Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2002. Том 43, № 5

УДК 515.1

О ПСЕВДОКОМПАКТНЫХ, СЧЕТНО КОМПАКТНЫХ, ЛОКАЛЬНО БИКОМПАКТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ И k–ОТОБРАЖЕНИЯХ

Ю. Н. Миронова

Аннотация: Рассмотрены варианты определения псевдокомпактного отображения и основные свойства псевдокомпактных отображений. Кроме того, рассмотрено определение счетной компактности непрерывного отображения, изучены свойства счетно компактного отображения, аналогичные соответствующим свойствам для счетно компактных пространств, а также связь между счетной компактностью и псевдокомпактностью отображения. Исследовано также распространение понятия локальной бикомпактности и понятия k-пространства на непрерывные отображения.

Ключевые слова: псевдокомпактность, счетная компактность, локальная бикомпактность, k-отображения

Многие понятия и результаты, определенные и верные в классе топологических пространств, имеют аналоги в классе непрерывных отображений. На класс непрерывных отображений были распространены аксиомы отделимости, на нем были определены понятия базы отображения, веса отображения; различным образом определялась также размерность отображения [1] и т. д.

Возникают задачи распространения результатов теории топологических пространств на класс отображений. Существует класс отображений, выполняющих во многих случаях роль бикомпактов в классе непрерывных отображений, — это совершенные отображения.

В данной работе рассмотрено обобщение класса псевдокомпактных пространств и связанных с ними свойств пространств на случай отображений.

1. О псевдокомпактных отображениях

Напомним, что тихоновское пространство X называется *псевдокомпактным*, если любая непрерывная на X функция ограничена.

Подмножество $B \subset X$ тихоновского пространства X называется *относительно псевдокомпактным* в X, если любая непрерывная на X функция ограничена на B.

Следующие свойства характеризуют в классе тихоновских пространств псевдокомпактность и относительную псевдокомпактность соответственно (см. [1, 2]).

1. *Любая открытая локально конечная в пространстве X система конечна.*

2. *Для пространства X, множества $B \subset X$ и любой открытой локально конечной системы λ в X выполняются соотношения* $|\operatorname{St}(B, \lambda)| < \omega$.

Рассмотрим теперь непрерывное отображение $f : X \to Y$. Предложим ряд определений псевдокомпактного отображения и рассмотрим взаимосвязь между ними.

Определение 1. Непрерывное отображение $f : X \to Y$ назовем *о-псевдокомпактным*, если для любого открытого в Y множества O, любой точки $y \in O$ и любой локально конечной и открытой в $f^{-1}O$ системы λ существует окрестность Oy точки y такая, что $Oy \subset O$ и $|\operatorname{St}(f^{-1}Oy, \lambda)| < \omega$.

Рассмотрим вариант определения, связанный с непрерывными функциями на трубках.

Определение 2 (А. Ю. Зубов, Б. А. Пасынков). Непрерывное отображение $f : X \to Y$ назовем *псевдокомпактным*, если для любого открытого в Y множества O, любой точки $y \in O$ и любой непрерывной функции $\psi : f^{-1}O \to R$ существует окрестность $Oy \subset O$ точки y такая, что функция $\varphi|_{f^{-1}Oy}$ ограничена.

2. Свойства *о*-псевдокомпактных и псевдокомпактных отображений

Рассмотрим связь псевдокомпактности и *о*-псевдокомпактности отображений с другими их свойствами и некоторые свойства псевдокомпактных и *о*-псевдокомпактных отображений, аналогичные соответствующим свойствам псевдокомпактных пространств.

Предложение 1. *Бикомпактное отображение о-псевдокомпактно.*

Доказательство. Пусть отображение $f : X \to Y$ бикомпактно. Рассмотрим открытое множество $O \subset Y$ и точку $y \in O$. Пусть λ — открытое локально конечное покрытие пространства $f^{-1}O$. Так как система λ локально конечна, для любой точки $x \in f^{-1}y$ существует окрестность $Ox \subset f^{-1}O$ точки x такая, что $|\operatorname{St}(Ox, \lambda)| < \omega$. Поскольку слой $f^{-1}y$ бикомпактен, существует конечная система $\{Ox_1, \dots, Ox_s\}_{x_1,\dots,x_s \in f^{-1}y}$ такая, что $f^{-1}y \subset \bigcup\limits_{j=1}^{s} Ox_j$. Для открытого множества $V = \bigcup\limits_{j=1}^{s} Ox_j$ имеем $|\operatorname{St}(V, \lambda)| < \omega$. В силу того, что отображение f замкнуто, существует окрестность Oy точки y такая, что $f^{-1}Oy \subset V$. Следовательно, $|\operatorname{St}(f^{-1}Oy, \lambda)| < \omega$, и отображение f *о*-псевдокомпактно.

Следствие 1. *В случае вполне регулярного X бикомпактное отображение $f : X \to Y$ является псевдокомпактным.*

Определение 1 (Б. А. Пасынков). Отображение $f : X \to Y$ (*функционально*) *паракомпактно*, если для любого открытого в Y множества O, любой точки $y \in O$ и любого (функционально) открытого покрытия λ трубки $f^{-1}O$ существует окрестность Oy точки y такая, что в покрытие λ можно вписать (функционально) открытое локально конечное покрытие трубки $f^{-1}Oy$.

Теорема 1. *о-Псевдокомпактное замкнутое паракомпактное отображение бикомпактно.*

Доказательство. Пусть отображение $f : X \to Y$ удовлетворяет условиям теоремы. Рассмотрим открытое покрытие $\lambda = \{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ пространства $f^{-1}y$. Для каждого $O_\alpha \in \lambda$ существует открытое в X множество U_α такое, что $O_\alpha = f^{-1}y \cap U_\alpha$, $\alpha \in A$. Так как $f^{-1}y \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} \lambda$, то $f^{-1}y \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} \lambda'$, где $\lambda' = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

Тогда из замкнутости отображения f следует существование такой Oy точки y, что $f^{-1}y \subset \cup\lambda$. Пусть $V_\alpha = U_\alpha \cap f^{-1}Oy$, $\alpha \in A$. Так как $f^{-1}y \subset f^{-1}Oy$, то $O_\alpha = V_\alpha \cap f^{-1}y$, $\alpha \in A$. Система $\nu = \{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — открытое покрытие пространства $f^{-1}Oy$. Поскольку отображение f паракомпактно, то существуют окрестность $O_1y \subset Oy$ точки y и локально конечное открытое покрытие ν_1 пространства $f^{-1}O_1y$, вписанное в ν. Тогда ввиду o-псевдокомпактности отображения $f : X \to Y$ существует окрестность $O_2y \subset O_1y$ точки y такая, что $|\operatorname{St}(f^{-1}O_2y, \nu_1)| < \omega$, т. е. существует конечное подмножество ν_1' покрытия ν_1 пространства $f^{-1}O_2y$ такое, что $f^{-1}y \subset \cup\nu_1'$. Система ν_1' вписана в ν_1. Пусть $\nu_1' = \{W_1, \dots, W_s\}$, $s \in \mathbb{N}$. Тогда существуют множества $V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_s} \in \nu$ такие, что $W_i \subset V_{\alpha_i}$, $i = 1, \dots, s$, $\alpha_i \in A$. Поэтому $W_i \subset V_{\alpha_i} \subset U_{\alpha_i}$, $i = 1, \dots, s$, $\alpha_i \in A$. Следовательно, $f^{-1}y \subset \bigcup\limits_{i=1}^{s} U_{\alpha_s}$, значит, $f^{-1}y \subset \bigcup\limits_{i=1}^{s} O_{\alpha_s}$, и система $\{O_{\alpha_1}, \dots, O_{\alpha_s}\}$ является открытым и конечным подпокрытием покрытия λ. Так как отображение f замкнуто, оно бикомпактно.

