Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2002. Том 43, № 5

УДК 512:519.4

О КОНЕЧНОЙ БАЗИРУЕМОСТИ МНОГООБРАЗИЙ ПОЛУГРУПП

В. Ю. Попов

Аннотация: Не существует алгоритма, определяющего по произвольной рекурсивной системе полугрупповых тождеств, будет ли многообразие, заданное этой системой, конечно базируемо.

Ключевые слова: тождество, многообразие, полугруппа

Первые примеры не конечно базируемых многообразий полугрупп были приведены в работах [1, 2]. В работах [3–5] построены примеры бесконечно базируемых многообразий групп. В [6] доказано существование бесконечно базируемого многообразия альтернативных алгебр над полем характеристики 2. Многообразие алгебр Ли простой характеристики p, не имеющее конечного базиса тождеств, построено в [7]. Примеры бесконечно базируемых многообразий полугрупп и колец, порожденных конечной алгеброй, построены в работах [8, 9]. В [10] доказано, что произвольное многообразие ассоциативных алгебр над полем характеристики 0 конечно базируемо. Серия работ посвящена проблеме конечной базируемости многообразий универсальных алгебр (см. обзор [11]). В частности, в [12] доказано, что любое конгруэнц-дистрибутивное многообразие конечной сигнатуры, порожденное конечной алгеброй, конечно базируемо, более того, по порождающей алгебре можно эффективно выписать конечную систему тождеств, задающую многообразие. Однако, как показано в [13], не существует алгоритма, определяющего по произвольному конечно базируемому многообразию группоидов, будет ли всякое его подмногообразие конечно базируемым. В [14] доказано, что не существует алгоритма, определяющего по произвольной рекурсивной системе кольцевых тождеств Σ, будет ли многообразие $\operatorname{var}\Sigma$ конечно базируемо. Как отмечено в [15], доказательство того, что та или иная явно выписанная бесконечная система полугрупповых тождеств не обладает конечным базисом, как правило, не представляет существенной трудности. Имеется ряд признаков бесконечной базируемости полугрупповых многообразий [8, 16]. Тем не менее общего алгоритма для распознавания конечной базируемости полугрупповых систем тождеств не существует.

Теорема. *Не существует алгоритма, определяющего по произвольной рекурсивной системе полугрупповых тождеств Σ, будет ли многообразие* $\operatorname{var}\Sigma$ *конечно базируемо.*

Доказательство теоремы основано на интерпретации работы двухленточной машины Минского. Пусть $\mathbb{P}$ — некоторое рекурсивно перечислимое нерекурсивное множество натуральных чисел, $\mathfrak{p}$ — частичная характеристическая функция множества $\mathbb{P}$. Обозначим через M двухленточную машину Минского, вычисляющую функцию $\mathfrak{p}$. В дальнейшем мы будем полагать, что

$q_0, q_1, q_2, \dots, q_m$ — внутренние состояния машины M, где q_1 — начальное состояние, q_0 — заключительное состояние. Если машина находится в состоянии q_i и j-я лента сдвинута на ξ_j ячеек влево, то будем говорить, что M *находится в конфигурации* $q_i\xi_1\xi_2$.

Пусть $\mathfrak{S}$ — многообразие всех полугрупп. Обозначим через $F\mathfrak{S}$ полугруппу, свободную в многообразии $\mathfrak{S}$ и имеющую счетное множество свободных образующих $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$, через $F_n\mathfrak{S}$ — полугруппу ранга n, свободную в многообразии $\mathfrak{S}$, множество свободных образующих которой равно множеству $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. В дальнейшем нам понадобится бесконечная последовательность $t_1, t_2, t_3, \dots, t_i, t_{i+1}, \dots$ из трех символов 1, 2, и 3, для которой $t_1t_2\dots t_i$ — бесквадратное слово, т. е. слово, избегающее слово x^2, при любом i, $i \in \mathbb{N}$. Мы воспользуемся способом построения такой последовательности, предложенным в [17] (см. также [4, утверждение 3.2]). Обозначим через η функцию, определенную на множестве натуральных чисел и принимающую значения на множестве $\{0, 1\}$, такую, что $\eta(2n) = 0$, $\eta(2n-1) = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Пусть $a_1a_2\dots a_r$ — произвольный элемент полугруппы $\{1, 2, 3\}^+$ такой, что $a_i \in \{1, 2, 3\}$ для любого $1 \le i \le r$. Рассмотрим отображение ϕ полугруппы $\{1, 2, 3\}^+$, определяемое равенствами

$$\phi(a_i) = b_{a_i,\eta(i)}, \quad 1 \le i \le r,$$

$$b_{1,0} = 321,\ b_{2,0} = 132,\ b_{3,0} = 213,\ b_{1,1} = 123,\ b_{2,1} = 231,\ b_{3,1} = 312.$$

Отображение ϕ порождает требуемую последовательность $U_n = \phi^n(1)$, $n \in \mathbb{N}$. Легко понять, что и отображение $\bar{\phi}$, определяемое равенствами

$$\bar{\phi}(a_i) = \overline{b_{a_i,\eta(i)}}, \quad 1 \le i \le r,$$

$$\overline{b_{1,0}} = 123,\ \overline{b_{2,0}} = 231,\ \overline{b_{3,0}} = 312,\ \overline{b_{1,1}} = 321,\ \overline{b_{2,1}} = 132,\ \overline{b_{3,1}} = 213,$$

порождает требуемую нам последовательность $\overline{U_n} = \bar{\phi}^n(1)$.

Пусть $P_{k,i}(e_1, e_2)$, $k \ge 4$, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, — элемент полугруппы $F_2\mathfrak{S}$, имеющий вид $e_1{e_2}^{k+i}e_1e_1$. В соответствии с рассмотренными выше отображениями ϕ и $\bar{\phi}$, а также рассматриваемым нами вариантом машины Минского M определим следующую модификацию полугруппы $S(M, \phi)$.

