграфе рассмотрим вопросы аппроксимации элементов множества $\mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(x_0, y_0)$ элементами множества $\mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(x_0, y_0) \backslash \mathscr{R}_U(x_0, y_0)$ и, следовательно, элементами множества $\mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(x_0, y_0) \backslash \mathscr{R}_{U \cap \mathrm{ext}\, \overline{\mathrm{co}}U}(x_0, y_0)$.

Для этой цели нам понадобится следующее

Предположение $\Gamma_2(U)$**.** *Имеет место неравенство*

$$D(U(t, x, y), U(t, x_1, y_1)) \leq k(t)(|x - x_1| + |y - y_1|) \quad \text{п. в.},$$

$k(\cdot) \in L^1(T, R^1)$.

Всюду в этом параграфе мы считаем, что предположения $\Gamma(f)$, $\Gamma_1(f)$, $\Gamma(U)$ (1), (3) из [1] и $\Gamma_2(U)$ имеют место.

Теорема 2.1. *Пусть* $\{(x_*, \dot{x}_*), u\} \in \mathscr{R}_U(x_0, y_0)$. *Если*

$$\mu\{t \in T;\ D(U(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)),\ \overline{\mathrm{co}}U(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)) > 0\} > 0, \tag{2.1}$$

то существует последовательность $\{(x_n, \dot{x}_n), u_n\} \in \mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(x_0, y_0) \backslash \mathscr{R}_U(x_0, y_0)$, *сходящаяся к* $\{(x_*, \dot{x}_*), u\}$ *в пространствах* $C(T, V) \times w\text{-}\mathscr{W} \times L^q(T, Y)$ *и* $C(T, V) \times C(T, H) \times L^q(T, Y)$.

Доказательство. Из (2.1) и утверждения 4.2 в [4] вытекает существование элемента $v \in L^q(T, Y)$ такого, что

$$v(t) \in \overline{\mathrm{co}}U(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)) \quad \text{п. в.}, \tag{2.2}$$

$$\int_T d(v(t), U(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)))\, dt > 0. \tag{2.3}$$

Воспользовавшись (2.3), заключаем, что существуют компакт $\mathscr{T} \subset T$, $\mu(\mathscr{T}) > 0$, и $r > 0$ такие, что сужения $k(t)$, $d(v(t), U(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)))$ и $v(t)$ на $\mathscr{T}$ непрерывны и

$$d(v(t), U(t, x_*(t), \dot{x}_*(t))) > 3r, \quad t \in \mathscr{T}. \tag{2.4}$$

Следовательно, для любых u, $\|u - v(t)\|_Y < r$, $t \in \mathscr{T}$ имеет место неравенство

$$d(u, U(t, x_*(t), \dot{x}_*(t))) > 2r. \tag{2.5}$$

Из предположения $\Gamma_2(U)$ следует существование такого $\gamma > 0$, что

$$D(U(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)), U(t, x, y)) < r \tag{2.6}$$

п. в. на $\mathscr{T}$ для любых $x, y \in H$, удовлетворяющих неравенствам $|x - x_*(t)| < \gamma$, $|y - x_*(t)| < \gamma$. Объединяя (2.5), (2.6), получим

$$d(u, U(t, x, y)) > r \tag{2.7}$$

п. в. на $\mathscr{T}$ для любых $u \in Y$, $x, y \in H$, удовлетворяющих неравенствам $\|u - v(t)\|_Y < r$, $|x - x_*(t)| < \gamma$, $|y - \dot{x}_*(t)| < \gamma$.

Пусть t_* — точка плотности множества $\mathscr{T}$. Положим $T_n = [t_* - 1/n, t_* + 1/n] \cap \mathscr{T}$. Рассмотрим последовательность $v_n : T \to Y$, определенную следующим образом:

$$v_n(t) = v(t), \quad t \in T_n, \quad v_n(t) = u_*(t), \quad t \in T \backslash T_n.$$

Тогда

$$v_n(t) \to u_*(t) \quad \text{п. в. в} \quad Y. \tag{2.8}$$

Как и при доказательстве теоремы 5.2 в [1], получаем, что существует непрерывная функция $g_n : \mathscr{R}(x_0, y_0) \hookrightarrow C(T, H) \times C(T, H) \to L^q(T, Y)$ такая, что

$$g_n(x, \dot{x})(t) \in \overline{\mathrm{co}} U(t, x(t), \dot{x}(t)) \quad \text{п. в.}, \tag{2.9}$$

$$\|v_n(t) - g_n(x, \dot{x})(t)\|_Y \leq 1/n + k(t)(|x_*(t) - x(t)| + |\dot{x}_*(t) - \dot{x}(t)|) \quad \text{п. в.} \tag{2.10}$$

(см. [1, (5.15)]). Так как $\{(x_*, \dot{x}_*), u_*\} \in \mathscr{R}_U(x_0, y_0)$, то

$$(x_*, \dot{x}_*) = P\varphi_*, \quad \varphi_* = F(x_*, \dot{x}_*)u_*, \quad u_* \in L^q(T, Y),$$

$$u_*(t) \in U(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)) \quad \text{п. в.} \tag{2.11}$$

Пусть φ_n — неподвижная точка оператора

$$\mathscr{A}_n : S_\lambda \to S_\lambda, \quad \mathscr{A}_n(\varphi) = F(P\varphi)g_n(P\varphi).$$

Тогда согласно (2.9), (2.10)

$$\{(x_n, \dot{x}_n), u_n\} \in \mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}} U}(x_0, y_0), \tag{2.12}$$

где

$$(x_n, \dot{x}_n) = P\varphi_n, \quad \varphi_n = F(x_n, \dot{x}_n)u_n, \quad u_n = g_n(x_n, \dot{x}_n) \tag{2.13}$$

и

$$\|v_n(t) - u_n(t)\|_Y \leq 1/n + k(t)(|x_n(t) - x_*(t)| + |\dot{x}_n(t) - \dot{x}_*(t)|). \tag{2.14}$$

По аналогии с неравенствами (5.20), (5.21) из [1] получим

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}|\dot{x}_n(t) - \dot{x}_*(t)|^2 + \frac{1}{2}c_*\|x_n(t) - x_*(t)\|^2 \\
&\qquad \leq \int_0^t (\dot{x}_n(s) - \dot{x}_*(s), f(s, x_n(s), \dot{x}_n(s))(u_n(s) - v_n(s)))\, ds \\
&\qquad + \int_0^t (\dot{x}_n(s) - \dot{x}_*(s), f(s, x_n(s), \dot{x}_n(s))(v_n(s) - u_*(s)))\, ds \\
&+ \int_0^t (\dot{x}_n(s) - \dot{x}_*(s), (f(s, x_n(s), \dot{x}_n(s) - f(s, x_*(s), \dot{x}_n(s)))u_*(s))\, ds.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Учитывая (2.8), (2.14), (2.15), как и при доказательстве теоремы 5.2 в [1], легко показать, что последовательность $\{(x_n, \dot{x}_n), u_n\} \in \mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}} U}(x_0, y_0)$ сходится к некоторому элементу $\{(x,\dot{x}),u\} \in \mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(x_0,y_0)$ в пространствах $C(T,V) \times w$-$\mathscr{W} \times w$-$L^q(T,Y)$ и $C(T,V)\times C(T,H)\times w$-$L^q(T,Y)$, причем $(x,\dot{x}) = (x_*,\dot{x}_*)$. Воспользовавшись (2.8), получаем, что $u_n \to u_*$ в $L^q(T,Y)$. Следовательно, $u_* = u$. Поэтому

$$\{(x_n,\dot{x}_n),u_n\} \to \{(x_*,\dot{x}_*),u_*\} \tag{2.16}$$

в $C(T,V)\times w$-$\mathscr{W}\times L^q(T,Y)$ и в $C(T,V)\times C(T,H)\times L^q(T,Y)$. Из (2.14), (2.16) и непрерывности $k(t)$ на $\mathscr{T}$ вытекает существование n_0 такого, что для $n \geq n_0$ п. в. на $\mathscr{T}$ будут выполняться неравенства

$$\|v_n(t) - u_n(t)\|_Y < r, \quad |x_n(t) - x_*(t)| < \gamma, \quad |\dot{x}_n(t) - \dot{x}_*(t)| < \gamma. \tag{2.17}$$

Так как $v_n(t) = v(t)$, $t \in T_n$, то из (2.7), (2.17) следует, что

$$d(u_n(t), U(t,x_n(t),\dot{x}(t))) > r \quad \text{п. в. на} \quad T_n. \tag{2.18}$$

Поскольку t_* является точкой плотности множества $\mathscr{T}$, то $\lim \mu(T_n)n/2 = 1$. Поэтому $\mu(T_n) > 0$ для всех достаточно больших $n \geq n_0$. Следовательно, согласно (2.18) $\{(x_n,\dot{x}_n),u_n\} \notin \mathscr{R}_U(x_0,y_0)$ при достаточно больших $n \geq n_0$.