Предложение 2. *Псевдокомпактное замкнутое функционально паракомпактное отображение бикомпактно.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 2. *Непрерывный образ o-псевдокомпактного отображения o-псевдокомпактен.*

Доказательство. Пусть отображение $f : X \to Y$ o-псевдокомпактно, $g : Z \to Y$ — его образ при морфизме $\xi : X \to Z$. Пусть, кроме того, множество O открыто в Y, $y \in O$. Рассмотрим открытую локально конечную в $g^{-1}O$ систему λ. Так как система $\xi^{-1}\lambda$ открыта и локально конечна в трубке $f^{-1}O$, существует окрестность $Oy \subset O$ точки y такая, что $|\operatorname{St}(f^{-1}Oy, \xi^{-1}\lambda)| < \omega$. Тогда и $|\operatorname{St}(g^{-1}Oy, \lambda)| = |\operatorname{St}(\xi)(f^{-1}Oy), \xi(\xi^{-1}\lambda))| < \omega$. Следовательно, отображение $g : Z \to Y$ o-псевдокомпактно.

Предложение 3. *Непрерывный образ псевдокомпактного отображения псевдокомпактен.*

Доказательство производится аналогично доказательству теоремы 2 с учетом того факта, что прообраз при непрерывном отображении функционально открытого множества представляет собой функционально открытое множество [2, с. 78].

Теорема 3. *Пусть отображение $f : X \to Y$ o-псевдокомпактно и для некоторого открытого в Y множества O множество B канонически замкнуто в трубке $f^{-1}O$. Тогда отображение $f_B = f|_B : B \to Y$ o-псевдокомпактно.*

Доказательство. Так как $B \subset f^{-1}O$, имеем $f_B(B) \subset O$. Рассмотрим открытое в Y множество O_1. Можно считать, что $O_1 \subset O$. Возьмем трубку $f_B^{-1}O_1 = f^{-1}O_1 \cap B$, точку $y \in O_1$ и локально конечную в трубке $f_B^{-1}O_1$ систему λ, состоящую из канонически замкнутых в трубке $f_B^{-1}O_1$ множеств. Множество $f^{-1}O_1 \cap B$ канонически замкнуто в трубке $f_B^{-1}O_1$. Так как система λ локально конечна и канонически замкнута в множестве $f^{-1}O_1 \cap B$, которое канонически замкнуто в трубке $f^{-1}O_1$, то [2, с. 121] система λ локально конечна и канонически замкнута в трубке $f^{-1}O_1$. Из o-псевдокомпактности отображения f следует существование такой окрестности $Oy \subset O_1$ точки y, что $|\operatorname{St}(f^{-1}Oy, \lambda)| < \omega$. Значит, $\bigl|\operatorname{St}\bigl(f_B^{-1}Oy, \lambda\bigr)\bigr| < \omega$, и отображение $f|_B : B \to Y$ o-псевдокомпактно.

Следствие. *В случае, когда пространство X вполне регулярно, теорема 3 верна для псевдокомпактного отображения $f : X \to Y$.*

Теорема 4. *Пусть множество S конечно. Комбинация $\nabla_{s\in S} f_s : X = \oplus X_s \to Y$, где $f_s : X_s \to Y$, $s \in S$, о-псевдокомпактна тогда и только тогда, когда все отображения $f_s : X_s \to Y$ о-псевдокомпактны.*

Доказательство. 1. Пусть отображение f o-псевдокомпактно. Рассмотрим отображение $f_s : X_s \to Y$, открытое в Y множество O, точку $y \in O$ и открытую локально конечную в $f_s^{-1}O$ систему λ. Так как $X = \oplus X_s$, для любого $s \in S$ множество X_s канонически замкнуто в X. Тогда по теореме 3 отображение $f_s : X_s \to Y$ o-псевдокомпактно.

2. Рассмотрим открытое в Y множество O и точку $y \in O$. Пусть система λ открыта и локально конечна в $X = \oplus X_s$. Тогда система $\lambda_s = \lambda \cap X$ открыта и локально конечна в X_s, $s \in S$, и, кроме того, $\lambda = \oplus \lambda_s$. Для любого $s \in S$ существует окрестность $O_s y \subset O$ точки y такая, что $\left|\mathrm{St}\big(f_s^{-1}O_s y, \lambda_s\big)\right| < \omega$. Пусть $Oy = \bigcap\limits_{s\in S} O_s y$. Тогда $\left|\mathrm{St}\big(f_s^{-1}Oy, \lambda_s\big)\right| < \omega$ для любого $s \in S$. Следовательно, $\left|\mathrm{St}\big(f_s^{-1}Oy \cap X_s, \lambda \cap X_s\big)\right| < \omega$ для любого $s \in S$. Так как множество S конечно, то $|\,\mathrm{St}(f^{-1}Oy, \lambda)| < \omega$, т. е. отображение f o-псевдокомпактно.

Предложение 4. *Пусть множество S конечно. Комбинация $\nabla_{s\in S} f_s : X = \oplus X_s \to Y$, где $f_s : X_s \to Y$, $s \in S$, псевдокомпактна тогда и только тогда, когда все отображения $f_s : X_s \to Y$ псевдокомпактны.*

Доказательство. 1. Пусть отображение f псевдокомпактно. Рассмотрим отображение $f_s : X_s \to Y$, открытое в Y множество O, точку $y \in O$ и функционально открытую локально конечную в f_s^{-1} систему λ. Так как $X = \oplus X_s$, система λ функционально открыта и локально конечна в X, следовательно, существует окрестность $Oy \subset O$ точки y такая, что $|\,\mathrm{St}(f^{-1}Oy, \lambda)| < \omega$. Тогда $\left|\mathrm{St}\big(f_s^{-1}Oy, \lambda\big)\right| < \omega$.

2. Доказательство п. 2 аналогично доказательству п. 2 теоремы 4.

3. О счетно компактных отображениях

Рассмотрим задачу распространения понятия счетной компактности с пространств на непрерывные отображения.

Напомним, что тихоновское пространство X называется *счетно компактным*, если из любого его счетного открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

Подмножество $B \subset X$ тихоновского пространства X называется *относительно счетно компактным* в X, если из любого счетного покрытия пространства X можно выбрать конечное подпокрытие пространства B.

Известно [2], что счетная компактность пространства X равносильна тому, что любая локально конечная в пространстве X система конечна.

Рассмотрим непрерывное отображение $f : X \to Y$.

Определение 1 (Б. А. Пасынков). Непрерывное отображение $f : X \to Y$ назовем *счетно компактным*, если для любого открытого в Y множества O, любой точки $y \in O$ и любого счетного открытого покрытия μ трубки $f^{-1}O$ существует окрестность Oy точки y такая, что $Oy \subset O$ и из покрытия μ можно выбрать конечное подпокрытие трубки $f^{-1}Oy$.