Пусть $S(M, \phi)$ — полугруппа с множеством образующих

$$\{1, 2, 3, q_i, Q_i, l_j, r_j, l'_s, r'_s, A, B, C, D, E, F, G \mid i, j \in \mathbb{Z},$$
$$0 \le i \le m, -1 \le j \le 1, s \in \{-1, 1\}\}.$$

Согласно со следующей таблице произвольной команде $q_i\delta_1\delta_2 \to q_j\varepsilon_1\varepsilon_2$ машины Минского M в зависимости от значений δ_1 и δ_2 поставим в соответствие некоторое определяющее соотношение полугруппы $S(M, \phi)$:

δ_1	δ_2	СООТНОШЕНИЕ
1	1	$A1l_0q_ir_01B = A1l_{\varepsilon_1}Q_jr_{\varepsilon_2}1B$
0	1	$21l_0q_ir_01B = 21l_{\varepsilon_1}Q_jr_{\varepsilon_2}1B$
1	0	$A1l_0q_ir_012 = A1l_{\varepsilon_1}Q_jr_{\varepsilon_2}12$
0	0	$21l_0q_ir_012 = 21l_{\varepsilon_1}Q_jr_{\varepsilon_2}12$

Пусть, кроме того, полугруппа $S(M,\phi)$ удовлетворяет следующим определяющим соотношениям:

$$l_0 1 = 1 l_0,\ l_0 2 = 2 l_0,\ l_0 3 = 3 l_0,\ 1 l_1 = l_1' \overline{b_{1,1}},\ 2 l_1 = l_1' \overline{b_{2,1}},\ 3 l_1 = l_1' \overline{b_{3,1}},\ 1 l_1' = l_1 \overline{b_{1,0}},$$

$$2 l_1' = l_1 \overline{b_{2,0}},\ 3 l_1' = l_1 \overline{b_{3,0}},\ A l_1' = A l_0,\ \overline{b_{1,1}} l_{-1} = l_{-1}' 1,\ \overline{b_{2,1}} l_{-1} = l_{-1}' 2,\ \overline{b_{3,1}} l_{-1} = l_{-1}' 3,$$

$$\overline{b_{1,0}} l_{-1}' = l_{-1} 1,\ \overline{b_{2,0}} l_{-1}' = l_{-1} 2,\ \overline{b_{3,0}} l_{-1}' = l_{-1} 3,\ A l_{-1}' = A l_0,\ r_0 1 = 1 r_0,\ r_0 2 = 2 r_0,$$

$$r_0 3 = 3 r_0,\ r_1 1 = b_{1,1} r_1',\ r_1 2 = b_{2,1} r_1',\ r_1 3 = b_{3,1} r_1',\ 1 r_1' = b_{1,0} r_1,\ 2 r_1' = b_{2,0} r_1,$$

$$3 r_1' = b_{3,0} r_1,\ r_1' B = r_0 B,\ r_{-1} b_{1,1} = 1 r_{-1}',\ r_{-1} b_{2,1} = 2 r_{-1}',\ r_{-1} b_{3,1} = 3 r_{-1}',$$

$$r_{-1}' b_{1,0} = 1 r_{-1},\ r_{-1}' b_{2,0} = 2 r_{-1},\ r_{-1}' b_{3,0} = 3 r_{-1},\ r_{-1}' B = r_0 B,\ l_0 Q_j r_0 = l_0 q_j r_0,$$

где $0 \le j \le m$. Обозначим через Σ систему определяющих соотношений полугруппы $S(M,\phi)$. Рассмотрим отображение Φ, заданное следующим образом:

$$\Phi(1) = P_{k,1}(e_1,e_2), \Phi(2) = P_{k,2}(e_1,e_2), \Phi(3) = P_{k,3}(e_1,e_2),$$

$$\Phi(q_i) = P_{k,4+i}(e_1,e_2), \Phi(Q_i) = P_{k,5+m+i}(e_1,e_2), \Phi(l_j) = P_{k,7+2m+j}(e_1,e_2),$$

$$\Phi(r_j) = P_{k,10+2m+j}(e_1,e_2), \Phi(l_{-1}') = P_{k,12+2m}(e_1,e_2), \Phi(l_1') = P_{k,13+2m}(e_1,e_2),$$

$$\Phi(r_{-1}') = P_{k,14+2m}(e_1,e_2), \Phi(r_1') = P_{k,15+2m}(e_1,e_2), \Phi(A) = P_{k,16+2m}(e_1,e_2),$$

$$\Phi(B) = P_{k,17+2m}(e_1,e_2), \Phi(C) = P_{k,18+2m}(e_1,e_2), \Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y),$$

где $i,j \in \mathbb{Z}$, $0 \le i \le m$, $-1 \le j \le 1$, $x,y \in S(M,\phi)$, $k = 24+2m$. Отображение Φ переводит систему определяющих соотношений Σ в систему определяющих соотношений $\Phi(\Sigma)$ некоторой полугруппы $\Phi(S(M,\phi))$ с двумя образующими e_1 и e_2. Пусть $X = \{x,y\}$ — фиксированный 2-элементный алфавит переменных. Пусть ψ — подстановка, заданная следующим образом:

$$e_1 \to x, \quad e_2 \to y, \quad \psi(uv) = \psi(u)\psi(v),$$

где $u,v \in \{e_1,e_2\}^+$. Подстановка ψ преобразует систему соотношений, задающую полугруппу $\Phi(S(M,\phi))$, в некоторую систему полугрупповых тождеств $\Phi(\Sigma)[X]$. Обозначим через $\mathfrak{X}$ многообразие полугрупп, заданное этой системой тождеств. Так как система тождеств $\Phi(\Sigma)[X]$ конечна, то $\mathfrak{X}$ — конечно базируемое многообразие, а значит, оно обладает независимым базисом. Отсюда вытекает, что существует независимая система тождеств $\Sigma' \subseteq \Phi(\Sigma)[X]$, эквивалентная системе тождеств $\Phi(\Sigma)[X]$. Обозначим через Σ_n систему тождеств

$$\Sigma' \cup \Sigma_n^* \cup \{\psi(\Phi(CA\bar{\phi}(1) l_0 q_0 r_0 1 BC)) = 0\}, \tag{1}$$

где $n \in \mathbb{N}$, Σ_n^* — система тождеств

$$\{\psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{2^n}(1) l_0 q_1 r_0 1 BC)) D(x,y) \varrho^l(E(x,y)) D(x,y) = 0 \mid l > 1, \quad l \in \mathbb{N},$$

$$\varrho(E(x,y)) = E(x,y)F(x,y)G(x,y)E(x,y)F(x,y),$$

$$\varrho(F(x,y)) = E(x,y)G(x,y)E(x,y)F(x,y)G(x,y)F(x,y),$$

$$\varrho(G(x,y)) = E(x,y)G(x,y)F(x,y)G(x,y)E(x,y)G(x,y)F(x,y),$$

$$\varrho(uv) = \varrho(u)\varrho(v), \quad u,v \in \{E(x,y),F(x,y),G(x,y)\}^+,$$

$$D(x,y) = P_{k,19+2m}(x,y), \quad E(x,y) = P_{k,20+2m}(x,y),$$

$$F(x,y) = P_{k,21+2m}(x,y), \quad G(x,y) = P_{k,22+2m}(x,y).$$

Доказательство теоремы. Очевидно, что для доказательства теоремы достаточно показать, что существует рекурсивное семейство рекурсивных систем полугрупповых тождеств такое, что не существует алгоритма, определяющего по произвольной системе из этого семейства, будет ли многообразие, заданное этой системой тождеств, конечно базируемо. Рассмотрим следующее семейство рекурсивных систем полугрупповых тождеств:

$$\{\Delta \cup \Sigma_n^* \cup \{\psi(\Phi(CA\bar{\phi}(1)l_0q_0r_0 1BC)) = 0\}\} \mid n \in \mathbb{N},\ \Delta \subseteq \Phi(\Sigma)[X]\}. \tag{2}$$

Легко понять, что это рекурсивное семейство. Предположим, что существует алгоритм, определяющий по произвольной системе из семейства (2) будет ли многообразие, заданное данной системой тождеств, конечно базируемо. Тогда очевидно, что существует алгоритм, определяющий по произвольной системе из семейства $\{\Sigma_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, будет ли многообразие, заданное данной системой тождеств, конечно базируемо.