Таким образом, последовательность $\{(x_n,\dot{x}_n),u_n\} \in \mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(x_0,y_0)$ сходится к $\{(x_*,\dot{x}_*),u_*\} \in \mathscr{R}_U(x_0,y_0)$ в $C(T,V)\times w$-$\mathscr{W}\times L^q(T,Y)$ и в $C(T,V)\times C(T,H)\times L^q(T,Y)$ и $\{(x_n,\dot{x}_n),u_n\} \notin \mathscr{R}_U(x_0,y_0)$ при достаточно больших n. Теорема доказана.

Следствие 2.1. *Если для любого* $\{(x,\dot{x}),u\} \in \mathscr{R}_U(x_0,y_0)$ *выполняется неравенство*

$$\mu\{t \in T;\ U(t,x(t),\dot{x}(t)) \neq \overline{\mathrm{co}}U(t,x(t),\dot{x}(t))\} > 0, \tag{2.19}$$

то

$$\begin{aligned}\mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(x_0,y_0) &= \overline{\mathscr{R}_U(x_0,y_0)} = \overline{\mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(x_0,y_0)\backslash\mathscr{R}_U(x_0,y_0)}\\ &= \overline{\mathscr{R}_{U\cap \mathrm{ext}\,\overline{\mathrm{co}}U}(x_0,y_0)} = \overline{\mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(x_0,y_0)\backslash\mathscr{R}_{U\cap\mathrm{ext}\,\overline{\mathrm{co}}U}(x_0,y_0)},\end{aligned} \tag{2.20}$$

где черта означает замыкание в топологии любого из пространств

$$C(T,V)\times w\text{-}\mathscr{W}\times w\text{-}L^q(T,Y), \quad C(T,V)\times C(T,H)\times w\text{-}L^q(T,Y),$$

$$C(T,V)\times w\text{-}\mathscr{W}\times L^q_w(T,Y), \quad C(T,V)\times C(T,H)\times L^q_w(T,Y). \tag{2.21}$$

Следствие вытекает из следствия 5.2 в [1] и теоремы 2.1.

Равенства (2.20) указывают, что при выполнении неравенства (2.19) множества $\mathscr{R}_U(x_0,y_0)$ и $\mathscr{R}_{U\cap\mathrm{ext}\,\overline{\mathrm{co}}U}(x_0,y_0)$ являются одновременно плотными и граничными подмножествами множества $\mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(x_0,y_0)$ в топологии любого из пространств (2.21).

§ 3. Необходимые и достаточные условия замкнутости множества $\mathscr{R}_U(x_0,y_0)$

В этом параграфе мы считаем, что имеют место предположения $\Gamma(f)$, $\Gamma_1(f)$, $\Gamma(U)$ (1), (3) из [1] и $\Gamma_2(U)$.

Теорема 3.1. *Множество $\mathscr{R}_U(x_0, y_0)$ замкнуто в любом из пространств (2.21) тогда и только тогда, когда для любой пары $\{(x, \dot{x}), u\} \in \mathscr{R}_U(x_0, y_0)$ имеет место равенство*

$$\mu\{t \in T;\ U(t, x(t), \dot{x}(t)) \neq \overline{\mathrm{co}} U(t, x(t), \dot{x}(t))\} = 0. \tag{3.1}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть множество $\mathscr{R}_U(x_0, y_0)$ замкнуто в одном из пространств (2.21). Предположим, что существует пара $\{(x_*, \dot{x}_*), u_*\} \in \mathscr{R}_U(x_0, y_0)$ такая, что

$$\mu\{t \in T;\ U(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)) \neq \overline{\mathrm{co}} U(t, x_*(t)), \dot{x}_*(t)\} > 0.$$

Тогда согласно теореме 2.1 $\mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(x_0, y_0) \backslash \mathscr{R}_U(x_0, y_0) \neq \varnothing$. Воспользовавшись следствием 2.1, получаем $\mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(x_0, y_0) = \overline{\mathscr{R}_U(x_0, y_0)} = \mathscr{R}_U(x_0, y_0)$. Но это противоречит тому, что $\mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(x_0, y_0) \backslash \mathscr{R}_U(x_0, y_0) \neq \varnothing$.

Достаточность. Пусть для любой пары $\{(x, \dot{x}), u\} \in \mathscr{R}_U(x_0, y_0)$ имеет место равенство (3.1), а множество $\mathscr{R}_U(x_0, y_0)$ не замкнуто. В силу следствия 5.2 в [1] $\overline{\mathscr{R}_U(x_0, y_0)} = \mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(x_0, y_0)$, где черта означает замыкание в топологии одного из пространств (2.21). Тогда существует $\{(x_*, \dot{x}_*), u_*\} \in \mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(x_0, y_0) \backslash \mathscr{R}_U(x_0, y_0)$. Согласно теореме 5.2 в [1] в топологии одного из пространств (2.21) существует последовательность $\{(x_n, \dot{x}_n), u_n\} \in \mathscr{R}_U(x_0, y_0)$, сходящаяся к $\{(x_*, \dot{x}_*), u_*\}$. Следовательно, п. в.

$$u_n(t) \in U(t, x_n(t), \dot{x}_n(t)) = \overline{\mathrm{co}} U(t, x_n(t), \dot{x}_n(t)), \tag{3.2}$$

$$u_*(t) \in \overline{\mathrm{co}} U(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)). \tag{3.3}$$

Так как пространство $ccbY$, поделенное метрикой Хаусдорфа, является полным и

$$U(t, x_n(t), \dot{x}_n(t)) \to U(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)) \quad \text{п. в.} \tag{3.4}$$

в метрике Хаусдорфа, то из (3.2), (3.4) следует, что

$$U(t, x_*(t), \dot{x}(t)) = \overline{\mathrm{co}} U(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)) \quad \text{п. в.} \tag{3.5}$$

Теперь из (3.3), (3.5) вытекает, что $\{(x_*, \dot{x}_*), u_*\} \in \mathscr{R}_U(x_0, y_0)$. Тем самым множество $\mathscr{R}_U(x_0, y_0)$ замкнуто в топологии любого из пространств (2.21), что противоречит нашему предположению. Теорема доказана.

В теореме 3.1 мы предполагали, что неравенство (3.1) выполняется вдоль решений системы (0.1), (0.2). Ниже мы докажем другую версию теоремы 3.1, в условиях которой не фигурируют решения системы (0.1), (0.2).

Пусть $0 \leq t_0 < 1$ и $T_0 = [t_0, 1]$. Тогда мы можем рассмотреть пространства $\mathscr{W}(T_0)$, $C(T_0, V)$, $L^q(T_0, Y)$, состоящие из соответствующих функций, определенных на T_0. Более того, для любого t_0, $0 \leq t_0 < 1$, и любых $x_0 \in V$, $y_0 \in H$ мы можем рассмотреть множества $\mathscr{R}_U(x_0, y_0, t_0)$, $\mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(x_0, y_0, t_0)$, $\mathscr{R}_{U \cap \mathrm{ext}\, \overline{\mathrm{co}}U}(x_0, y_0, t_0)$ решений систем (0.1), (0.2), (0.1), (0.3) и (0.1), (0.4), являющихся подмножествами пространств $C(T_0, V) \times \mathscr{W}(T_0) \times L^q(T_0, Y) \hookrightarrow C(T_0, V) \times C(T_0, H) \times L^q(T_0, Y) \hookrightarrow C(T_0, H) \times C(T_0, H) \times L^q(T_0, Y)$. Очевидно, что если выполняются предположения $\Gamma(f)$, $\Gamma_1(f)$, $\Gamma(U)(1)$, (3) и $\Gamma_2(U)$, то все предыдущие результаты справедливы и для множеств $\mathscr{R}_U(x_0, y_0, t_0)$, $\mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(x_0, y_0, t_0)$, $\mathscr{R}_{U \cap \mathrm{ext}\, \overline{\mathrm{co}}U}(x_0, y_0, t_0)$.

Рассмотрим пространства

$$\begin{gathered} C(T_0, V) \times w\text{-}\mathscr{W}(T_0) \times w\text{-}L^q(T_0, Y), \quad C(T_0, V) \times C(T_0, H) \times w\text{-}L^q(T, Y), \\ C(T_0, V) \times w\text{-}\mathscr{W}(T_0) \times L^q_w(T_0, Y), \quad C(T_0, V) \times C(T_0, H) \times L^q_w(T_0, Y). \end{gathered} \tag{3.6}$$

Теорема 3.2. *Для того чтобы для любого t_0, $0 \le t_0 < 1$, и любых $x_0 \in V$, $y_0 \in H$ множество $\mathscr{R}_U(x_0, y_0, t_0)$ было замкнутым в топологии любого из пространств (3.6), необходимо и достаточно, чтобы для любых $x, y \in H$ имело место равенство*
$$\mu\{t \in T;\ U(t,x,y) \neq \overline{\text{co}} U(t,x,y)\} = 0. \tag{3.7}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = 1$ — разбиение отрезка $T = [0,1]$. Функцию $z : T \to H$ назовем *ступенчатой*, если она постоянна на каждом из полуинтервалов $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, \ldots, n-1$, и на отрезке $[\tau_{n-1}, \tau_n]$. Пусть для любых $x, y \in H$ справедливо равенство (3.7). Тогда очевидно, что
$$\mu\{t \in T;\ U(t,x(t),y(t)) \neq \overline{\text{co}} U(t,x(t),y(t))\} = 0 \tag{3.8}$$
для любых ступенчатых функций $x, y : T \to H$. Так как любую непрерывную функцию из T в H можно представить как равномерный предел ступенчатых функций, то из гипотезы $\Gamma_2(U)$ следует, что равенство (3.8) имеет место для любых непрерывных функций $x, y : T \to H$. Поэтому для любого t_0 и для любых $x, y \in C(T_0, H)$ имеет место равенство
$$\mu\{t \in T_0; U(t,x(t),y(t)) \neq \overline{\text{co}} U(t,x(t),y(t))\} = 0. \tag{3.9}$$
Воспользовавшись (3.9) и теоремой 3.1, примененной к множеству $\mathscr{R}_U(x_0, y_0, t_0)$, получим, что множество $\mathscr{R}_U(x_0, y_0, t_0)$ замкнуто в топологии любого из пространств (3.6).