4. Критерии счетной компактности отображения

Для счетно компактного отображения справедливы критерии, аналогичные критериям счетной компактности пространства [2, теоремы 3.10.2, 3.10.3].

Предложение 1. *Для произвольного отображения $f : X \to Y$ эквивалентны следующие условия:*

1) *отображение $f : X \to Y$ счетно компактно;*

2) *для любого открытого в Y множества O, любой точки $y \in O$ и любого счетного семейства $\Phi = \{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ такого, что $(F_{\alpha_1} \cap \dots \cap F_{\alpha_s}) \cap f^{-1}Oy \neq \varnothing$ для любой окрестности Oy точки y, если s конечно, состоящего из замкнутых в $f^{-1}O$ множеств, существует окрестность Oy точки y такая, что $Oy \subset O$ и $f^{-1}Oy \cap (\cap\Phi) \neq \varnothing$;*

3) *для любого открытого в Y множества O, любой точки $y \in O$ и любой убывающей последовательности $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ пересекающихся с любой трубкой $f^{-1}Oy$ над любой окрестностью Oy точки y замкнутых в $f^{-1}O$ множеств существует окрестность Oy точки y такая, что $f^{-1}Oy \cap \left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_i\right) \neq \varnothing$ и $Oy \subset O$.*

Доказательство. 1)$\Rightarrow$ 2). Пусть множество O открыто в Y и $y \in O$. Пусть, кроме того, отображение $f : X \to Y$ счетно компактно. Рассмотрим счетное семейство $\Phi = \{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ замкнутых в $f^{-1}O$ множеств такое, что $(F_{\alpha_1} \cap \dots \cap F_{\alpha_s}) \cap f^{-1}Oy \neq \varnothing$ для любой окрестности Oy точки y и конечного s, и $f^{-1}Oy \cap (\cap\Phi) = \varnothing$ для любой окрестности Oy точки y.

Рассмотрим открытые в $f^{-1}O$ множества $U_\alpha = f^{-1}O \setminus F_\alpha$.

Так как

$$\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A} (f^{-1}O \setminus F_\alpha) = f^{-1}O \setminus \Big(\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha\Big) = f^{-1}O \setminus (\cap\Phi),$$

то $[f^{-1}y] \subset \bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha$ и $\mu = \{f^{-1}O \setminus [f^{-1}y]\} \cup \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — открытое счетное покрытие пространства $f^{-1}O$. Следовательно (так как отображение $f : X \to Y$ счетно компактно), существует окрестность Oy точки y такая, что $Oy \subset O$ и $f^{-1}Oy \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} U_{\alpha_i}$, $k \in \mathbb{N}$. Поэтому

$$f^{-1}Oy \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{\alpha_i} = \bigcup_{i=1}^{k} (f^{-1}O \setminus F_{\alpha_i}) = f^{-1}O \setminus \bigcap_{i=1}^{k} F_{\alpha_i}.$$

Но $\left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_{\alpha_i}\right) \cap f^{-1}Oy \neq \varnothing$ для любой окрестности Oy точки y. Получили противоречие. Значит, существует окрестность Oy точки y такая, что $f^{-1}Oy \cap (\cap\Phi) \neq \varnothing$. Импликация доказана.

2) $\Rightarrow$ 3). Рассмотрим открытое в Y множество O, точку $y \in O$ и произвольную убывающую последовательность $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ пересекающихся с любой трубкой $f^{-1}Oy$ над любой окрестностью Oy точки y замкнутых в $f^{-1}O$ множеств. Имеем $(F_1 \cap \dots \cap F_s) \cap f^{-1}Oy \neq \varnothing$ для любой окрестности Oy точки y, если s конечно. Следовательно, существует окрестность Oy точки y такая, что $Oy \subset O$ и $f^{-1}Oy \cap \left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_i\right) \neq \varnothing$. Импликация доказана.

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть существуют открытое множество $O \subset Y$, точка $y \in O$ и счетное открытое покрытие $\lambda = \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ пространства $f^{-1}O$ такие, что для

любой окрестности $Oy \subset O$ точки y из покрытия $\lambda = \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ нельзя выделить конечное подпокрытие трубки $f^{-1}Oy$.

Построим счетную последовательность $\Phi = \{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ замкнутых в $f^{-1}O$ множеств следующим образом:

$$F_1 = f^{-1}O \setminus U_1, \quad F_2 = f^{-1}O \setminus (U_1 \cup U_2), \dots, F_n = f^{-1}O \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_n), \dots .$$

Тогда $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ и для любого $i \in \mathbb{N}$ имеем $f^{-1}Oy \cap F_i \neq \varnothing$. Действительно, пусть $i \in \mathbb{N}$, тогда $F_i = f^{-1}O \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_i)$, $f^{-1}OY \not\subset U_1 \cup \dots \cup U_i$, так как из покрытия $\lambda = \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ нельзя выделить конечное подпокрытие трубки $f^{-1}Oy$.

Поскольку $f^{-1}Oy \subset \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} U_i$ для любой окрестности Oy точки y, то

$$f^{-1}Oy \cap \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i\right) = f^{-1}Oy \cap \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} (f^{-1}O \setminus U_i)\right) \subset f^{-1}Oy \cap \left(f^{-1}O \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) = \varnothing,$$

т. е. условие 3 не выполняется.

Импликация, а также предложение доказаны.

Напомним [1], что x — строгая предельная точка для множества A, если в любой ее окрестности лежит бесконечное множество точек из A. Множество таких точек обозначается через A^h.

Предложение 2. *Для отображения $f : X \to Y$ эквивалентны следующие условия:*

1) *отображение $f : X \to Y$ счетно компактно;*

2) *для любого открытого в Y множества O, любой точки $y \in O$ и любой локально конечной в $f^{-1}O$ системы λ существует окрестность Oy точки y такая, что $Oy \subset O$ и $|\operatorname{St}(f^{-1}Oy, \lambda)| < \omega$;*

3) *для любого открытого в Y множества O, любой точки $y \in O$ и любой локально конечной в $f^{-1}O$ системы λ, состоящей из одноточечных множеств, существует окрестность Oy точки y такая, что $Oy \subset O$ и $|\operatorname{St}(f^{-1}Oy, \lambda)| < \omega$;*

4) *для любого открытого в Y множества O, любой точки $y \in O$ и любого бесконечного подмножества μ пространства $f^{-1}O$ такого, что $|f^{-1}Oy \cap \mu| \geq \omega$ для любой окрестности Oy точки y, множество μ имеет в трубке $f^{-1}O$ строгую предельную точку;*

5) *для любого открытого в Y множества O, любой точки $y \in O$ и любого счетного бесконечного подмножества μ пространства $f^{-1}O$ такого, что $|f^{-1}Oy \cap \mu| \geq \omega$ для любой окрестности Oy точки y, множество μ имеет в трубке $f^{-1}O$ строгую предельную точку.*

Доказательство. 3) $\Rightarrow$ 1). Предположим, что условие 2 не выполняется, т. е. существуют открытое множество $O \subset Y$, точка $y \in O$ и локально конечное семейство $\lambda = \{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ непустых в $f^{-1}O$ множеств такие, что $|\operatorname{St}(f^{-1}Oy, \lambda)| \geq \omega$ для любой окрестности $Oy \subset O$ точки y.