Покажем, что система тождеств Σ_n задает конечно базируемое многообразие тогда и только тогда, когда $n \in \mathbb{P}$.

Предположим, что $n \in \mathbb{P}$. Допустим, что существует конечное вычисление, при помощи которого машина M переходит из конфигурации $q_i\xi_1\xi_2$ в конфигурацию $q_j\eta_1\eta_2$ или наоборот. Пусть для определенности машина M переходит из конфигурации $q_i\xi_1\xi_2$ в конфигурацию $q_j\eta_1\eta_2$. Индукцией по числу тактов работы машины M можно показать, что в многообразии $\mathfrak{X}$ выполняется тождество

$$\psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{\xi_1}(1)l_0q_ir_0\phi^{\xi_2}(1)BC)) = \psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{\eta_1}(1)l_0q_jr_0\phi^{\eta_2}(1)BC)).$$

Так как $n \in \mathbb{P}$, по определению машины M существует конечное вычисление, при помощи которого машина M переходит из конфигурации $q_1 2^n 0$ в конфигурацию $q_0 10$. Поэтому в многообразии $\mathfrak{X}$ выполняется тождество

$$\psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{2^n}(1)l_0q_1r_0 1BC)) = \psi(\Phi(CA\bar{\phi}(1)l_0q_0r_0 1BC)). \tag{3}$$

В силу того, что Σ' — базис многообразия $\mathfrak{X}$, отсюда вытекает, что тождество (3) выводимо из системы тождеств Σ'. Поскольку по определению система тождеств Σ_n имеет вид (1), если $n \in \mathbb{P}$, то тождество (3) выводимо из системы тождеств Σ_n. Кроме того, для любого $l > 1$ имеем

$$\psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{2^n}(1)l_0q_1r_0 1BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y) \\ = \psi(\Phi(CA\bar{\phi}(1)l_0q_0r_0 1BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y) = 0.$$

Следовательно, для любого $l > 1$ тождество

$$\psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{2^n}(1)l_0q_1r_0 1BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y) = 0$$

выводимо из системы тождеств

$$\{\psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{2^n}(1)l_0q_1r_0 1BC)) = \psi(\Phi(CA\bar{\phi}(1)l_0q_0r_0 1BC)), \\ \psi(\Phi(CA\bar{\phi}(1)l_0q_0r_0 1BC)) = 0\}.$$

Поэтому в качестве базиса многообразия $\operatorname{var}\{\Sigma_n\}$, заданного системой тождеств Σ_n, можно взять систему тождеств

$$\Sigma' \cup \{\psi(\Phi(CA\bar{\phi}(1)l_0q_0r_0 1BC)) = 0\}. \tag{4}$$

Так как система тождеств (4) конечна, то $\operatorname{var}\{\Sigma_n\}$ — конечно базируемое многообразие.

Рассмотрим теперь случай, когда $n \notin \mathbb{P}$, и покажем, что система тождеств Σ_n содержит бесконечную независимую подсистему. Предположим противное. Тогда существует тождество $u = v$ такое, что $u = v \in \Sigma_n$ и $u = v$ выводимо из системы тождеств $\Sigma_n \backslash \{u = v\}$.

Индукцией по длине вывода покажем, что если из системы Σ' выводимо одно из следующих тождеств:

$$\psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{\xi_1}(1)l_0q_ir_0\phi^{\xi_2}(1)BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y) \\ = \psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{\eta_1}(1)l_0q_jr_0\phi^{\eta_2}(1)BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y); \tag{5}$$

$$\psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{\xi_1}(1)l_0q_ir_0\phi^{\xi_2}(1)BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y) \\ = \psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{\eta_1}(1)l_0Q_jr_0\phi^{\eta_2}(1)BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y); \tag{6}$$

$$\psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{\xi_1}(1)l_0q_ir_0\phi^{\xi_2}(1)BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y) \\ = \psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{\eta_1}(1)l_0Q_j \\ a_1a_2\dots a_pb_t\phi(a_{p+1}a_{p+2}\dots a_s)BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y), \tag{7}$$

где $t \in \{0,1\}$, $b_0 = r_{-1}$, $b_1 = r'_{-1}$, $p \equiv t \bmod 2$, $a_1a_2\dots a_s = \phi^\tau(1)$, $\tau = \eta_2$;

$$\psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{\xi_1}(1)l_0q_ir_0\phi^{\xi_2}(1)BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y) \\ = \psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{\eta_1}(1)l_0Q_j \\ \times \phi(a_1a_2\dots a_p)b_ta_{p+1}a_{p+2}\dots a_sBC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y), \tag{8}$$

где $t \in \{0,1\}$, $b_0 = r_1$, $b_1 = r'_1$, $p \equiv t \bmod 2$, $a_1a_2\dots a_s = \phi^\tau(1)$, $\tau = \eta_2 - 1$;

$$\psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{\xi_1}(1)l_0q_ir_0\phi^{\xi_2}(1)BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y) \\ = \psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{\eta_1}(1)l_0Q_ja_1a_2\dots a_pr_0a_{p+1}a_{p+2}\dots a_sBC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y), \tag{9}$$

где $a_1a_2\dots a_s = \phi^\tau(1)$, $\tau = \eta_2$;

$$\psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{\xi_1}(1)l_0q_ir_0\phi^{\xi_2}(1)BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y) \\ = \psi(\Phi(CA\bar{\phi}(a_s\dots a_{p+2}a_{p+1})b_ta_p\dots a_2a_1Q_j \\ \times r_0\phi^{\eta_2}(1)BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y), \tag{10}$$

где $t \in \{0,1\}$, $b_0 = l_{-1}$, $b_1 = l'_{-1}$, $p \equiv t \bmod 2$, $a_s\dots a_2a_1 = \bar{\phi}^\tau(1)$, $\tau = \eta_1$;

$$\psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{\xi_1}(1)l_0q_ir_0\phi^{\xi_2}(1)BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y) \\ = \psi(\Phi(CAa_s\dots a_{p+2}a_{p+1}b_t\bar{\phi}(a_p\dots a_2a_1)Q_j \\ \times r_0\phi^{\eta_2}(1)BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y), \tag{11}$$