Необходимость. Пусть для любого t_0 и любых $x_0, y_0 \in H$ множество $\mathscr{R}_U(x_0, y_0, t_0)$ замкнуто в топологии любого из пространств (3.6), а равенство (3.7) не имеет места. Тогда существуют $x_0, y_0 \in H$ и множество $\mathscr{T}(x_0, y_0)$, $\mu(\mathscr{T}(x_0, y_0)) > 0$, такое, что $U(t, x_0, y_0) \neq \overline{\text{co}} U(t, x_0, y_0)$ для любого $t \in \mathscr{T}(x_0, y_0)$. Так как почти каждая точка $t \in \mathscr{T}(x_0, y_0)$ является его точкой правой плотности, то существует $t \in \mathscr{T}(x_0, y_0)$ такое, что мера множества $\mathscr{T}_0 = \mathscr{T}(x_0, y_0) \cap [t, 1]$ больше нуля. Воспользовавшись следствием 2.1 из [5], получаем, что существует компактное множество $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}_0$, $\mu(\mathscr{T}) > 0$, такое, что сужение функции $(t,x,y) \to U(t,x,y)$ на $\mathscr{T} \times H \times H$ полунепрерывно снизу по Вьеторису и имеет замкнутый график в $T \times H \times H \times Y$.

Пусть $t_0 \in \mathscr{T}$ — точка правой плотности множества $\mathscr{T}$ и $\{(x_*, \dot{x}_*), u_*\} \in \mathscr{R}_U(x_0, y_0, t_0) \hookrightarrow C(T_0, H) \times C(T_0, H) \times L^q(T_0, Y)$. Тогда
$$U(t_0, x_0, y_0) = U(t_0, x_*(t_0), \dot{x}_*(t_0)) \neq \overline{\text{co}} U(t_0, x_0, y_0)) \tag{3.10}$$
и сужение функции $t \to U(t, x_*(t), \dot{x}_*(t))$ на $\mathscr{T} \cap [t_0, 1]$ полунепрерывно снизу по Вьеторису и имеет замкнутый график в $T \times Y$. Покажем, что существует $h > t_0$ такое, что
$$U(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)) \neq \overline{\text{co}} U(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)), \quad t \in [t_0, h] \cap \mathscr{T}.$$
Предположим, что это не так. Тогда существует последовательность $t_n \in \mathscr{T} \cap [t_0, 1]$, $t_n \to t_0$, такая, что $U(t_n, x_*(t_n), \dot{x}_*(t_n)) = \overline{\text{co}} U(t_n, x_*(t_n), \dot{x}_*(t_n))$. Пусть $u, v \in U(t_0, x_0, y_0)$ и $\lambda \in [0,1]$ произвольны. Из полунепрерывности снизу по Вьеторису функции $U(t, x_*(t), \dot{x}_*(t))$ на $\mathscr{T} \cap [t_0, 1]$ следует, что существуют $u_n, v_n \in U(t_n, x_*(t_n), \dot{x}_*(t_n))$ такие, что $u_n \to u$, $v_n \to v$. Тогда $\lambda u_n + (1-\lambda) v_n \in U(t_n, x_*(t_n), \dot{x}_*(t_n))$ и $\lambda u_n + (1-\lambda) v_n \to \lambda u + (1-\lambda) v$. Теперь из замкнутости графика сужения функции $U(t, x_*(t), \dot{x}_*(t))$ на $\mathscr{T} \cap [t_0, 1]$ вытекает,

что $\lambda u+(1-\lambda)v \in U(t_0,x_0,y_0)$. Но это противоречит (3.10). Следовательно, существует $h>t_0$ такое, что для любого $t\in[t_0,h]\cap\mathscr{T}$ множество $U(t,x_*(t),\dot{x}_*(t))$ невыпукло. Так как t_0 является точкой правой плотности множества $\mathscr{T}$, то $\mu([t_0,h)\cap\mathscr{T})>0$. Из этого неравенства следует, что

$$\mu\{t\in T_0;\ U(t,x_*(t),\dot{x}_*(t))\neq\overline{\operatorname{co}}U(t,x_*(t),\dot{x}_*(t))\}>0. \tag{3.11}$$

Воспользовавшись (3.11) и теоремой 3.1, примененной к множеству $\mathscr{R}_U(x_0,y_0,t_0)$, получаем, что множество $\mathscr{R}_U(x_0,y_0,t_0)$ не замкнуто в любом из пространств (3.6). Но это противоречит нашему предположению. Теорема доказана.

Теорема 3.2, как и теорема 3.1, объясняет существенность соответствующих предположений выпуклости в теоремах существования оптимального управления. Доказательство таких теорем в общем случае сводится к доказательству полунепрерывности снизу минимизируемого функционала на компактном множестве допустимых кривых и применению классической теоремы Вейерштрасса в функциональных пространствах. Как утверждают теоремы 3.1 и 3.2, без предположения выпуклозначности отображения $U(t,x,y)$ множество допустимых кривых $\{(x,\dot{x}),u\}$ не является компактным. Поэтому, как правило, без предположения выпуклозначности отображения $U(t,x,y)$ задача минимизации функционала на множестве $\mathscr{R}_U(x_0,y_0)$ не имеет решения.

Замечание 3.1. В предположении $\Gamma(U)$ (1) из [1] мы считали, что отображение $(t,x,y)\to U(t,x,y)$ является $\Sigma\otimes\mathscr{B}_{H\times H}$-измеримым. Это предположение обеспечивает нам измеримость отображения $t\to U(t,x(t),y(t))$ для любых непрерывных функций $x,y:T\to H$. В теоремах 2.1, 3.1, 3.2 и следствии 2.1 предположение $\Gamma(U)$ (1) можно заменить более естественным предположением: отображение $t\to U(t,x,y)$ измеримо для любых $x,y\in H$. Оно вместе с предположением $\Gamma_2(U)$ автоматически влечет $\Sigma\otimes\mathscr{B}_{H\times H}$-измеримость отображения $(t,x,y)\to U(t,x,y)$ [5].

Замечание 3.2. В (2.21) и (3.6) пространства $C(T,V)$ и $C(T_0,V)$ можно заменить пространствами $C(T,H)$ и $C(T_0,H)$ соответственно.

§ 4. Пример

В этом параграфе мы рассмотрим пример управляемой гиперболической системы и дадим интерпретацию полученных выше абстрактных результатов.

Пусть $T=[0,1]$ и Z — ограниченная область в R^N с гладкой границей Γ. Рассмотрим управляемую систему, описываемую гиперболическим уравнением

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-\Delta x-\sum_{i=1}^{N}D_i(k(t,|Dx_t|^2)D_i x_t)=\tilde{f}(t,z,x(t,z),x_t(t,z))u(t,z),$$

$$x|_{T\times\Gamma}=0,\quad x(0,z)=x_0(z),\quad x_t(0,z)=y_0(z), \tag{4.1}$$

$$u(t,z)\in\widetilde{U}(t,z,x(t,z),x_t(t,z))\quad \text{п. в. в}\quad T\times\Omega. \tag{4.2}$$

Здесь $D_i=\frac{\partial}{\partial z_i}$, $i=1,\dots,N$, $Dx=(D_1x,\dots,D_Nx)$ — градиент x, $DxDy=\sum\limits_{i=1}^{N}D_ixD_iy$ и $|Dx|^2=\sum\limits_{i=1}^{N}|D_ix|^2$.

Наряду с ограничениями (4.2) рассмотрим ограничения

$$u(t,z)\in\operatorname{co}\widetilde{U}(t,z,x(t,z),x_t(t,z))\quad \text{п. в. в}\quad T\times Z, \tag{4.3}$$

$$u(t,z) \in \operatorname{extco} \widetilde{U}(t,z,x(t,z),x_t(t,z)) \quad \text{п. в. в} \quad T \times Z. \tag{4.4}$$

Введем следующие предположения, которые всюду в дальнейшем считаем выполненными.