В силу локальной конечности семейства λ система $F_1, F_2, \dots$, где $F_i = \bigcap\limits_{j=i}^{\infty} [A_j]$ является убывающей последовательностью непустых замкнутых в $f^{-1}O$ множеств таких, что $\bigcap\limits_{i=1}^{s} F_i = A_1 \cup \dots \cup A_s$, т. е. $\left(\bigcap\limits_{i=1}^{s} F_i\right) \cap f^{-1}Oy \neq \varnothing$ для конечного s и любой окрестности Oy точки y.

По предложению 1 отображение $f : X \to Y$ не счетно компактно.

Импликация доказана.

2) $\Rightarrow$ 3) очевидно.

3) $\Rightarrow$ 4). Пусть выполняется условие 3, но не выполняется условие 4.

Рассмотрим открытое в Y множество O, точку $y \in O$ и бесконечное множество $A = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ в $f^{-1}O$ такое, что $|f^1Oy \cap A| \geq \omega$ для любой окрестности Oy точки y. Пусть A не имеет в $f^{-1}O$ строгой предельной точки. Тогда для любой точки $x \in f^{-1}O$ существует ее окрестность $Ox \subset f^{-1}O$ такая, что $|Ox \cap A| < \omega$, т. е. система $\lambda = \{x_n : x_n \in A\}$ локально конечна в трубке $f^{-1}O$. Но $|\operatorname{St}(f^{-1}Oy, \lambda)| \geq \omega$ для любой окрестности Oy точки y. Получено противоречие.

Импликация доказана.

4) $\Rightarrow$ 5) очевидно.

5) $\Rightarrow$ 1). Пусть выполняется условие 5, но не выполняется условие 1. Тогда по предложению 1 существуют открытое в Y множество O, точка $y \in O$ и последовательность $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ непустых замкнутых в $f^{-1}O$ множеств такая, что $f^{-1}Oy \cap \left(\bigcap\limits_{i=1}^{s} F_i\right) \neq \varnothing$ для любой окрестности Oy точки y и любого конечного s, но $f^{-1}Oy \cap \left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \varnothing$ для любой окрестности Oy точки y.

Выберем по точке $x_i \in F_i \cap f^{-1}Oy$ для некоторой окрестности Oy точки y. Полученное множество $A = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ бесконечно, так как в противном случае некоторая его точка принадлежала бы бесконечному числу множеств F_i и тогда $f^{-1}Oy \cap \left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_i\right) \neq \varnothing$.

Для любой точки $x \in f^{-1}O$ существует $i \in \mathbb{N}$ такое, что $x \notin F_i$. Тогда множество $U_i = f^{-1}O \setminus F_i$ — окрестность точки x и $U_i \cap A \subset \{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}\}$ — конечное множество, т. е. условие 5 не выполняется.

Импликация, а также предложение доказаны.

Таким образом, доказан следующий критерий счетной компактности отображения $f : X \to Y$.

Критерий (∗). *Отображение $f : X \to Y$ счетно компактно тогда и только тогда, когда выполняется условие*

(d.1.3) *для любого открытого в Y множества O, любой точки $y \in O$ и любой локально конечной в $f^{-1}O$ системы λ существует окрестность $Oy \subset O$ точки y такая, что $|\operatorname{St}(f^{-1}Oy, \lambda)| < \omega$.*

Предложение 3. *Отображение $f : X \to Y$ удовлетворяет условию*

(c.2.3) *для любой точки $y \in Y$ и любого открытого счетного покрытия μ пространства X существует окрестность Oy точки y такая, что из покрытия μ можно выбрать конечное подпокрытие трубки $f^{-1}Oy$*

тогда и только тогда, когда выполняется условие

(d.2.3) *для любой точки $y \in Y$ и любой локально конечной в X системы λ существует окрестность Oy точки y такая, что $|\operatorname{St}(f^{-1}Oy, \lambda)| < \omega$.*

Доказательство следует из предложения 2 и из того факта, что множество $O = Y$ открыто в Y.

Предложение 4. *Отображение $f : X \to Y$ удовлетворяет условию*

(c.3.3) *для любого открытого множества $O \subset Y$ и любой точки $y \in O$ из любого открытого счетного покрытия μ пространства $f^{-1}O$ можно выбрать конечное подпокрытие слоя $f^{-1}y$*

тогда и только тогда, когда выполняется условие

(d.3.3) *для любого открытого множества $O \subset Y$, любой точки $y \in O$ и любой локально конечной в $f^{-1}O$ системы λ имеем $|\operatorname{St}(f^{-1}Oy, \lambda)| < \omega$.*

Доказательство аналогично доказательству критерия $(*)$.

Предложение 5. *Отображение $f : X \to Y$ удовлетворяет условию*

(c.4.3) *для любой точки $y \in Y$ из любого открытого счетного покрытия μ пространства X можно выбрать конечное подпокрытие слоя $f^{-1}y$*

тогда и только тогда, когда выполняется условие

(d.4.3) *для любой точки $y \in O$ и любой локально конечной в X системы λ имеем $|\operatorname{St}(f^{-1}Oy, \lambda)| < \omega$.*

Доказательство следует из предложения 5.

Следствие 1. *Пусть отображение $f : X \to Y$ замкнуто. Тогда* (c.1.3) $\Leftrightarrow$ (d.3.3).

Следствие. *Пусть отображение $f : X \to Y$ замкнуто, пространство Y регулярно. Тогда* (c.1.3) $\Leftrightarrow$ (d.1.3) $\Leftrightarrow$(d.2.3) $\Leftrightarrow$ (d.3.3) $\Leftrightarrow$ (d.4.3).

5. Свойства счетно компактного отображения

Для счетно компактных отображений мы можем получить ряд свойств, аналогичных свойствам псевдокомпактных отображений.

Теорема 1. *Счетно компактное отображение o-псевдокомпактно.*

Доказательство следует из того, что открытая локально конечная система множеств является локально конечной системой множеств и в силу критерия $(*)$.

Следствие 1. *Счетно компактное отображение псевдокомпактно.*

Теорема 2. *Счетно компактное замкнутое паракомпактное отображение бикомпактно.*

Следствие. *Если отображение $f : X \to Y$ паракомпактно и замкнуто, то o-псевдокомпактность, бикомпактность и счетная компактность отображения $f : X \to Y$ совпадают.*

Теорема 3. *Непрерывный образ счетно компактного отображения счетно компактен.*

Доказательство проводим, используя критерий $(*)$.

Пусть отображение $f : X \to Y$ счетно компактно, $g : Z \to Y$ — его образ при морфизме $\xi : X \to Z$. Пусть множество O открыто в $Y, y \in O$. Рассмотрим локально конечную в $g^{-1}O$ систему λ. Так как система $\xi^{-1}\lambda$ локально конечна в трубке $f^{-1}O$, существует окрестность $Oy \subset O$ точки y такая, что $|\operatorname{St}(f^{-1}Oy, \xi^{-1}\lambda)| < \omega$. Тогда и $|\operatorname{St}(g^{-1}Oy, \lambda)|\,|\operatorname{St}(\xi(f^{-1}Oy), \xi(\xi^{-1}\lambda))| < \omega$. Следовательно, отображение $g : Z \to Y$ счетно компактно.