где $t \in \{0,1\}$, $b_0 = l_1$, $b_1 = l'_1$, $p \equiv t \bmod 2$, $a_s\dots a_2a_1 = \bar{\phi}^\tau(1)$, $\tau = \eta_1 - 1$;

$$\psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{\xi_1}(1)l_0q_ir_0\phi^{\xi_2}(1)BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y) \\ = \psi(\Phi(CAa_s\dots a_{p+2}a_{p+1}l_0a_p\dots a_2a_1Q_jr_0\phi^{\eta_2}(1)BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y), \tag{12}$$

где $a_s \dots a_2a_1 = \bar\phi^{\tau}(1)$, $\tau = \eta_1$;

$$\begin{aligned}\psi(\Phi(CA\bar\phi^{\xi_1}(1)l_0q_ir_0\phi^{\xi_2}(1)BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y)\\ = \psi(\Phi(CA\bar\phi(c_{s_1}\dots c_{p_1+2}c_{p_1+1})d_{t_1}c_{p_1}\dots c_2c_1Q_j\\ \times a_1a_2\dots a_{p_2}b_{t_2}\phi(a_{p_2+1}a_{p_2+2}\dots a_{s_2})BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y),\end{aligned} \tag{13}$$

где $t_1 \in \{0,1\}$, $d_0 = l_{-1}$, $d_1 = l'_{-1}$, $p_1 \equiv t_1 \bmod 2$, $c_{s_1}\dots c_2c_1 = \bar\phi^{\tau_1}(1)$, $t_2 \in \{0,1\}$, $b_0 = r_{-1}$, $b_1 = r'_{-1}$, $p_2 \equiv t_2 \bmod 2$, $a_1a_2\dots a_{s_2} = \phi^{\tau_2}(1)$, $\tau_1 = \eta_1$, $\tau_2 = \eta_2$;

$$\begin{aligned}\psi(\Phi(CA\bar\phi^{\xi_1}(1)l_0q_ir_0\phi^{\xi_2}(1)BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y)\\ = \psi(\Phi(CAc_{s_1}\dots c_{p_1+2}c_{p_1+1}d_{t_1}\bar\phi(c_{p_1}\dots c_2c_1)Q_j\\ \times a_1a_2\dots a_{p_2}b_{t_2}\phi(a_{p_2+1}a_{p_2+2}\dots a_{s_2})BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y),\end{aligned} \tag{14}$$

где $t_1 \in \{0,1\}$, $d_0 = l_1$, $d_1 = l'_1$, $p_1 \equiv t_1 \bmod 2$, $c_{s_1}\dots c_2c_1 = \bar\phi^{\tau_1}(1)$, $t_2 \in \{0,1\}$, $b_0 = r_{-1}$, $b_1 = r'_{-1}$, $p_2 \equiv t_2 \bmod 2$, $a_1a_2\dots a_{s_2} = \phi^{\tau_2}(1)$, $\tau_1 = \eta_1 - 1$, $\tau_2 = \eta_2$;

$$\begin{aligned}\psi(\Phi(CA\bar\phi^{\xi_1}(1)l_0q_ir_0\phi^{\xi_2}(1)BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y)\\ = \psi(\Phi(CAc_{s_1}\dots c_{p_1+2}c_{p_1+1}l_0c_{p_1}\dots c_2c_1Q_j\\ \times a_1a_2\dots a_{p_2}b_{t_2}\phi(a_{p_2+1}a_{p_2+2}\dots a_{s_2})BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y),\end{aligned} \tag{15}$$

где $c_{s_1}\dots c_2c_1 = \bar\phi^{\tau_1}(1)$, $t_2 \in \{0,1\}$, $b_0 = r_{-1}$, $b_1 = r'_{-1}$, $p_2 \equiv t_2 \bmod 2$, $a_1a_2\dots a_{s_2} = \phi^{\tau_2}(1)$, $\tau_1 = \eta_1$, $\tau_2 = \eta_2$;

$$\begin{aligned}\psi(\Phi(CA\bar\phi^{\xi_1}(1)l_0q_ir_0\phi^{\xi_2}(1)BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y)\\ = \psi(\Phi(CA\bar\phi(c_{s_1}\dots c_{p_1+2}c_{p_1+1})d_{t_1}c_{p_1}\dots c_2c_1Q_j\\ \times \phi(a_1a_2\dots a_{p_2})b_{t_2}a_{p_2+1}a_{p_2+2}\dots a_{s_2}BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y),\end{aligned} \tag{16}$$

где $t_1 \in \{0,1\}$, $d_0 = l_{-1}$, $d_1 = l'_{-1}$, $p_1 \equiv t_1 \bmod 2$, $c_{s_1}\dots c_2c_1 = \bar\phi^{\tau_1}(1)$, $t_2 \in \{0,1\}$, $b_0 = r_1$, $b_1 = r'_1$, $p_2 \equiv t_2 \bmod 2$, $a_1a_2\dots a_{s_2} = \phi^{\tau_2}(1)$, $\tau_1 = \eta_1$, $\tau_2 = \eta_2 - 1$;

$$\begin{aligned}\psi(\Phi(CA\bar\phi^{\xi_1}(1)l_0q_ir_0\phi^{\xi_2}(1)BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y)\\ = \psi(\Phi(CAc_{s_1}\dots c_{p_1+2}c_{p_1+1}d_{t_1}\bar\phi(c_{p_1}\dots c_2c_1)Q_j\\ \times \phi(a_1a_2\dots a_{p_2})b_{t_2}a_{p_2+1}a_{p_2+2}\dots a_{s_2}BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y),\end{aligned} \tag{17}$$

где $t_1 \in \{0,1\}$, $d_0 = l_1$, $d_1 = l'_1$, $p_1 \equiv t_1 \bmod 2$, $c_{s_1}\dots c_2c_1 = \bar\phi^{\tau_1}(1)$, $t_2 \in \{0,1\}$, $b_0 = r_1$, $b_1 = r'_1$, $p_2 \equiv t_2 \bmod 2$, $a_1a_2\dots a_{s_2} = \phi^{\tau_2}(1)$, $\tau_1 = \eta_1 - 1$, $\tau_2 = \eta_2 - 1$;

$$\begin{aligned}\psi(\Phi(CA\bar\phi^{\xi_1}(1)l_0q_ir_0\phi^{\xi_2}(1)BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y)\\ = \psi(\Phi(CAc_{s_1}\dots c_{p_1+2}c_{p_1+1}l_0c_{p_1}\dots c_2c_1Q_j\\ \times \phi(a_1a_2\dots a_{p_2})b_{t_2}a_{p_2+1}a_{p_2+2}\dots a_{s_2}BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y),\end{aligned} \tag{18}$$