Предположение $\Gamma(k)$. *Отображение k из $T \times R^+ \to R^+$ таково, что*

(1) *отображение $t \to k(t,\mu)$ измеримо;*

(2) *отображение $\mu \to k(t,\mu)$ является непрерывным;*

(3) $0 \le k(t,\lambda^2) \le L$ *для всех* $(t,\lambda) \in T \times R^+$, $k(t,0) = 0$, $L > 0$;

(4) $k(t,\lambda^2)\lambda - k(t,\mu^2)\mu \ge d(\lambda - \mu)$ *для всех* $\lambda, \mu \in R^+$, $\lambda \ge \mu$, *при некотором* $d > 0$.

Предположение $\Gamma(\tilde{f})$. *Функция $\tilde{f} : T \times Z \times R \times R \to R$ такова, что*

(1) *функция $(t,z) \to \tilde{f}(t,z,x,y)$ измерима;*

(2) *функция $(x,y) \to \tilde{f}(t,z,x,y)$ непрерывна при почти всех (t,z);*

(3) $|\tilde{f}(t,z,x,y)| \le m$ *п. в.*, $m > 0$.

Предположение $\Gamma(\widetilde{U})$. *Многозначное отображение $\widetilde{U} : T \times Z \times R \times R \to cbR$ таково, что*

(1) *отображение $(t,z) \to \widetilde{U}(t,z,x,y)$ измеримо;*

(2) *отображение $(x,y) \to \widetilde{U}(t,z,x,y)$ непрерывно в метрике Хаусдорфа $D(\cdot,\cdot)$ на пространстве cbR;*

(3) $|\widetilde{U}(t,x,y,z)| \le a(t,z) + b(|x| + |y|)$ *п. в.*, $a(\cdot) \in L^2(T \times Z, R^+)$, $b > 0$.

Предположение $\Gamma_1(\widetilde{U})$. *Выполнены соотношения*

(1) $D(\operatorname{co}\widetilde{U}(t,z,x_1,y_1), \operatorname{co}\widetilde{U}(t,z,x_2,y_2)) \le k_2(t)(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|)$ *п. в. в* $T \times Z$, $k_2 \in L^1(T,R^+)$;

(2) $|\widetilde{U}(t,z,x,y)| \le M(t)$ *п. в. в* $T \times Z$, $M \in L^2(T,R^+)$.

Предположение $\Gamma_1(\tilde{f})$. *Имеет место неравенство*

(1) $|\tilde{f}(t,z,x_1,y_1) - \tilde{f}(t,z,x_2,y_2)| \le k_1(t)(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|)$ *п. в. в* $T \times Z$, $k_1 \in L^2(T,R^+)$.

Предположение $\Gamma_2(\widetilde{U})$. *Справедливы неравенства*

(1) $D(\widetilde{U}(t,z,x_1,y_1), \widetilde{U}(t,z,x_2,y_2)) \le k_2(t)(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|)$ *п. в. в* $T \times Z$, $k_2 \in L^1(T,R^+)$;

(2) $|\widetilde{U}(t,z,x,y)| \le M(t)$ *п. в. в* $T \times Z$, $M \in L^2(T,R^+)$.

Замечание 4.1. Так как значениями отображения $\widetilde{U}(t,z,x,y)$ являются компактные подмножества пространства $\mathscr{R}$, то $\overline{\operatorname{co}}\widetilde{U}(t,z,x,y) = \operatorname{co}\widetilde{U}(t,z,x,y)$ и $\operatorname{ext}\overline{\operatorname{co}}\widetilde{U}(t,z,x,y) \subset \widetilde{U}(t,z,x,y)$. Поэтому вместо ограничений (0.3), (0.4) мы рассматриваем ограничения (4.3) и (4.4).

Сведем управляемые системы (4.1), (4.2), а также (4.1), (4.3) и (4.1), (4.4) к управляемым системам (0.1), (0.2), (0.1), (0.3) и (0.1), (0.4) в соответствующих функциональных пространствах.

В нашем примере мы берем $p = 2$. Пусть $H_0^1(Z)$ — соболевское пространство. Тогда его сопряженным является пространство $H^{-1}(Z)$. Положим $V = H_0^1(Z)$, $H = L^2(Z)$, $V^* = H^{-1}(Z)$. Из теорем вложения для соболевских пространств хорошо известно, что вложения $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$ непрерывны, плотны и компактны.

Рассмотрим следующие формы Дирихле:

$$a_1(t,x,y) = \int\limits_Z \sum_{i=1}^N k(t,|Dx|^2)D_ixD_iy\,dz = \int\limits_Z k(t,|Dx|^2)DxDy\,dz,$$

$$a_2(x,y) = \int\limits_Z \sum_{i=1}^N D_ixD_iy\,dz = \int\limits_Z DxDy\,dz,$$

определенные на $H_0^1(Z)\times H_0^1(Z)$.

Используя предположение $\Gamma(k)(3)$, получим

$$|a_1(t,x,y)| \le L\|x\|_{H_0^1(Z)}\|y\|_{H_0^1(Z)}. \tag{4.5}$$

Поэтому существует оператор $A : T\times V \to V^*$ такой, что

$$\langle y, A(t,x)\rangle = a_1(t,x,y). \tag{4.6}$$

Из (4.5), (4.6) вытекает, что для оператора A выполняется предположение $\Gamma(A)(4)$ в [1].

Из теоремы Фубини и гипотез $\Gamma(k)(1)$–(3) следует, что функция $t\to a_1(t,x,y)$ измерима для всех $x,y\in H_0^1(Z)$. Следовательно, согласно (4.6) отображение $t\to A(t,x)$ является скалярно измеримым. Так как $H^{-1}(Z)$ — сепарабельное гильбертово пространство, отображение $t\to A(t,x)$ измеримо. Поэтому для оператора $A(t,x)$ имеет место гипотеза $\Gamma(A)(1)$ из [1].

Пусть $x_n\to x$ в $H_0^1(Z)$. Тогда, переходя, если это необходимо, к подпоследовательности, получим, что $|Dx_n(z)|^2\to|Dx(z)|^2$ п. в. Используя предположение $\Gamma(k)(2)$, выводим, что $k(t,|Dx_n(z)|^2)\to k(t,|Dx(z)|^2)$ для всех $t\in T$ при почти всех $z\in Z$. Аналогично $D_i(x_n)\to D_ix$ в $L^2(Z)$, $i=1,\dots,n$. Воспользовавшись предположением $\Gamma(k)(3)$, находим, что

$$\int\limits_Z k(t,|Dx_n|^2)Dx_nDy\,dz \to \int\limits_Z k(t,|Dx|^2)DxDy\,dz$$

для любого $y\in H_0^1(Z)$. Последнее означает, что

$$A(t,x_n)\to A(t,x) \quad \text{в } w\text{-}H^{-1}(Z),$$

т. е. отображение $x\to A(t,x)$ является деминепрерывным и, следовательно, хеминепрерывным.

Для любых $x,y\in H_0^1(Z)$ имеем

$$\langle x-y, A(t,x)-A(t,y)\rangle = \int\limits_Z k(t,|Dx|^2)Dx - k(t,|Dy|^2)Dy)(Dx-Dy)\,dz.$$

Воспользовавшись гипотезой $\Gamma(k)(4)$ и леммой 25.26(в) из [6, с. 254], получим

$$\langle x-y, A(t,x)-A(t,y)\rangle \ge c_1\|x-y\|^2_{H_0^1(Z)} \tag{4.7}$$

при некотором $c_1>0$. Следовательно, отображение $x\to A(t,x)$ монотонно. И, наконец, из равенства $k(t,0)=0$ вытекает, что $A(t,0)=0$. Поэтому из неравенства (4.7) получаем

$$\langle x, A(t,x)\rangle \ge c_1\|x\|^2_{H_0^1(Z)}.$$

Тем самым для оператора $A(t,x)$ выполняется предположение $\Gamma(A)(3)$. Таким образом, мы показали, что для оператора A верны все гипотезы из предположения $\Gamma(A)$ в [1].

Из неравенства Коши — Шварца следует, что

$$|a_2(x,y)| \le \|x\|_{H_0^1(Z)}\|y\|_{H_0^1(Z)}.$$

Поэтому существует оператор $B \in \mathscr{L}(V,V^*)$ такой, что

$$\langle y, Bx\rangle = a_2(x,y)$$

для любых $x,y \in H_1^0(Z)$. Ясно, что оператор B является симметричным и, используя неравенство Пуанкаре, получим

$$\langle x, Bx\rangle \ge c_*\|x\|^2_{H_0^1(Z)}$$

при некотором $c_* > 0$. Следовательно, для оператора $B \in \mathscr{L}(V,V^*)$ выполняется предположение $\Gamma(B)$ из [1].

В качестве пространства управлений берем пространство $Y = L^2(Z)$.