Теорема 4. *Пусть множество S конечно. Комбинация $\nabla_{s\in S} f_s : X = \oplus X_s \to Y$, где $f_s : X_s \to Y$, $s \in S$, счетно компактна тогда и только тогда, когда все отображения $f_s : X_s \to Y$ счетно компактны.*

Доказательство проводим, используя критерий $(*)$.

1. Пусть отображение f счетно компактно. Рассмотрим отображение $f_s : X_s \to Y$, открытое в Y множество O, точку $y \in O$ и локально конечную в

$f_s^{-1}O$ систему λ. Так как $X \oplus X_s$, для любого $s \in S$ множество X_s канонически замкнуто в X. Тогда отображение $f_s : X_s \to Y$ счетно компактно.

2. Рассмотрим открытое в Y множество O и точку $y \in O$. Пусть система λ локально конечна в $X = \oplus X_s$. Тогда система $\lambda_s = \lambda \cap X_s$ локально конечна в X_s, $s \in S$, и, кроме того, $\lambda = \oplus\lambda_s$. Для любого $s \in S$ существует окрестность $O_s y \subset O$ точки y такая, что $|\operatorname{St}(f_s^{-1}O_s y, \lambda)| < \omega$. Пусть $Oy = \bigcup\limits_{s\in S} O_s y$. Тогда $\left|\operatorname{St}\left(f_s^{-1}Oy, \lambda\right)\right| < \omega$ для любого $s \in S$. Следовательно, $\left|\operatorname{St}\left(f_s^{-1}Oy \cap X_s, \lambda \cap X_s\right)\right| < \omega$ для любого $s \in S$. Так как множество S конечно, то $|\operatorname{St}(f^{-1}Oy, \lambda)| < \omega$, т. е. отображение f счетно компактно.

Теорема 5. *Пусть отображение $f : X \to Y$ счетно компактно и для некоторого открытого в Y множества O множество B замкнуто в трубке $f^{-1}O$. Тогда отображение $f_B = f|_B : B \to Y$ счетно компактно.*

Доказательство. Рассмотрим открытое в Y множество O_1, точку $y \in O_1$ и локально конечную в пространстве $B \cap f^{-1}O_1 = f_B^{-1}O_1$ систему λ. Так как $B \subset f^{-1}O$, то $f_B^{-1}O_1 = B \cap f^{-1}O_1 \subset f^{-1}O \cap f^{-1}O_1$. Поскольку множество $B \cap f^{-1}O_1$ замкнуто в трубке $f^{-1}O_1$, система λ локально конечна в пространстве $f^{-1}O_1$. В силу того, что отображение $f : X \to Y$ счетно компактно, по критерию $(*)$ существует окрестность $Oy \subset O$ точки y такая, что $|\operatorname{St}(f^{-1}Oy, \lambda)| < \omega$. Но тогда и $\left|\operatorname{St}\left(f_B^{-1}Oy, \lambda\right)\right| = |\operatorname{St}(f^{-1}Oy \cap B, \lambda)| \le |\operatorname{St}(f^{-1}Oy, \lambda)| < \omega$. Следовательно, отображение $f_B = f|_B : B \to Y$ счетно компактно.

Рассмотрим связь счетной компактности и псевдокомпактности отображения.

Определение 1. Для отображения $f : X \to Y$ множества A и B из X называются *f-отделимыми окрестностями* (*f-функционально отделимыми*), если любая точка $y \in Y$ обладает окрестностью Oy, в прообразе $f^1 Oy$ которой множества A и B отделимы окрестностями (функционально отделимы).

Определение 2. Отображение $f : X \to Y$ называется (*функционально*) *преднормальным*, если любые два дизъюнктные замкнутые в X множества f-отделимы окрестностями (f-функционально отделимы).

Определение 3 (Б. А. Пасынков). Отображение $f : X \to Y$ называется (*функционально*) *нормальным*, если для любого открытого в Y множества O отображение $f : f^{-1}O \to O$ является (функционально) преднормальным.

Теорема 6. *Если отображение $f : X \to Y$ нормально, то o-псевдокомпактность и счетная компактность отображения $f : X \to Y$ совпадают.*

Доказательство. Пусть отображение $f : X \to Y$ не счетно компактно. Тогда по предложению 2 существуют открытое в Y множество O, точка $y \in O$ и бесконечное множество $A = \{x_1, x_2, \dots\} \subset f^{-1}O$ такое, что $|f^{-1}Oy \cap A| \ge \omega$ для любой окрестности Oy точки y и $A^h = 0$ в $f^{-1}O$. Множество A является замкнутым дискретным подпространством трубки $f^{-1}O$.

Так как множества $\{[x_1]\}$ и $A \setminus x_1$ замкнуты в трубке $f^{-1}O$ и $[x_1] \cap (A \setminus x_1) = \varnothing$, в силу нормальности отображения $f : X \to Y$ существуют окрестность $O_1 y \subset O$ точки y и открытые множества $U_1 \ni [x_1]$ и $V_1 \supset (A \setminus x_1)$ такие, что $f^{-1}O_1 y \cap (U_1 \cap V_1) = \varnothing$.

Для множеств $\{[x_2]\}$ и $A \setminus (x_1 \cup x_2)$ существуют окрестность $O_2 y \subset O_1 y$ и открытые множества $U_2 \ni [x_2]$ и $V_2 \supset A \setminus (x_1 \cup x_2)$ такие, что $f^{-1}O_2 y \cap (U_2 \cap V_2) = \varnothing \dots$.

Для множеств $\{[x_n]\}$ и $A \setminus (x_1 \cup \dots \cup x_n)$ существуют окрестность $O_n y \subset O_{n-1} y$ и открытые множества $U_n \ni [x_n]$ и $V_n \supset A \setminus (x_1 \cup \dots \cup x_n)$ такие, что $f^{-1}O_n y \cap (U_n \cap V_n) = \varnothing$.

Тогда система $\lambda = \{U_n \cap f^{-1}O_n y\}_{n \in \mathbb{N}}$ локально конечна и открыта в трубке $f^{-1}O$. Следовательно, существует окрестность $Oy \subset O$ точки y такая, что $|\operatorname{St}(f^{-1}Oy, \lambda)| < \omega$. Но тогда и $|f^{-1}Oy \cap A| < \omega$. Получено противоречие.

Следствие 1. *Если $f : X \to Y$ — нормальное отображение вполне регулярных пространств, то псевдокомпактность и счетная компактность отображения $f : X \to Y$ совпадают.*

Теорема 7. *Если отображение $f : X \to Y$ функционально нормально, то псевдокомпактность и счетная компактность отображения $f : X \to Y$ совпадают.*

Доказательство. Пусть отображение $f : X \to Y$ псевдокомпактно, но не счетно компактно. Рассмотрим открытое множество $O \subset y$, точку $y \in O$ и бесконечное множество $A = \{x_1, x_2, \dots\} \subset f^{-1}O$ такое, что $|f^{-1}Oy \cap A| \geq \omega$ для любой окрестности Oy точки y и $A^h = 0$ в $f^{-1}O$.