где $c_{s_1}\dots c_2c_1 = \bar\phi^{\tau_1}(1)$, $t_2 \in \{0,1\}$, $b_0 = r_1$, $b_1 = r'_1$, $p_2 \equiv t_2 \bmod 2$, $a_1a_2\dots a_{s_2} = \phi^{\tau_2}(1)$, $\tau_1 = \eta_1$, $\tau_2 = \eta_2 - 1$;

$$\begin{aligned}\psi(\Phi(CA\bar\phi^{\xi_1}(1)l_0q_ir_0\phi^{\xi_2}(1)BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y)\\ = \psi(\Phi(CA\bar\phi(c_{s_1}\dots c_{p_1+2}c_{p_1+1})d_{t_1}c_{p_1}\dots c_2c_1Q_j\\ \times a_1a_2\dots a_{p_2}r_0a_{p_2+1}a_{p_2+2}\dots a_{s_2}BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y),\end{aligned} \tag{19}$$

где $t_1 \in \{0,1\}$, $d_0 = l_{-1}$, $d_1 = l'_{-1}$, $p_1 \equiv t_1 \bmod 2$, $c_{s_1} \dots c_2 c_1 = \bar{\phi}^{\tau_1}(1)$, $a_1 a_2 \dots a_{s_2} = \phi^{\tau_2}(1)$, $\tau_1 = \eta_1$, $\tau_2 = \eta_2$;

$$\begin{aligned}\psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{\xi_1}(1)l_0 q_i r_0 \phi^{\xi_2}(1)BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y)\\ = \psi(\Phi(CAc_{s_1}\dots c_{p_1+2}c_{p_1+1}d_{t_1}\bar{\phi}(c_{p_1}\dots c_2 c_1)Q_j\\ \times a_1 a_2 \dots a_{p_2} r_0 a_{p_2+1} a_{p_2+2}\dots a_{s_2}BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y),\end{aligned} \quad (20)$$

где $t_1 \in \{0,1\}$, $d_0 = l_1$, $d_1 = l'_1$, $p_1 \equiv t_1 \bmod 2$, $c_{s_1} \dots c_2 c_1 = \bar{\phi}^{\tau_1}(1)$, $a_1 a_2 \dots a_{s_2} = \phi^{\tau_2}(1)$, $\tau_1 = \eta_1 - 1$, $\tau_2 = \eta_2$;

$$\begin{aligned}\psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{\xi_1}(1)l_0 q_i r_0 \phi^{\xi_2}(1)BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y)\\ = \psi(\Phi(CAc_{s_1}\dots c_{p_1+2}c_{p_1+1}l_0 c_{p_1}\dots c_2 c_1 Q_j\\ \times a_1 a_2 \dots a_{p_2} r_0 a_{p_2+1} a_{p_2+2}\dots a_{s_2}BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y),\end{aligned} \quad (21)$$

где $c_{s_1} \dots c_2 c_1 = \bar{\phi}^{\tau_1}(1)$, $a_1 a_2 \dots a_{s_2} = \phi^{\tau_2}(1)$, $\tau_1 = \eta_1$, $\tau_2 = \eta_2$, то существует конечное вычисление, при помощи которого машина M переходит из конфигурации $q_i\xi_1\xi_2$ в конфигурацию $q_j\eta_1\eta_2$ или наоборот, либо существует конечная последовательность конфигураций

$$q_{\alpha_1}\lambda_{\beta_1}\lambda_{\gamma_1}, q_{\alpha_2}\lambda_{\beta_2}\lambda_{\gamma_2}, \dots q_{\alpha_l}\lambda_{\beta_l}\lambda_{\gamma_l} \quad (22)$$

такая, что

1) существует конечное вычисление, при помощи которого машина M переходит из конфигурации $q_i\xi_1\xi_2$ в конфигурацию $q_{\alpha_1}\lambda_{\beta_1}\lambda_{\gamma_1}$ или наоборот,

2) существует конечное вычисление, при помощи которого машина M переходит из конфигурации $q_j\eta_1\eta_2$ в конфигурацию $q_{\alpha_l}\lambda_{\beta_l}\lambda_{\gamma_l}$ или наоборот,

3) для любого $k \in \{1, 2, \dots, l-1\}$ существует конечное вычисление, при помощи которого машина M переходит из конфигурации $q_{\alpha_{k+1}}\lambda_{\beta_{k+1}}\lambda_{\gamma_{k+1}}$ в конфигурацию $q_{\alpha_k}\lambda_{\beta_k}\lambda_{\gamma_k}$ или наоборот.

Предположим, что длина вывода u одного из тождеств (5)–(21) равна 0. Тогда существование конечного вычисления очевидно, поскольку в этом случае $i = j$, $\xi_1 = \eta_1$, $\xi_2 = \eta_2$. Предположим, что утверждение справедливо для любого натурального числа, не превосходящего u. Покажем, что оно выполняется и для $u+1$. Мы рассмотрим только случай тождества (5). Тождества (6)–(21) можно рассмотреть по той же схеме. Так как тождество (5) выводимо из системы тождеств Σ', причем длина вывода равна $u+1$, то существует цепочка равенств

$$\begin{aligned}\psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{\xi_1}(1)l_0 q_i r_0 \phi^{\xi_2}(1)BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y)\\ = w_1 = w_2 = \dots = w_u\\ = \psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{\eta_1}(1)l_0 q_j r_0 \phi^{\eta_2}(1)BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y)\end{aligned}$$

такая, что каждое последующее слово в этой цепочке получено из предыдущего применением одного из тождеств из системы Σ' [8]. В зависимости от значений η_1 и η_2 нам следует рассмотреть четыре случая: 1) $\eta_1 > 0$, $\eta_2 = 0$, 2) $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$, 3) $\eta_1 = 0$, $\eta_2 > 0$, 4) $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 0$. Мы рассмотрим лишь случай 1, так как остальные три случая рассматриваются совершенно аналогично. Заметим, что в силу леммы 1 из работы [18] к слову

$$\psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{\eta_1}(1)l_0 q_j r_0 \phi^{\eta_2}(1)BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y) \quad (23)$$