Пусть $f(t,x,y)u$, где $x,y \in H$, $u \in Y$, — функция, определенная по правилу

$$(f(t,x,y)u)(z) = \tilde f(t,z,x(z),y(z))u(z).$$

Из предположения $\Gamma(\tilde f)$ и теоремы Фубини вытекает, что $f(t,x,y) \in \mathscr{L}(Y,H)$ при почти каждом $t \in T$ и $\|f(t,x,y)\|_{\mathscr{L}(Y,H)} \le m$ п. в. Поскольку $Y = H = L^2(Z)$, легко убедиться, что оператор $f(t,x,y)$ является самосопряженным. Воспользовавшись предположением $\Gamma(\tilde f)$ и достаточно стандартными рассуждениями, получим, что отображение $t \to f(t,x,y)u$ измеримо для любых $x,y \in H$, $u \in Y$. Пусть $x_n \to x$, $y_n \to y$ в H. Не нарушая общности, мы можем считать, что $x_n(z) \to x(z)$, $y_n(z) \to y(z)$ п. в. Тогда из $\Gamma(\tilde f)(2)$ вытекает, что $(f(t,x_n,y_n)u)(z) \to (f(t,x,y)u)(z)$ п. в. на $T \times Z$. Воспользовавшись $H(\tilde f)(3)$ и теоремой Лебега об ограниченной сходимости, получим, что отображение $x,y \to f(t,x,y)u$ непрерывно для почти всех $t \in T$ и любых $u \in Y$.

Так как оператор $f(t,x,y)$ самосопряженный, для любых $h \in H$ отображение $x,y \to f(t,x,y)^*h$ непрерывно п. в. на T.

Таким образом, мы показали, что отображение $f : T \times H \times H \to \mathscr{L}(Y,H)$ удовлетворяет всем гипотезам из предположения $\Gamma(f)$ в [1].

Согласно гипотезам $\Gamma(\widetilde U)(1)$, (2) для любых $x,y \in H = L^2(Z)$ многозначное отображение $(t,z) \to \widetilde U(t,z,x(z),y(z))$ измеримо. Воспользовавшись предположением $\Gamma(\widetilde U)(3)$ и теоремой 1.0 из [7], получим, что существует последовательность $\varphi_n \in L^2(T \times Z)$, $n \ge 1$, такая, что

$$\widetilde U(t,z,x(z),y(z)) = \left\{\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t,z)}\right\} \quad \text{для всех} \quad (t,z) \in T \times Z.$$

Из теоремы Фубини следует,что при почти всех $t \in T$ каждая функция $z \to \varphi_n(t,z)$ измерима. Следовательно, согласно теореме 1.0 из [7] при почти каждом $t \in T$ многозначное отображение $z \to \widetilde U(t,z,x(z),y(z))$ измеримо. Поэтому мы можем рассмотреть многозначное отображение $(t,x,y) \to U(t,x,y)$, $x,y \in H$, определенное по правилу

$$U(t,x,y) = \{u \in Y;\ u(z) \in \widetilde U(t,z,x(z),y(z)) \text{ п. в.}\}. \tag{4.8}$$

Так как множество $\widetilde{U}(t,z,x,y)$ компактно в R, то $\operatorname{co}\widetilde{U}(t,z,x,y)=\overline{\operatorname{co}}\widetilde{U}(t,z,x,y)$. Воспользовавшись теоремой 1.5 из [7], получаем

$$\overline{\operatorname{co}}U(t,x,y)=\{u\in Y;\ u(z)\in\operatorname{co}\widetilde{U}(t,z,x(z),y(z))\ \text{п. в.}\}=\operatorname{co}U(t,x,y). \tag{4.9}$$

В соответствии со следствием 5.2 из [5]

$$\begin{aligned}\operatorname{ext}\overline{\operatorname{co}}U(t,x,y)&=\{u\in Y;\ u(z)\in\operatorname{extco}\widetilde{U}(t,z,x(z),y(z))\ \text{п. в.}\}\\&=\operatorname{extco}U(t,x,y)\subset U(t,x,y).\end{aligned} \tag{4.10}$$

Из $\Gamma(\widetilde{U})(3)$ следует, что U является отображением из $T\times H\times H$ в cbY и

$$\|U(t,x,y)\|_Y\le a_1(t)+b_1\big(\|x\|_H^2+\|y\|_H^2\big)^{1/2},$$

где

$$a_1(t)=\bigg(\int\limits_Z a^2(t,z)\,dz\bigg)^{1/2},\quad a_1\in L^2(T,R^+),\ b_1=\sqrt{2}b.$$

Следовательно, для отображения U выполняется гипотеза $\Gamma(U)(3)$.

Покажем, что многозначное отображение $t\to U(t,x,y)$ измеримо. Пусть $d_Y(v,K)$ обозначает расстояние от точки $v\in Y$ до множества $K\subset Y$ и $D_Y(\cdot,\cdot)$ — метрика Хаусдорфа на пространстве cbY. Возьмем фиксированное $v\in Y$. Так как отображение $(t,z)\to\widetilde{U}(t,z,x(z),y(z))$ измеримо, из гипотезы $\Gamma(\widetilde{U})(3)$ следует, что функция $(t,z)\to d(v(z),\widetilde{U}(t,z,x(z),y(z))$ является элементом пространства $L^2(T\times Z)$. Воспользовавшись утверждением 4.1 из [4], получаем

$$d_Y(v,U(t,x,y))=\bigg(\int\limits_Z d(v(z),\widetilde{U}(t,z,x(z),y(z)))^2\,dz\bigg)^{1/2}. \tag{4.11}$$

Следовательно, согласно теореме Фубини функция $t\to d_Y(v,U(t,x,y))$ измерима для любого $v\in Y$. Воспользовавшись теоремой 3.5 из [8], находим, что многозначное отображение $t\to U(t,x,y)$ измеримо.

Из гипотез $\Gamma(\widetilde{U})(2)$, (3) и утверждения 4.2 в [4] следует, что

$$\begin{aligned}&D_Y(U(t,x_1,y_1),U(t,x_2,y_2))\\&\qquad\le\bigg(\int\limits_Z D(\widetilde{U}(t,z,x_1(z),y_1(z)),\widetilde{U}(t,z,x_2(z),y_2(z)))^2\,dz\bigg)^{1/2}.\end{aligned}$$

Из этого неравенства и теоремы Лебега об ограниченной сходимости выводим, что отображение $(x,y)\to U(t,x,y)$ непрерывно в метрике Хаусдорфа на пространстве cbY. Таковым является и отображение $\overline{\operatorname{co}}U(t,x,y)$. Значит, для отображения U выполняется предположение $\Gamma(U)(2)$. Поскольку отображение $t\to U(t,x,y)$ измеримо, а отображение $(x,y)\to U(t,x,y)$ непрерывно, то отображение $(t,x,y)\to U(t,x,y)$ является $\Sigma\otimes\mathscr{B}_{H\times H}$-измеримым (см. замечание 3.1). Следовательно, для отображения Γ выполняется гипотеза $\Gamma(U)(1)$ из [1]. Таким образом, при выполнении предположения $\Gamma(\widetilde{U})$ для отображения U имеет место предположение $\Gamma(U)$ из [1].

Всюду в дальнейшем мы считаем, что предположения $\Gamma(\tilde{f})$ и $\Gamma(\widetilde{U})$ имеют место.

Пусть теперь выполняются предположения $\Gamma_1(\widetilde{U})$ и $\Gamma_1(\tilde{f})$. Тогда из них и (4.9), (4.11) вытекает, что

$$D_Y(\overline{\mathrm{co}}U(t,x_1,y_1),\overline{\mathrm{co}}U(t,x_2,y_2)) \le k_2(t)(\|x_1-x_2\|_H+\|y_1-y_2\|_H), \tag{4.12}$$

$$\|(f((t,x_1,y_1)-f(t,x_2,y_2))u\|_H \le M(t)k_1(t)(\|x_1-x_2\|_H+\|y_1-y_2\|_H), \tag{4.13}$$

$u\in U(t,x_2,y_2)$.

Из (4.12), (4.13) следует, что предположения $\Gamma_1(U)$ и $\Gamma_1(f)$ из [1] имеют место.

Аналогично если выполняются предположения $\Gamma_2(\widetilde{U})$, $\Gamma_1(\tilde{f})$, то предположения $\Gamma_2(\widetilde{U})$ и $\Gamma_1(\tilde{f})$ будут иметь место.

Сделаем еще одно допущение относительно начальных данных для системы (4.1), (4.2), которые в дальнейшем будем считать всегда выполненными.

Предположение Γ_0. *Выполнены соотношения* $x_0\in H_0^1(Z)$, $y_0\in L^2(Z)$.

Как обычно, пространство $L^2(T,L^2(Z))$ мы отождествляем с пространством $L^2(T\times Z)$, используя для элемента $u\in L^2(T,L^2(Z))$ представление $u(t)(z)=u(t,z)$, $t\in T$, $z\in Z$.

Решение управляемой системы (4.1), (4.2) мы понимаем в слабом смысле.

Определение. Пара $\{(x,\partial x/\partial t),u\}$, $x\in C(T,H_1^0(Z))\hookrightarrow C(T,L^2(Z))$, $\partial x/\partial t\in L^2(T,H^{-1}(Z))$, $u\in L^2(T\times Z)=L^2(T,L^2(Z))$ называется *решением управляемой системы* (4.1), (4.2), если для почти всех $t\in T$ и всех $v\in H_1^0(Z)$ выполняются равенство

$$\frac{d^2}{dt^2}\int\limits_Z x(t,z)v(z)\,dz+\int\limits_Z k(t,|Dx_t|^2)Dx_tDv\,dz+\int\limits_Z DxDv\,dz = \int\limits_Z \tilde{f}(t,z,x,x_t)u(t,z)v(z)\,dz$$

и включение (4.2).