Так как множества $\{[x_1]\}$ и $A \setminus x_1$ замкнуты в трубке $f^{-1}O$ и $[x_1] \cap (A \setminus x_1) = \varnothing$, в силу функциональной нормальности отображения $f : X \to Y$ существуют окрестность $O_1 y \subset O$ точки y и непрерывная функция $\varphi_1 : f^{-1}O_1 y \to R$ такие, что $\varphi_1(X_1) = 1$ и $\varphi_1(A \setminus x_1) \subset \{0\}$.

Для множеств $\{[x_2]\}$ и $A \setminus (x_1 \cup x_2)$ существуют окрестность $O_2 y \subset O_1 y$ и непрерывная функция $\varphi_2 : f^{-1}O_2 y \to R$ такие, что $\varphi_2(x_2) = 2$ и $\varphi_2(A \setminus (x_1 \cup x_2)) \subset \{0\} \dots$.

Для множеств $\{[x_n]\}$ и $A \setminus (x_1 \cup \dots \cup x_n)$ существуют окрестность $O_n y \subset O_{n-1} y$ и непрерывная функция $\varphi_n : f^{-1}O_n y \to R$ такие, что $\varphi_n(x_n) = n$ и $\varphi_n(A \setminus (x_1 \cup x_n)) \subset \{0\}$.

Тогда функция $\varphi = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \varphi_n : f^{-1}O \to R$, где $\varphi_0 \equiv 0$ на $f^{-1}O$, непрерывна и неограничена в прообразе любой окрестности Oy точки y.

Действительно, пусть $|\varphi|_{f^{-1}Oy}| < k$. Тогда так как $|f^{-1}Oy \cap A| \geq \omega$, то существует $x_{k+1} \in f^{-1}Oy$, следовательно, $\varphi|_{f^{-1}Oy} \geq \varphi_{k+1} \geq k + 1$.

Значит, отображение $f : X \to Y$ не псевдокомпактно.

6. Локально бикомпактные отображения и k-отображения

Напомним, что топологическое пространство X называется *локально компактным*, если для каждого $x \in X$ существует окрестность U точки x такая, что $[U]$ является компактным подпространством пространства X.

Напомним также, что топологическое пространство X называется *k-пространством*, если оно хаусдорфово и представимо в виде образа некоторого локально компактного хаусдорфова пространства при факторном отображении. Ясно, что каждое локально компактное хаусдорфово пространство является k-пространством.

Б. А. Пасынков [1] поставил задачу распространения основных понятий общей топологии на непрерывные отображения.

7. Факторные морфизмы и локально бикомпактные отображения

Определение 1. Пусть даны отображения $f : X \to Y$ и $g : Z \to Y$. Морфизм $\xi : X \to Y$ называется *факторным*, если отображение $\xi : X \to Z$ является факторным отображением и коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\xi"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \arrow[dl, "g"] \\ & Y & \end{tikzcd}.$$

Из свойств факторных отображений непосредственно вытекают следующие свойства факторных морфизмов.

Свойство 1. Композиция двух факторных морфизмов — факторный морфизм.

Свойство 2. Пусть композиция $\mu\xi$ морфизмов $\mu : f \to g$ и $\xi : g \to h$ — факторный морфизм. Тогда $\xi : g \to h$ — факторный морфизм. (См. следствие 2.4.5 из [2].)

Свойство 3. Пусть даны отображения $f : X \to Y$, $g : Z \to Y$ и морфизм $h : f \to g$. Если существуют подотображение $f|_A : A \to Y$, $A \subset X$, такое, что $h(f|_A) = g$ и сужение $h|_{f|_A}$ — факторный морфизм, то h — факторный морфизм. (См. следствие 2.4.6 из [2].)

Рассмотрим теперь определение локально бикомпактного отображения.

Определение 2 (Б. А. Пасынков). Непрерывное отображение $f : X \to Y$ называется *локально бикомпактным*, если для любого $x \in X$ существуют окрестность Ofx его образа fx и окрестность Ox точки $x : Ox \in f^{-1}Ofx$ такие, что отображение $f : [Ox]_{f^{-1}Ofx} \to Ofx$ совершенно.

Предложение 1. *Непрерывное отображение $f : X \to Y$ локально бикомпактно тогда и только тогда, когда*

(A) *для любой точки $x \in X$ существуют ее окрестность Ox и окрестность Ox ее образа fx такие, что отображение $f : [Ox]_X \cap f^{-1}Ofx \to Ofx$ совершенно.*

Доказательство. Для начала заметим, что в условии (A) можно считать, что $Ox \subset f^{-1}Ofx$. Действительно, окрестность O_1x равна $Ox \cap f^{-1}Ofx \subset f^{-1}Ofx$ и множество O_1x открыто как в X, так и в $f^{-1}Ofx$.

Для доказательства эквивалентности определения 2 и свойства (A) достаточно показать, что

$$[Ox]_X \cap f^{-1}Ofx = [O_1x]_{f^{-1}Ofx}. \tag{1}$$

Докажем равенство (1).

1. Пусть $t \in [Ox]_X \cap f^{-1}Ofx$. Докажем, что $t \in [O_1x]_{f^{-1}Ofx}$. Рассмотрим окрестность U_1t точки t в $f^{-1}Ofx$. Для нее существует Ut-окрестность точки t в X такая, что $U_1t = Ut \cap f^{-1}Ofx$. Так как $t \in [Ox]_x \cap f^{-1}Ofx$, то $t \in f^{-1}Ofx$ и $t \in [Ox]_x$, следовательно, для Ut имеем $Ut \cap Ox \neq \varnothing$. Тогда вследствие того, что множество U_1t открыто в X (в силу непрерывности отображения $f : X \to Y$), $U_1t \cap Ox \neq \varnothing$, следовательно, $Ut \cap f^{-1}Ofx \cap Ox \neq \varnothing$, значит, $(Ut \cap f^{-1}Ofx) \cap (Ox \cap f^{-1}Ofx) \neq \varnothing$. Тем самым $U_1t \cap O_1x \neq \varnothing$ для любой окрестности U_1t точки t в $f^{-1}Ofx$. Таким образом, $t \in [O_1x]_{f^{-1}Ofx}$. Поэтому $[Ox]_X \cap f^{-1}Ofx \subset [O_1x]_{f^{-1}Ofx}$.

2. Пусть $t \in [O_1x]_{f^{-1}Ofx}$. Рассмотрим произвольную окрестность Ut точки t в X. Тогда множество $U_1t = Ut \cap f^{-1}Ofx$ открыто в $f^{-1}Ofx$ и поэтому $U_1t \cap O_1x \neq \varnothing$. Так как $O_1x \subset Ox$ и $U_1t \subset Ut$, то $Ut \cap O \supset U_1t \cap O_1x \neq \varnothing$. Следовательно, $t \in [Ox]_x$, поскольку $t \in f^{-1}Ofx$, то $t \in [Ox]_X \cap f^{-1}Ofx$. Значит, $[Ox]_X \cap f^{-1}Ofx \supset [O_1x]_{f^{-1}Ofx}$, и равенство (1) доказано.

Далее, можно легко получить эквивалентность определения 2 и свойства (A).

Действительно, пусть отображение f локально бикомпактно. Рассмотрим произвольную точку $x \in X$. Существуют окрестность Ofx точки x и окрестность $O_1x \subset f^{-1}Ofx$ такие, что отображение $f : [Ox]_{f^{-1}Ofx} \to Ofx$ совершенно. Для открытого в $f^{-1}Ofx$ множества O_1x существует открытое в X множество Ox такое, что $O_1x = Ox \cap f^{-1}Ofx$, и в силу (1) отображение $f : [Ox]_X \cap f^{-1}Ofx \to Ofx$ совершенно.