можно применить лишь одно из следующих тождеств:

$$\psi(\Phi(21 l_0 q_j r_0 1B)) = \psi(\Phi(21 l_{\varepsilon_1} Q_k r_{\varepsilon_2} 1B)), \quad (24)$$

$$\psi(\Phi(l_0 1)) = \psi(\Phi(1 l_0)), \tag{25}$$

$$\psi(\Phi(r_0 1)) = \psi(\Phi(1 r_0)), \tag{26}$$

$$\psi(\Phi(l_0 Q_j r_0)) = \psi(\Phi(l_0 q_j r_0)). \tag{27}$$

Если слово (23) получено из слова w_u применением одного из тождеств (25)–(27) то слово w_u будет иметь вид

$$\psi(\Phi(CAc_s \dots c_3 c_2 l_0 c_1 q_j r_0 \phi^{\eta_2}(1)BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y),$$

$$\psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{\eta_1}(1) l_0 q_j 1 r_0 BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y),$$

$$\psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{\eta_1}(1) l_0 Q_j r_0 \phi^{\eta_2}(1)BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y)$$

соответственно. Следовательно, одно из следующих трех тождеств:

$$\begin{aligned} &\psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{\xi_1}(1) l_0 q_i r_0 \phi^{\xi_2}(1)BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y) \\ &\quad = \psi(\Phi(CAc_s \dots c_3 c_2 l_0 c_1 q_j r_0 \phi^{\eta_2}(1)BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y), \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} &\psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{\xi_1}(1) l_0 q_i r_0 \phi^{\xi_2}(1)BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y) \\ &\quad = \psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{\eta_1}(1) l_0 q_j 1 r_0 BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y), \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} &\psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{\xi_1}(1) l_0 q_i r_0 \phi^{\xi_2}(1)BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y) \\ &\quad = \psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{\eta_1}(1) l_0 Q_j r_0 \phi^{\eta_2}(1)BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y), \end{aligned} \tag{30}$$

выводимо за u шагов. Поскольку тождества (28), (29), (30) являются тождествами вида (12), (9) и (21) соответственно, к ним применимо предположение индукции. Значит, существует конечное вычисление, при помощи которого машина M переходит из конфигурации $q_i\xi_1\xi_2$ в конфигурацию $q_j\eta_1\eta_2$ или наоборот, либо существует конечная последовательность конфигураций (22), удовлетворяющая условиям 1–3.

Если слово (23) получено из слова w_u применением тождества (24), то слово w_u будет иметь вид

$$\psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{\eta_1}(1) l_{\varepsilon_1} Q_k r_{\varepsilon_2} \phi^{\eta_2}(1)BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y).$$

Следовательно, тождество

$$\begin{aligned} &\psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{\xi_1}(1) l_0 q_i r_0 \phi^{\xi_2}(1)BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y) \\ &\quad = \psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{\eta_1}(1) l_{\varepsilon_1} Q_k r_{\varepsilon_2} \phi^{\eta_2}(1)BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y) \end{aligned} \tag{31}$$

выводимо за u шагов. Поскольку согласно предположению $\eta_2 = 0$, тождество (31) можно представить в виде

$$\begin{aligned} &\psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{\xi_1}(1) l_0 q_i r_0 \phi^{\xi_2}(1)BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y) \\ &\quad = \psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{\eta_1}(1) l_{\varepsilon_1} Q_k r_{\varepsilon_2} 1BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y). \end{aligned} \tag{32}$$

Кроме того, из равенства $\eta_2 = 0$ вытекает, что $\varepsilon_2 \neq -1$. Следовательно, нам нужно рассмотреть шесть случаев в зависимости от значений ε_1 и ε_2: 1) $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 1$, 2) $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 1$, 3) $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = 1$, 4) $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 0$, 5) $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$, 6) $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = 0$. Мы рассмотрим только случай 1, поскольку случаи 2–6 можно рассмотреть совершенно аналогично. Так как $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 1$, тождество (32) является тождеством вида (17). Отсюда в силу того, что тождество (32) выводимо за u шагов, согласно предположению индукции вытекает, что существует конечное вычисление, при помощи которого машина M переходит из конфигурации $q_i\xi_1\xi_2$ в конфигурацию $q_k(\eta_1+1)1$ или наоборот, либо существует конечная последовательность конфигураций (22), удовлетворяющая условиям 1–3.

Кроме того, $\eta_2 = 0$ и команда $q_j 01 \to q_k\varepsilon_1\varepsilon_2$ переводит машину M из конфигурации $q_j\eta_1\eta_2$ в конфигурацию $q_j(\eta_1+\varepsilon_1)(\eta_2+\varepsilon_2)$. Следовательно, существует конечное вычисление, при помощи которого машина M переходит из конфигурации $q_i\xi_1\xi_2$ в конфигурацию $q_j\eta_1\eta_2$ или наоборот, либо существует конечная последовательность конфигураций (22), удовлетворяющая условиям 1–3.

Предположим, что тождество

$$\psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{2^n}(1)l_0q_1r_0 1BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y) \\ = \psi(\Phi(CA\bar{\phi}(1)l_0q_0r_0 1BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y) \quad (33)$$

выводимо из системы тождеств Σ'. Тогда существует конечное вычисление, при помощи которого машина M переходит из конфигурации $q_1 2^n 0$ в конфигурацию $q_0 10$ или наоборот, либо существует конечная последовательность конфигураций (22), удовлетворяющая условиям 1–3.

Очевидно, что существование конечного вычисления, при помощи которого машина M переходит из конфигурации $q_0 10$ в конфигурацию $q_1 2^n 0$, невозможно, поскольку по определению машины M q_1 — начальное состояние, q_0 — заключительное состояние и, следовательно, $q_1 2^n$ — начальная конфигурация, $q_0 10$ — заключительная конфигурация. Предположим, что существует конечное вычисление, при помощи которого машина M переходит из конфигурации $q_1 2^n 0$ в конфигурацию $q_0 10$. Тогда по определению машины Минского $n \in \mathbb{P}$, что противоречит нашему предположению.

Рассмотрим теперь случай, когда существует конечная последовательность конфигураций (22), удовлетворяющая условиям 1–3.

Заметим, что, вообще говоря, может существовать несколько последовательностей вида (22). Поэтому зафиксируем некоторую последовательность вида (22) такую, что число l минимально. Если $l = 1$, то в силу того, что $q_1 2^n$ — начальная конфигурация, $q_0 10$ — заключительная конфигурация, существует конечное вычисление, при помощи которого машина M переходит из конфигурации $q_1 2^n$ в конфигурацию $q_{\alpha_1}\lambda_{\beta_1}\lambda_{\gamma_1}$, и существует конечное вычисление, при помощи которого машина M переходит из конфигурации $q_{\alpha_1}\lambda_{\beta_1}\lambda_{\gamma_1}$ в конфигурацию $q_0 10$. Поэтому существует конечное вычисление, при помощи которого машина M переходит из конфигурации $q_1 2^n$ в конфигурацию $q_0 10$, что, как замечено выше, приводит нас к противоречию. Следовательно, в дальнейшем мы можем полагать, что $l > 1$.