Аналогично определяются и решения управляемых систем (4.1), (4.3) и (4.1), (4.4).

Из следствия 3 [9, гл. 4, § 8] вытекает, что $u(t)\in U(t,x(t),\dot{x}(t))$ п. в. на T тогда и только тогда, когда $u(t)(z)=u(t,z)\in\widetilde{U}(t,z,x(t,z),\dot{x}_t(t,z))$ п. в. на $T\times Z$. Тогда из (4.8) находим, что множество решений управляемой системы (4.1), (4.2) совпадает со множеством решений управляемой системы (0.1), (0.2). Аналогично из (4.9), (4.10) получаем, что множество решений управляемой системы (4.1), (4.3) и (4.1), (4.4) совпадает с множеством решений управляемых систем (0.1), (0.3) и (0.1), (0.4) соответственно.

Пусть $\mathscr{R}_{\widetilde{U}}(x_0,y_0)$, $\mathscr{R}_{\mathrm{co}\,\widetilde{U}}(x_0,y_0)$ и $\mathscr{R}_{\mathrm{extco}\,\widetilde{U}}(x_0,y_0)$ — множества решений управляемых систем (4.1), (4.2), а также (4.1), (4.3) и (4.1), (4.4) соответственно.

Теорема 4.1. *Пусть выполняются предположения* $\Gamma(\tilde{f})$, $\Gamma(\widetilde{U})$. *Тогда существует пара* $\{(x,x_t),u\}\in C\big(T,H_0^1(Z)\big)\times C(T,L^2(Z))\times L^2(T\times Z)\hookrightarrow C(T,L^2(Z))\times C(T,L^2(Z))\times L^2(T\times Z)$ *такая, что*

$$\{(x,x_t),u\}\in\mathscr{R}_{\mathrm{extco}\,\widetilde{U}}(x_0,y_0)\subset\mathscr{R}_{\widetilde{U}}(x_0,y_0)\subset\mathscr{R}_{\mathrm{co}\,\widetilde{U}}(x_0,y_0).$$

Более того, $\mathscr{R}_{\mathrm{co}\,\widetilde{U}}(x_0,y_0)$ *является компактным подмножеством любого из пространств*

$$\begin{gathered} C(T,H_0^1(Z))\times C(T,L^2(Z))\times w\text{-}L^2(T\times Z),\\ C(T,L^2(Z))\times C(T,L^2(Z))\times w\text{-}L^2(T\times Z). \end{gathered} \tag{4.14}$$

Теорема вытекает из теоремы 4.1 в [1].

Теорема 4.2. *Пусть выполняются гипотезы* $\Gamma(\widetilde{U})(1)$, $\Gamma(\tilde{f})(1)$, (3) *и* $\Gamma_1(\widetilde{U})$, $\Gamma_1(\tilde{f})$. *Тогда справедливо равенство*

$$\mathscr{R}_{\operatorname{co}\widetilde{U}}(x_0,y_0)=\overline{\mathscr{R}_{\widetilde{U}}(x_0,y_0}=\overline{\mathscr{R}_{\operatorname{extco}\widetilde{U}}(x_0,y_0)},$$

где черта означает замыкание в топологии любого из пространств (4.14).

Теорема вытекает из следствия 5.2 в [1].

Пусть μ_0 — мера Лебега на пространстве $T\times L$ и $D_{L^2}(\cdot,\cdot)$ — метрика Хаусдорфа на пространстве $cbL^2(Z)$.

Теорема 4.3. *Пусть выполняются гипотезы* $\Gamma(\widetilde{U})(1)$, $\Gamma(\tilde{f})(1)$, (3) *и* $\Gamma_1(\tilde{f})$, $\Gamma_2(\widetilde{U})$. *Если для любого* $\{(x,x_t),u\}\in\mathscr{R}_U(x_0,y_0)$ *справедливо неравенство*

$$\mu_0\{(t,z)\in T\times Z;\ \widetilde{U}(t,z,x(t,z),x_t(t,z))\neq\operatorname{co}\widetilde{U}(t,z,x(t,z),x_t(t,z))\}>0,\quad(4.15)$$

то

$$\begin{aligned}\mathscr{R}_{\operatorname{co}\widetilde{U}}(x_0,y_0)&=\overline{\mathscr{R}_{\widetilde{U}}(x_0,y_0)}=\overline{\mathscr{R}_{\operatorname{extco}\widetilde{U}}(x_0,y_0)}\\&=\overline{\mathscr{R}_{\operatorname{co}\widetilde{U}}(x_0,y_0)\backslash\mathscr{R}_{\widetilde{U}}(x_0,y_0)}=\overline{\mathscr{R}_{\operatorname{co}\widetilde{U}}(x_0,y_0)\backslash\mathscr{R}_{\operatorname{extco}\widetilde{U}}(x_0,y_0)},\end{aligned}$$

где черта означает замыкание в топологии любого из пространств (4.14).

Доказательство. Из утверждения 4.2 [4] и (4.8), (4.9) получаем, что

$$\begin{aligned}&\int_T D_{L^2}(U(t,x(t),\dot{x}(t)),\operatorname{co}U(t,x(t),\dot{x}(t)))^2\,dt\\&\qquad\leq\int_T\int_Z D(\widetilde{U}(t,z,x(t,z),x_t(t,z)),\operatorname{co}\widetilde{U}(t,z,x(t,z),x_t(t,z)))^2\,dzdt\\&\qquad\qquad\leq 2\int_T D_{L^2}(U(t,x(t),\dot{x}(t)),\operatorname{co}U(t,x(t),\dot{x}(t)))^2\,dt.\quad(4.16)\end{aligned}$$

Согласно (4.16) неравенство (4.15) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\mu\{t\in T;\ U(t,x(t),\dot{x}(t))\neq\operatorname{co}U(t,x(t),\dot{x}(t))\}>0.$$

Теперь теорема вытекает из теоремы 4.3 и следствия 2.1.

Теорема 4.4. *Пусть выполняются гипотезы* $\Gamma(\widetilde{U})(1)$, $\Gamma(\tilde{f})(1)$, (3) *и* $\Gamma_1(\tilde{f})$, $\Gamma_2(\widetilde{U})$. *Тогда множество* $\mathscr{R}_{\widetilde{U}}(x_0,y_0)$ *является замкнутым в любом из пространств* (4.14) *тогда и только тогда, когда для любых* $\{(x,x_t),u\}\in\mathscr{R}_{\widetilde{U}}(x_0,y_0)$ *имеет место неравенство*

$$\mu_0\{(t,z)\in T\times Z;\ \widetilde{U}(t,z,x(t,z),x_t(t,z))\neq\operatorname{co}\widetilde{U}(t,z,x(t,z),x_t(t,z))\}=0.\quad(4.17)$$

Доказательство. Воспользовавшись неравенством (4.16), получаем, что равенство (4.17) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\mu\{t\in T;\ U(t,x(t),\dot{x}(t))\neq\operatorname{co}U(t,x(t),\dot{x}(t))\}=0.$$

Теперь теорема вытекает из теоремы 3.1.

Пусть $0\leq t_0<1$ и $T_0=[t_0,1]$. Рассмотрим пространства

$$\begin{gathered}C(T_0,H_0^1(Z))\times C(T_0,L^2(Z))\times w\text{-}L^2(T_0\times Z),\\C(T_0,L^2(Z))\times C(T_0,L^2(Z))\times w\text{-}L^2(T_0\times Z).\end{gathered}\quad(4.18)$$

Мы можем рассмотреть управляемые системы (4.1), (4.2), а также (4.1), (4.3) и (4.1), (4.4), определенные на $T_0 \times Z \times R \times R$, с начальными условиями $x|_{T_0\times\Gamma} = 0$, $x(t_0, z) = x_0(z)$, $x_t(t_0, z) = y_0(z)$.

Множества решений этих систем будем обозначать через $\mathscr{R}_{\widetilde{U}}(x_0, y_0, t_0)$, $\mathscr{R}_{\mathrm{co}\,\widetilde{U}}(x_0, y_0, t_0)$ и $\mathscr{R}_{\mathrm{extco}\,\widetilde{U}}(x_0, y_0, t_0)$. Ясно, что при выполнении предположений теорем 4.1–4.3 все утверждения этих теорем будут справедливы также и для множеств $\mathscr{R}_{\widetilde{U}}(x_0, y_0, t_0)$, $\mathscr{R}_{\mathrm{co}\,\widetilde{U}}(x_0, y_0, t_0)$ и $\mathscr{R}_{\mathrm{extco}\,\widetilde{U}}(x_0, y_0, t_0)$ в пространствах (4.18).

Пусть $E_i \subset R^N$ — множества вида

$$E_i = \left[a_1^i, b_1^i\right) \times \ldots \times \left[a_N^i, b_N^i\right). \tag{4.19}$$

Функцию $w = (u, v) : Z \to R^2$ будем называть *ступенчатой*, если существует конечный набор множеств E_i, $i = 1, \ldots, k$, вида (4.19) такой, что $Z \subset \bigcup_{i=1}^{k} E_i$, $E_i \cap E_j = \varnothing$, $i \neq j$, и на каждом из множеств $E_i \cap Z$ функция $w = (u, v)$ постоянна. Легко показать, что для любой функции $(x, y) \in L^2(Z) \times L^2(Z)$ существует последовательность (u_n, v_n), $n \geq 1$, ступенчатых функций, сходящаяся к (x, y) п. в. на Z.