Пусть теперь имеет место свойство (A).

Тогда для точки $x \in X$ существуют окрестность Ox и окрестность Ofx ее образа fx такие, что отображение $f : [Ox]_X \cap f^{-1}Ofx \to Ofx$ совершенно. Таким образом, $O_1x = Ox \cap f^{-1}Ofx$ — искомая окрестность для определения 2.

Действительно, $O_1x \subset f^{-1}Ofx$ и отображение $f : [O_1x]_{f^{-1}Ofx} \to Ofx$ совершенно.

Лемма 1. *Пусть пространства X и Y хаусдорфовы, X — локально бикомпактное пространство. Тогда отображение $f : X \to Y$ локально бикомпактно.*

Доказательство. Рассмотрим точку $x \in X$ и окрестность Y точки fx. Найдем окрестность $Ox \subset f^{-1}Y$ точки x такую, что отображение $f : [Ox]_{f^{-1}Y} \to Ofx$ совершенно. Так как множество $f^{-1}Y$ открыто в X, то пространство $f^{-1}Y$ является локально бикомпактным хаусдорфовым пространством [2], следовательно, для точки $x \subset f^{-1}Y$ существует ее окрестность $Ox \subset f^{-1}Y$ такая, что множество $[Ox]_{f^{-1}Y}$ бикомпактно.

Так как пространство Y хаусдорфово, то для любой точки $y \in Y$ ее прообраз $f^{-1}y$ бикомпактен. Поскольку непрерывное отображение бикомпактного пространства в хаусдорфово пространство замкнуто, отображение $f : [Ox]_{f^{-1}Y} \to Y$ совершенно. Следовательно, отображение $f : X \to Y$ локально бикомпактно.

8. Мультипликативность локальной бикомпактности отображения

Лемма 1. *Пусть $f : X \to Y$ и для любого $x \in X$ существуют окрестности Ofx и Ox такие, что $f|_{[Ox]_X \cap f^{-1}Ofx}$ — совершенное отображение. Пусть $O_1fx \subset Ofx$. Тогда $f|_{[Ox]_X \cap f^{-1}Ofx}$ совершенно.*

Доказательство. Действительно, $f|_{[Ox]_X \cap f^{-1}Ofx}$ совершенно как сужение на трубку $f^{-1}Ofx$ по предложению 3.7.4 из [2].

Теорема 1. *Произведение локально бикомпактных отображений локально бикомпактно.*

Доказательство. Пусть отображения $f_1 : X_1 \to Y$, $f_2 : X_2 \to Y$ локально бикомпактны и $f : X_0 \to Y$ — послойное произведение этих отображений. Пусть, кроме того, $x = (x_1, x_2) \in X_0$, $x_1 = p_1x$, $x_2 = p_2x$, $y = fx$.

Так как отображения f_1 и f_2 локально бикомпактны, то существуют окрестности Of_ix_i, Ox_i такие, что отображение $f|_{[Ox_i]_{x_i} \cap f_i^{-1}Of_ix_i}$, $i = 1, 2$, совершенно.

Пусть $y = f_1x_1 = f_1(p_1x) = f_2(p_2x) = f_2x_2 = fx$, и пусть $Oy = O_1y \cap O_2y = Of_1x_1 = Of_2x_2$. Тогда отображения $f_i|_{[Ox_i]_{x_i} \cap f_i^{-1}Oy} = f_i'$ совершенны по лемме 1 и их послойное произведение $f = f|_Z \to Oy$ совершенно. Но

$$Z = X_0 \cap \big(f_1^{-1}Oy \cap [Ox_1]_{x_1}\big) \times \big(f_2^{-1}Oy \cap [Ox_2]_{x_2}\big) = X_0 \cap \big(f_1^{-1}Oy \times f_2^{-1}Oy\big) \\ \cap ([Ox_1]_{x_1} \times [Ox_2]_{x_2}) = X_0 \cap f^1Oy \times [Ox]_{x_1 \cap x_2} \supset f^1Oy \cap [Ox]_{x_0}$$

замкнуто в Z

Таким образом, отображение $f_i|_{[Ox]_{x_0} \cap f^{-1}Ofx}$ совершенно, и, следовательно, отображение $f : X_0 \to Y$ локально бикомпактно.

Теорема 2. *Для любого локально бикомпактного отображения $f : X \to Y$ и любого факторного морфизма $\xi : g \to h$, где $g : Z \to Y$, $h : T \to Y$, декартово произведение $\eta : f \times g \to f \times h$ — факторный морфизм.*

Доказательство. Пусть прообраз $\eta^{-1}W \subset Z_0$ множества $W \subset T_0$ открыт, и пусть $(x_0, t_0) \in W$. Выберем точку $z_0 \subset \xi^{-1}t_0$ и рассмотрим окрестность $Ofx_0 \subset Y$ точки fx_0 и окрестность $Ox_0 \subset f^{-1}Ofx_0$ такие, что отображение $f : [Ox_0]_{f^{-1}Ofx_0} \to Ofx_0$ совершенно (оно существует в связи с локальной бикомпактностью отображения f), и, кроме того, $Z_0 \cap ([Ox_0]_{f^{-1}Ofx_0} \times \{Z_0\} \subset \eta^{-1}W$. Для любого $z \in Z$ имеем $Z_0 \cap \big([Ox_0]_{f^{-1}Ofx_0} \times \xi^{-1}\xi z\big) \subset \eta^{-1}W$, если $Z_0 \cap ([Ox_0]_{f^{-1}Ofx_0} \times \{z\}) \subset \eta^{-1}W$, поэтому $Z_0 \cap ([Ox_0]_{f^{-1}Ofx_0} \times \xi^{-1}t_0) \subset \eta^{-1}W$. Множество $V = \{t \in T : Z_0 \cap ([Ox_0]_{f^{-1}Ofx_0} \times \xi^{-1}t) \subset \eta^{-1}W\}$ удовлетворяет условию $(x_0, t_0) \in (Ox_0 \times V) \cap T_0 \subset W$, значит, достаточно показать, что V открыто в T.

Так как отображение ξ факторно, это сводится к доказательству открытости в Z множества

$$\xi^{-1} = \{z \in Z : Z_0 \cap ([Ox_0]_{f^{-1}Ofx_0} \times \xi^{-1}\xi z) \subset \eta^{-1}W\} \\ = Y\{z \in Z : Z_0 \cap ([Ox_0]_{f^{-1}Ofx_0} \times \{z\}) \subset \eta^{-1}W\}.$$

Множество $\xi^{-1}V$ является дополнением проекции замкнутого множества $(Z_0 \cap ([Ox_0]_{f^{-1}Ofx_0} \times Z)) \setminus \eta^{-1}W$ при отображении $p_{z_2} : Z_0 \cap ([Ox_0]_{f^{-1}Ofx_0} \times Z) \to Z$, которое по второй лемме о параллельных совершенно. Значит, $\xi^{-1}V$ открыто в Z, и, следовательно, так как отображение ξ факторно, то множество V открыто в T. Таким образом, отображение $\eta : Z_0 \to T_0$ факторно, поэтому $\eta : f \times g \to f \times h$ — факторный морфизм.