Предположим, что существует конечное вычисление, при помощи которого машина M переходит из конфигурации $q_{\alpha_{l-1}}\lambda_{\beta_{l-1}}\lambda_{\gamma_{l-1}}$ в конфигурацию $q_{\alpha_l}\lambda_{\beta_l}\lambda_{\gamma_l}$. Так как $q_0 10$ — заключительная конфигурация, то существует конечное вычисление, при помощи которого машина M переходит из конфигурации $q_{\alpha_l}\lambda_{\beta_l}\lambda_{\gamma_l}$ в конфигурацию $q_0 10$. Отсюда вытекает, что существует конечное вычисление, при помощи которого машина M переходит из конфигурации $q_{\alpha_{l-1}}\lambda_{\beta_{l-1}}\lambda_{\gamma_{l-1}}$ в конфигурацию $q_0 10$. Следовательно, конфигурацию $q_{\alpha_l}\lambda_{\beta_l}\lambda_{\gamma_l}$ мы можем исключить из рассмотрения и вместо последовательности

$$q_{\alpha_1}\lambda_{\beta_1}\lambda_{\gamma_1}, q_{\alpha_2}\lambda_{\beta_2}\lambda_{\gamma_2}, \dots q_{\alpha_l}\lambda_{\beta_l}\lambda_{\gamma_l}$$

рассматривать последовательность

$$q_{\alpha_1}\lambda_{\beta_1}\lambda_{\gamma_1}, q_{\alpha_2}\lambda_{\beta_2}\lambda_{\gamma_2}, \dots q_{\alpha_{l-1}}\lambda_{\beta_{l-1}}\lambda_{\gamma_{l-1}},$$

что противоречит нашему предположению о минимальности числа l. Поэтому существует конечное вычисление, при помощи которого машина M переходит из конфигурации $q_{\alpha_l}\lambda_{\beta_l}\lambda_{\gamma_l}$ в конфигурацию $q_{\alpha_{l-1}}\lambda_{\beta_{l-1}}\lambda_{\gamma_{l-1}}$. Заметим, что по определению машины Минского для любых трех конфигураций $q_{\tau_1}\tau_2\tau_3$, $q_{\tau_4}\tau_5\tau_6$, $q_{\tau_7}\tau_8\tau_9$ если существует конечное вычисление, при помощи которого машина переходит из конфигурации $q_{\tau_1}\tau_2\tau_3$ в конфигурацию $q_{\tau_4}\tau_5\tau_6$, и существует конечное вычисление, при помощи которого машина переходит из конфигурации $q_{\tau_1}\tau_2\tau_3$ в конфигурацию $q_{\tau_7}\tau_8\tau_9$, то одно из этих двух вычислений является начальной частью другого. Так как $q_0 10$ — заключительная конфигурация, очевидно, что конечное вычисление, при помощи которого машина M переходит из конфигурации $q_{\alpha_l}\lambda_{\beta_l}\lambda_{\gamma_l}$ в конфигурацию $q_0 10$, не может быть начальной частью вычисления, при помощи которого машина M переходит из конфигурации $q_{\alpha_l}\lambda_{\beta_l}\lambda_{\gamma_l}$ в конфигурацию $q_{\alpha_{l-1}}\lambda_{\beta_{l-1}}\lambda_{\gamma_{l-1}}$. Следовательно, вычисление, при помощи которого машина M переходит из конфигурации $q_{\alpha_l}\lambda_{\beta_l}\lambda_{\gamma_l}$ в конфигурацию $q_{\alpha_{l-1}}\lambda_{\beta_{l-1}}\lambda_{\gamma_{l-1}}$, является начальной частью вычисления, при помощи которого машина M переходит из конфигурации $q_{\alpha_l}\lambda_{\beta_l}\lambda_{\gamma_l}$ в конфигурацию $q_0 10$. Отсюда вытекает, что последовательность

$$q_{\alpha_1}\lambda_{\beta_1}\lambda_{\gamma_1}, q_{\alpha_2}\lambda_{\beta_2}\lambda_{\gamma_2}, \dots q_{\alpha_{l-1}}\lambda_{\beta_{l-1}}\lambda_{\gamma_{l-1}}, q_{\alpha_l}\lambda_{\beta_l}\lambda_{\gamma_l}$$

мы можем заменить последовательностью

$$q_{\alpha_1}\lambda_{\beta_1}\lambda_{\gamma_1}, q_{\alpha_2}\lambda_{\beta_2}\lambda_{\gamma_2}, \dots q_{\alpha_{l-1}}\lambda_{\beta_{l-1}}\lambda_{\gamma_{l-1}}, q_{\alpha_l}\lambda_{\beta_l}\lambda_{\gamma_l}, q_{\alpha_{l-1}}\lambda_{\beta_{l-1}}\lambda_{\gamma_{l-1}},$$

а последнюю, в свою очередь, заменить последовательностью

$$q_{\alpha_1}\lambda_{\beta_1}\lambda_{\gamma_1}, q_{\alpha_2}\lambda_{\beta_2}\lambda_{\gamma_2}, \dots q_{\alpha_{l-1}}\lambda_{\beta_{l-1}}\lambda_{\gamma_{l-1}},$$

после чего снова придем к противоречию с предположением о минимальности числа l.

Таким образом, мы убедились в том, что тождество (33) не выводимо из системы тождеств Σ'.

Покажем теперь, что тождество (33) не выводимо из системы тождеств

$$\Sigma_n \backslash \{\psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{2^n}(1)l_0q_1r_0 1BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y) = 0\}. \tag{34}$$

Для произвольных i, η_1, η_2, где $i \in \{0,1,2,\dots,m\}$, $\eta_1,\eta_2 \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, обозначим через $\Delta(i,\eta_1,\eta_2)$ множество, состоящее из слов, являющихся правыми частями равенств (5)–(21). Покажем, что для любого $U(x,y) \in \Delta(i,\eta_1,\eta_2)$ если к слову $U(x,y)$ применить тождество системы Σ', то найдутся i_1,η_3,η_4 такие, что в результате применения тождества слово $U(x,y)$ перейдет в слово $V(x,y)$, где $V(x,y) \in \Delta(i_1,\eta_3,\eta_4)$. Пусть $U(x,y) \in \Delta(i,\eta_1,\eta_2)$. Мы рассмотрим только случай, когда

$$U(x,y) = \psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{\eta_1}(1)l_0q_jr_0\phi^{\eta_2}(1)BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y),$$