Теорема 4.5. *Пусть выполняются гипотезы* $\Gamma(\widetilde{U})(1)$, $\Gamma(\tilde{f})(1)$, (3) *и* $\Gamma_1(\tilde{f})$, $\Gamma_2(\widetilde{U})$. *Для того чтобы для любых* $0 \leq t_0 < 1$, $x_0 \in H_0^1(Z)$, $y_0 \in L^2(Z)$ *множество* $\mathscr{R}_{\widetilde{U}}(x_0, y_0, t_0)$ *было замкнутым в топологии любого из пространств* (4.18), *необходимо и достаточно, чтобы для любых* $x, y \in R$ *имело место равенство*

$$\mu_0\{(t, z) \in T \times Z;\ \widetilde{U}(t, z, x, y) \neq \mathrm{co}\,\widetilde{U}(t, z, x, y)\} = 0. \tag{4.20}$$

Доказательство. Пусть для любых $x, y \in R$ имеет место равенство (4.20). Тогда очевидно, что для любой ступенчатой функции $(u, v) : Z \to R^2$

$$\mu_0\{(t, z) \in T \times Z;\ \widetilde{U}(t, z, u(z), v(z)) \neq \mathrm{co}\,\widetilde{U}(t, z, u(z), v(z))\} = 0. \tag{4.21}$$

Возьмем любую функцию $(x, y) \in L^2(Z) \times L^2(Z)$. Существует последовательность $(u_n(z), v_n(z))$, $n \geq 1$, ступенчатых функций, сходящаяся п. в. на Z к $(x(z), y(z))$. Тогда из (4.21) вытекает, что

$$\mu_0\{(t, z) \in T \times Z;\quad \widetilde{U}(t, z, x(z), y(z)) \neq \mathrm{co}\,\widetilde{U}(t, z, x(z), y(z))\} = 0 \tag{4.22}$$

для любых $(x, y) \in L^2(Z) \times L^2(Z)$.

В свою очередь, если равенство (4.22) выполняется для любых $(x, y) \in L^2(Z) \times L^2(Z)$, то, выбирая в качестве $(x(z), y(z))$ постоянные функции, приходим к равенству (4.20). Таким образом, равенства (4.20) и (4.22) эквивалентны. Воспользовавшись (4.8), (4.9) и утверждением 4.2 из [4], выводим неравенство

$$\begin{aligned} &\int_T D_{L^2}(U(t, x, y), \mathrm{co}\,U(t, x, y))^2\,dt \\ &\qquad \leq \int_T \int_Z D(\widetilde{U}(t, z, x(z), y(z)), \mathrm{co}\,\widetilde{U}(t, z, x(z), y(z)))^2\,dz dt \\ &\qquad\qquad \leq 2 \int_T D_{L^2}(U(t, x, y), \mathrm{co}\,U(t, x, y))^2\,dt. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Из (4.22), (4.23) следует, что равенство (3.7) имеет место для любых $x, y \in H = L^2(Z)$ тогда и только тогда, когда имеет место равенство (4.20) для любых $x, y \in R$. Теперь теорема вытекает из теоремы 3.1. Теорема доказана.

§ 5. Приложение

Пусть $g : T \times H \times H \times Y \to \overline{R} = R \cup \{+\infty\}$ — функция такая, что выполняются предположения $\Gamma(g)$:

(1) функция $g(t, x, y, u)$ является $\Sigma \otimes \mathscr{B}_{H \times H \times Y}$-измеримой;

(2) функция $(x, y, u) \to g(t, x, y, u)$ полунепрерывна снизу п. в.;

(3) функция $u \to g(t, x, y, u)$ выпукла для каждых $x, y \in H$ п. в.;

(4) $g(t, x, y, u) \geq \psi(t) - c(|x| + |y| + \|u\|_Y)$ для всех $x, y \in H$, $u \in Y$ п. в., где $\psi \in L^1(T, R^+)$, $c > 0$.

Из $\Gamma(g)(1)$ следует, что для любых $x, y \in L^1(T, H)$, $u \in L^1(T, Y)$ функция $t \to g(t, x(t), y(t), u(t))$ измерима. Поэтому согласно $\Gamma(g)(4)$ будет определен функционал $J : L^1(T, H) \times L^1(T, H) \times L^1(T, Y) \to \overline{R}$,

$$J(x, y, u) = \int\limits_T g(t, x(t), y(t), u(t))\, dt.$$

Всюду в дальнейшем предполагаем, что предположение $\Gamma(g)$ имеет место.

Рассмотрим задачу (P) минимизации функционала

$$J(x, \dot{x}, u) = \int\limits_T g(t, x(t), \dot{x}(t), u(t))\, dt \tag{5.1}$$

на решениях управляемой системы (0.1), (0.3).

Теорема 5.1. *Пусть выполняются предположения* $\Gamma(U)$, $\Gamma(f)$ *из* [1]. *Тогда задача* (P) *имеет решение.*

Согласно теореме 1.1 из [10] функционал $\{(x, \dot{x}), u\} \to J(x, \dot{x}, u)$ секвенциально полунепрерывен снизу на пространстве $C(T, H) \times C(T, H) \times w\text{-}L^q(T, Y)$. Теперь теорема вытекает из теоремы 4.1 [1].

Приведем аналог теоремы 5.1 применительно к управляемой системе (4.1), (4.3).

Обозначим через Σ_0 σ-алгебру измеримых по Лебегу подмножеств из $T \times Z$. Пусть $\tilde{g} : T \times Z \times R \times R \times R \to \overline{R}$ — функция такая, что выполняются гипотезы $\Gamma(\tilde{g})$:

(1) функция $\tilde{g}(t, z, x, y, u)$ является $\Sigma \otimes \mathscr{B}_{R^3}$-измеримой;

(2) функция $(x, y, u) \to \tilde{g}(t, z, x, y, u)$ полунепрерывна снизу п. в. на $T \times Z$;

(3) функция $u \to \tilde{g}(t, z, x, y, u)$ выпукла для любых x, y п. в. на $T \times Z$;

(4) $\tilde{g}(t, z, x, y, u) \geq \psi(t, z) - c(|x| + |y| + |u|)$ для всех $(x, y, u) \in R^3$ п. в. на $T \times Z$, где $\psi \in L^2(T \times Z, R^+)$, $c > 0$.

Всюду в дальнейшем предполагаем, что предположение $\Gamma(\tilde{g})$ имеет место.

Из $\Gamma(\tilde{g})(1)$ следует, что для любых $x, y, u \in L^2(Z)$ функция $(t, z) \to g(t, z, x(z), y(z), u(z))$ измерима. Тогда в соответствии с $\Gamma(\tilde{g})(4)$ будет определена функция $g : T \times L^2(Z) \times L^2(Z) \times L^2(Z) \to \overline{R}$,

$$g(t, x, y, u) = \int\limits_Z \tilde{g}(t, z, x(z), y(z), u(z))\, dz.$$

Лемма 5.1. *Функция* $g(t, x, y, u)$ *удовлетворяет предположению* $\Gamma(g)$ *для пространств* $H = Y = L^2(Z)$.

Доказательство. То, что функция g удовлетворяет гипотезам $\Gamma(g)(3)$, $\Gamma(g)(4)$, очевидно. Покажем, что функция $g(t, x, y, u)$ удовлетворяет гипотезам $\Gamma(g)(1)$, (2).

Рассмотрим функцию

$$\tilde{v}(t,z,x,y,u) = \tilde{g}(t,z,x,y,u) - \psi(t,z) + c(|x| + |y| + |u|).$$

Очевидно, что функция $\tilde{v}(t,z,x,y,u)$ является $\Sigma_0 \otimes \mathscr{B}_{R^3}$-измеримой, функция $(x,y,u) \to \tilde{v}(t,z,x,y,u)$ полунепрерывна снизу п. в. на $T \times Z$ и $\tilde{v}(t,z,x,y,u) \geq 0$ п. в. на $T \times Z$. Тогда согласно теореме 1 из [11] существует монотонно возрастающая последовательность функций $\tilde{v}_n : T \times Z \times R \times R \times R \to R^+$, $n \geq 1$, такая, что каждая из функций $\tilde{v}_n$ обладает следующими свойствами:

(а) функция $(t,z) \to \tilde{v}_n(t,z,x,y,u)$ измерима для каждых $(x,y,u) \in R^3$;

(б) функция $(x,y,u) \to \tilde{v}_n(t,z,x,y,u)$ непрерывна для каждого $(t,z) \in T \times Z$;

(в) функция $\tilde{v}_n(t,z,x,y,u)$ ограничена на $T \times Z \times R \times R \times R$;

(г) $\lim\limits_{n\to\infty} v_n(t,z,x,y,u) = \tilde{v}(t,z,x,y,u)$ п. в. на $T \times Z$.

Из (а)–(в) следует, что будет определена функция $v_n : T \times L^2(Z) \times L^2(Z) \times L^2(Z) \to R$,

$$v_n(t,x,y,u) = \int\limits_Z \tilde{v}_n(t,z,x(z),y(z),u(z))\,dz,$$

такая, что

(a') функция $t \to v_n(t,x,y,u)$ измерима;

(б$'$) функция $(x,y,u) \to v_n(t,x,y,u)$ непрерывна для каждого $t \in T$.

Из (а$'$), (б$'$) получаем, что

(в$'$) функция (t,x,y,u) является $\Sigma \otimes \mathscr{B}_{L^2(Z)\times L^2(Z)\times L^2(Z)}$-измеримой.

Пусть $v : T \times L_2(Z) \times L_2(Z) \times L_2(Z) \to R$ — функция, определенная по формуле

$$v(t,x,y,u) = \int\limits_Z \tilde{v}(t,z,x(z),y(z),u(z))\,dz.$$

Тогда из (г$'$) и леммы Фату следует, что

$$v(t,x,y,u) = \lim_{n\to\infty} v_n(t,x,y,u) \quad \text{п. в. на} \quad T. \tag{5.2}$$

Из (5.2), (б$'$), (в$'$) следует, что функция $v(t,x,y,u)$ будет $\Sigma \otimes \mathscr{B}_{L^2(Z)\times L^2(Z)\times L^2(Z)}$-измеримой, а функция $(x,y,u) \to v(t,x,y,u)$ полунепрерывна снизу п. в. на T.

Так как

$$v(t,x,y,u) = g(t,x,y,u) + g_1(t,x,y,u),$$

$$g_1(t,x,y,u) = \int\limits_Z \big(c(|x(z)| + |y(z)| + |u(z)|) - \psi(t,z)\big)\,dz$$

и функция $t \to g_1(t,x,y,u)$ измерима, а функция $(x,y,u) \to g_1(t,x,y,u)$ непрерывна п. в. на T, то функция $g(t,x,y,u)$ удовлетворяет гипотезам $\Gamma(g)(1)$, (2). Лемма доказана.

Пусть

$$\widetilde{J}(x,x_t,u) = \int\limits_T \int\limits_Z \tilde{g}(t,z,x(t,z),x_t(t,z),u(t,z))\,dz\,dt,$$

$$x \in C(T,L^2(Z)), \quad x_t \in C(T,L^2(Z)), \quad u \in L^2(T \times Z).$$

Рассмотрим задачу $(\widetilde{P})$ минимизации функционала $\widetilde{J}(x,x_t,u)$ на решениях управляемой системы (4.1), (4.3).

Теорема 5.2. *Пусть выполняются предположения* $\Gamma(\tilde{f})$, $\Gamma(\widetilde{U})$. *Тогда задача* $(\widetilde{P})$ *имеет решение.*

Теорема вытекает из теоремы 4.1, леммы 5.1 и теоремы 2.1 из [11].

§ 6. Комментарии

Как указывалось в замечании 5.1 [1], вместо предположения $\Gamma_1(f)$ [1] более естественным кажется выполнение неравенства (5.28) [1]. Если мы обратимся к нашему примеру, то из гипотезы $\Gamma_1(\tilde f)$, которая является наиболее естественной, для оператора $f(t,x,y)\in\mathscr{L}(Y,H)$, $Y=L^2(Z)$, $H=L^2(Z)$,

$$(f(t,x,y)u)(z)=\tilde f(t,z,x(z),y(z))u(z), \tag{6.1}$$

$x,y\in H$, $u\in Y$, неравенство (5.28) [1] не выполняется . Тем не менее при выполнении гипотез $\Gamma_1(\tilde f)$ и $\Gamma_1(\widetilde U)$ для оператора $f(t,x,y)$ гипотеза $\Gamma_1(f)$ выполняется (см. (4.13)).

В работах [12, 13] рассматривается задача минимизации функционала (6.1) на решениях управляемой системы

$$\ddot x(t)+A(t,\dot x(t))+Bx(t)=f(t,x(t))u(t)\quad \text{п. в.}$$

с ограничениями на управление

$$u(t)\in U(t),$$

где $U: T\to Y$ — измеримая многозначная функция, значениями которой являются выпуклые, слабо компактные множества из Y. В работе [12] предполагается, что Y — сепарабельное банахово пространство, а в [13], — что Y — сепарабельное рефлексивное банахово пространство. Здесь же рассматриваются примеры. В работе [12] приведен тот же пример, что и у нас, но при несколько иных предположениях. Вместо гипотез $\Gamma(\tilde f)(3)$ и $\Gamma(\widetilde U)(4)$ здесь предполагалось, что выполняется неравенство

$$\begin{aligned}&|\tilde f(t,z,x)|\le a_1(t,z)+b_1(z)|x|\quad \text{п. в.},\\ &a_1(\cdot)\in L^2(T\times Z),\quad b_1(\cdot)\in L^\infty(Z),\end{aligned} \tag{6.2}$$

а для измеримого многозначного отображения $\widetilde U: T\times Z\to R$ — неравенство

$$\|\widetilde U(t,\cdot)\|_Y\le r(t),\quad r(\cdot)\in L^\infty(T),\quad Y=L^2(Z). \tag{6.3}$$

С помощью неравенства (6.2) показано, что функция $f(t,x)$, определенная по правилу

$$f(t,x)(z)=\tilde f(t,z,x(z)),\quad x(\cdot)\in H=L^2(Z),$$

является элементом пространства $L^2(Z)$. Отсюда сделан вывод, что оператор $f(t,x)$, определенный по правилу (6.1), представляет собой элемент пространства $\mathscr{L}(Y,H)$, $Y=L^2(Z)$, $H=L^2(Z)$. Однако для того чтобы $f(t,x)\in\mathscr{L}(Y,H)$, необходимо, чтобы для любого $u\in Y$ функция $f(t,x)u$ была элементом пространства H, что не вытекает из неравенства (6.2). Согласно (6.2) $f(t,x)$ является элементом только пространства $\mathscr{L}(L^\infty(Z),L^2(Z))$.

Подобные предположения используются и в примере работы [13], где в качестве пространства управлений Y берется пространство $L^\infty(Z)$. Хотя в этом примере $f(t,x)\in\mathscr{L}(L^\infty(Z),L^2(Z))$, пространство $Y=L^\infty(Z)$ не является ни сепарабельным, ни рефлексивным.

Более того, доказательство основной теоремы 3.1 в [12] некорректно. Чтобы рассуждения, применяемые для получения соотношений (9) [12, с. 303], были корректными, нужно, чтобы функции $\|f(t,x_n(t))^*h(t)\|_{Y^*}$ были элементами пространства $L^2(T,R^+)$, поскольку u_n, $n\ge1$, рассматриваются как элементы пространства $L^2(Y)$. Однако условия роста на f (см. гипотезу $H(f)(3)$ [12, с. 299]) только гарантируют, что функции $\|f(t, x_n(t))^* h(t)\|_{Y^*}$ являются элементами пространства $L^1(T, R^+)$. Поэтому в рамках сделанных предположений теорему 3.1 в [12] нельзя считать доказанной. Цель нашего приложения — устранить ошибки в [12, 13].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Толстоногов А. А.* Свойства решений эволюционных управляемых систем второго порядка. I // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 4. С. 907–923.
2. *Куратовский К.* Топология. М.: Мир, 1966. Т. 1.
3. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1074.
4. *Tolstonogov A. A., Tolstonogov D. A.* L_p-continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values: Existence theorems // Set-Valued Anal. 1996. V. 4, N 3. P. 173–203.
5. *Толстоногов А. А.* К теореме Скорца — Драгони для многозначных отображений с переменной областью определения // Мат. заметки. 1990. Т. 48, № 5. С. 109–120.
6. *Zeidler E.* Nonlinear Functional Analysis and its Applications. New York: Springer-Verl., 1990.
7. *Hiai F., Umegaki H.* Integrals, conditional expectations, and martingales of multivalued functions // J. Multivariate Anal. 1977. V. 7. P. 149–182.
8. *Himmelberg C. J.* Measurable relations // Fund. Math. 1975. V. 87. P. 53–72.
9. *Шварц Л.* Анализ. М.: Мир, 1972. Т. 1.
10. *Balder E. J.* Necessary and sufficient conditions for L_1-strong-weak lower semicontinuity of integral functionals // Nonlinear Anal. 1987. V. 11, N 12. P. 1399–1404.
11. *Pappas G. S.* An approximation result for normal integrands and applications to relaxed controls theory // J. Math. Anal. Appl. 1983. V. 93. P. 132–141.
12. *Papageorgiou N. S.* Optimal control of nonlinear second order evolution equations // Glas. Mat. Ser. III. 1992. V. 27. P. 297–311.
13. *Ahmed N. U., Kerbal S.* Optimal control of nonlinear second order evolution equations // J. Appl. Math. Stochastic Anal. 1993. V. 6, N 2. P. 123–136.

Статья поступила 10 января 2001 г.

Толстоногов Александр Александрович
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск 664033
aatol@icc.ru