поскольку остальные шестнадцать случаев рассматриваются совершенно аналогично. В силу леммы 1 из работы [18] тождество из множества (34) применимо к слову $U(x,y)$ тогда и только тогда, когда соответствующее определяющее соотношение полугруппы $S(M,\phi)$ применимо к слову

$$CA\bar{\phi}^{\eta_1}(1)l_0q_jr_0\phi^{\eta_2}(1)BCD\varrho^l(E)D.$$

Используя этот факт, легко понять, что к слову

$$\psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{\eta_1}(1)l_0q_jr_0\phi^{\eta_2}(1)BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y)$$

не применимы ни одно тождество системы Σ^* и тождество

$$\psi(\Phi(CA\bar{\phi}(1)l_0q_0r_01BC)) = 0,$$

и в результате применения к слову

$$\psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{\eta_1}(1)l_0q_jr_0\phi^{\eta_2}(1)BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y)$$

тождества из множества Σ' это слово переходит в слово $V(x,y)$ такое, что $V(x,y) \in \Delta(i_1,\eta_3,\eta_4)$ для некоторых i_1,η_3,η_4. Предположим, что тождество (33) выводимо из системы тождеств (34). Тогда существует цепочка равенств

$$\psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{2^n}(1)l_0q_1r_01BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y) = W_1 = W_2 = \\ \dots = W_p = \psi(\Phi(CA\bar{\phi}(1)l_0q_0r_01BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y) \quad (35)$$

такая, что каждое последующее слово в этой цепочке равенств получено из предыдущего применением одного из тождеств системы (34). Допустим, что тождества системы Σ^* и тождество

$$\psi(\Phi(CA\bar{\phi}(1)l_0q_0r_01BC)) = 0 \quad (36)$$

не используются при построении цепочки равенств (35) Тогда тождество (33) должно быть выводимо из системы тождеств Σ', что, как показано выше, невозможно. Следовательно, по крайней мере один переход в цепочке равенств (35) осуществлен при помощи тождества из системы Σ^* или тождества (36). Пусть i — минимальное натуральное число такое, что равенство $W_i = W_{i+1}$ получено при помощи тождества из системы Σ^* или тождества (36). Тогда для любого $1 \le j \le i$ равенство $W_{j-1} = W_j$ получено при помощи тождества системы Σ'. Отсюда, как показано выше, вытекает, что $W_i \in \Delta(i_1,\eta_3,\eta_4)$ для некоторых i_1,η_3,η_4. Следовательно, ни одно тождество системы Σ^* и тождество (36) не применимы к слову W_i, что противоречит предположению о том, что равенство $W_i = W_{i+1}$ получено при помощи тождества из системы Σ^* или тождества (36). Таким образом, мы убедились в том, что тождество (33) действительно не выводимо из системы тождеств (34). Предположим, что тождество

$$\psi(\Phi(CA\bar{\phi}^{2^n}(1)l_0q_1r_01BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y) = 0 \quad (37)$$

выводимо из системы (34). Тогда с учетом того, что из тождества (36) следует тождество

$$\psi(\Phi(CA\bar{\phi}(1)l_0q_0r_01BC))D(x,y)\varrho^l(E(x,y))D(x,y) = 0,$$

получаем, что из системы тождеств (34) выводимо тождество (33), что противоречит доказанному выше. Следовательно, тождество (37) не выводимо из системы (34) Поскольку для любого l тождество (37) не выводимо из системы (34), Σ^* — бесконечная независимая подсистема системы тождеств Σ_n. Следовательно, многообразие $\mathrm{var}\{\Sigma_n\}$ не имеет конечного базиса.

Итак, мы убедились в том, что система тождеств Σ_n задает конечно базируемое многообразие тогда и только тогда, когда $n \in \mathbb{P}$. Отсюда, в силу нерекурсивности множества $\mathbb{P}$, вытекает требуемое утверждение. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бирюков А. П.* О бесконечных совокупностях тождеств в полугруппах // Алгебра и логика. 1965. Т. 4, № 2. С. 31–32.
2. *Austin A. K.* A closed set of laws which is not generated by a finite set of laws // Quart. J. Math. 1966. V. 17, N 65. P. 11–13.
3. *Ольшанский А. Ю.* О проблеме конечного базиса тождеств в группах // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1970. Т. 34, № 2. С. 376–384.
4. *Адян С. И.* Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975.
5. *Vaughan-Lee M. R.* Uncountably many varieties of groups // Bull. London Math. Soc. 1970. V. 2, N 6. P. 280–286.
6. *Медведев Ю. А.* Пример многообразия разрешимых альтернативных алгебр над полем характеристики 2, не имеющего конечного базиса тождеств // Алгебра и логика. 1980. Т. 19, № 3. С. 300–313.
7. *Дренски В. С.* О тождествах в алгебрах Ли // Алгебра и логика. 1974. Т. 13, № 3. С. 265–290.
8. *Perkins P.* Bases for equational theories of semigroups // J. Algebra. 1969. V. 11, N 2. P. 298–314.
9. *Полин С. В.* О тождествах конечных алгебр // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, № 6. С. 1356–1366.
10. *Кемер А. Р.* Конечная базируемость тождеств ассоциативных алгебр // Алгебра и логика. 1987. Т. 26, № 5. С. 597–641.
11. *Пинус А. Г.* Конгруэнц-дистрибутивные многообразия алгебр // Алгебра, топология, геометрия. М.: ВИНИТИ, 1988. (Итоги науки и техники). Т. 26. С. 45–81.
12. *Baker K. A.* Finite equational bases for algebras in a congruence-distributive equational class // Adv. Math. 1977. V. 24, N 3. P. 207–243.
13. *Мурский В. Л.* Нераспознаваемые свойства конечных систем тождественных соотношений // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196, № 3. С. 520–522.
14. *Попов В. Ю.* О некоторых алгоритмических проблемах, связанных с многообразиями неассоциативных колец // Мат. труды. 2000. Т. 3, № 2. С. 146–170.
15. *Шеврин Л. Н., Волков М. В.* Тождества полугрупп // Изв. вузов. Математика. 1985. № 11. С. 3–47.
16. *Сапир М. В.* Проблемы бернсайдовского типа и тождества конечных полугрупп // 18-я Всесоюз. алгебраическая конф. Тез. докл. Кишинев, 1985. Ч. 2. . С. 151.
17. *Аршон С. Е.* Доказательство существования n-значных бесконечных асимметричных последовательностей // Мат. сб. 1937. Т. 2, № 4. С. 769–779.
18. *Мурский В. Л.* Несколько примеров многообразий полугрупп // Мат. заметки. 1968. Т. 3, № 6. С. 663–670.

Статья поступила 29 октября 2001 г.

Попов Владимир Юрьевич
Уральский гос. университет им. А. М. Горького,
математико-механический факультет, кафедра алгебры и дискретной математики,
пр. Ленина, 51, Екатеринбург 620083
Vladimir.Popov@usu.ru