9. *k*-Отображения и их свойства

Определение 1. Образ локально бикомпактного отображения при факторном морфизме называется *k-отображением.*

Из теоремы 2 п. 2 следует

Лемма 1. *Произведение k-отображения f и локально бикомпактного отображения g является k-отображением.*

Доказательство. Так как f — k-отображение, существуют локально бикомпактное отображение f_0 и факторный морфизм ξ такие, что $\xi : f_0 \to f$. Тогда по теореме 2 п. 8 $\eta : f_0 \times g \to f \times g$ — факторный морфизм и, поскольку по теореме 1 п. 2 отображение $f_0 \times g$ локально бикомпактно, то $f \times g$ будет k-отображением по определению. Лемма доказана

Имеет место следующая характеризация k-отображений.

Теорема 1. *Отображение $f : X \to Y$ является k-отображением тогда и только тогда, когда*

$(*)$ в X замкнуто такое и только такое множество $A \subset X$, что для любого открытого в Y множества O и любого замкнутого множества $Z \subset f^{-1}O$ такого, что отображение $f : Z \to O$ совершенно, имеем, что $f : A \cap Z \to O$ совершенно и $A \cap Z$ замкнуто.

Доказательство. 1. Пусть f — k-отображение. Докажем $(*)$. Пусть $A \subset X$ и для любого открытого $O \subset Y$ и $Z \subset f^{-1}O$ такого, что отображение $f : Z \to O$ совершенно, имеем, что $f : A \cap Z \to O$ совершенно.

Докажем, что множество A замкнуто в X. Пусть $\xi : g \to f$ — факторный морфизм локально бикомпактного отображения $g : Z \to Y$ на отображение f.

Пусть точка z принадлежит $[f^{-1}A]_z$. Так как g — локально бикомпактное отображение, существуют окрестности Ogz и Oz, $g|_{[Oz]_Z \cap g^{-1}Ogz}$ совершенно.

Множество $\xi^{-1}(A \cap \xi([Oz]_z \cap g^{-1}Ogz))$ замкнуто в $g^{-1}Ogz$ (так как его образ замкнут в $\xi(g^{-1}Ogz)$) и содержит множество $\xi^{-1}A \cap [Oz]_z \cap g^{-1}Ogz$, значит, $z \in \xi^{-1}A$. Следовательно, $[\xi^{-1}A]_z = \xi^{-1}A$, и так как ξ факторно, то $[A]_x = A$.

2. Рассмотрим отображение $f : X \to Y$, обозначим через $Z(f)$ семейство всех совершенных подотображений отображения f.

Отображение $f = \bigoplus\limits_{z \in Z(f)} Z$ локально совершенно, а морфизм $\xi = \nabla_{z \in Z}(f) i_z$, где i_z — тождественное вложение подотображения Z в отображение f, непрерывен, так как все отображения согласованы.

Имеем $\xi : \tilde{f} \to f$, $f : X \to Y$, $\tilde{f} : \widetilde{X} \to Y$, $\widetilde{X} = \oplus Z$, $f|_z$ совершенно. Докажем, что если выполняется $(*)$, то ξ — факторный морфизм.

Пусть $\xi^{-1}W$ открыто в $\widetilde{X}$. Докажем, что W открыто в X. Множество $(\widetilde{X} \setminus \xi^{-1}W)$ замкнуто в $\widetilde{X}$.

Имеем $\xi(\widetilde{X} \setminus \xi^{-1}W) = A$. Пусть $O = Y$, $f : Z \to O$ совершенно, следовательно, $f(A \cap Z) = f(\xi(\widetilde{X} \setminus \xi^{-1}W) \cap Z) = f(\xi(Z \setminus \xi^{-1}W)$ совершенно (так как $Z \subset \oplus \widetilde{X}$).

По условию $(*)$ A замкнуто в X, следовательно, $\xi(\widetilde{X} \setminus \xi^{-1}W)$ замкнуто в X, тогда $(\xi\widetilde{X} \setminus \xi\xi^{-1}W) = X \setminus W$ замкнуто в X, поэтому W открыто в X и ξ — факторный морфизм. Теорема доказана.

Известно [2, предложение 3.7.4.], что если отображение $f : X \to Y$ совершенно, то для любого замкнутого $A \subset X$ и любого $B \subset Y$ отображения $f|_A : A \to Y$ и $f|_B : f^{-1}B \to B$ совершенны.

Докажем аналогичное утверждение для локально бикомпактных отображений.

Утверждение 1. *Если отображение $f : X \to Y$ локально бикомпактно, то для замкнутого $A \subset X$ и любого $B \subset Y$ отображения $f|_A : A \to Y$ и $f|_B : f^{-1}B \to B$ локально бикомпактны.*

Доказательство. Пусть отображение $f : X \to Y$ локально бикомпактно, т. е. $\forall x \in X \, \exists Ox \, \exists Ofx : f_0 : [Ox]_x \cap f^{-1}Ofx \to Ofx$ совершенно.

Пусть множество $A \subset X$ замкнуто. Так как множество $A \cap [Ox]_x \cap f^{-1}Ofx$ замкнуто в $[Ox]_x \cap f^{-1}Ofx$, отображение $f_0|_A : A \cap [Ox]_A \cap f^1 Ofx \to Ofx$ совершенно, т. е. отображение $f_0|_A : [Ox]_A \cap f_A^{-1} Of_A x \to Of_A x$ совершенно. Следовательно, отображение $f|_A : A \to Y$ локально бикомпактно.

2. Пусть $B \subset Y$. Тогда для любого $x \in f^{-1}B$ существуют окрестности $O_Bx = f^{-1}B \cap Ox$ и $Of_Bx = B \cap Ofx$ такие, что отображение $f_0|_B : [O_Bx] \cap f_B^{-1}Of_Bx$ совершенно. Утверждение доказано.

Известно также [2, предложение 2.4.15], что если отображение $f : X \to Y$ факторно, то для любого открытого или замкнутого $B \subset Y$ отображение $f_B : f^{-1}B \to B$ факторно.

Докажем теперь следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть $f : X \to Y$ — k-отображение, множество A замкнуто в X, множество O открыто* (*замкнуто*) *в Y.*

Тогда отображения $f|_A : A \to Y$ и $f|_O : f^{-1}O \to O$ суть k-отображения.

Доказательство. Пусть $f : X \to Y$ — k-отображение. Тогда существуют факторный морфизм ξ и локально бикомпактное отображение g такие, что $\xi : g \to f$.

1. Пусть A замкнуто в X. Тогда $\xi^{-1}A$ замкнуто в Z, отображение $g|_{\xi^{-1}A}$ локально бикомпактно (утверждение 1), $\xi_A : \xi^{-1}A \to A$ — факторное отображение, значит, ξ_A — факторный морфизм, $\xi_A : g|_{\xi^{-1}A} \to f|_A$, и, следовательно, $f|_A$ — k-отображение.

2. Пусть множество O открыто в Y. Тогда $f^{-1}O$ открыто в X и отображение $g_0 : g^{-1}O \to O$ локально бикомпактно (утверждение 1) и является прообразом отображения $f_0 : f^{-1}O \to O$ при факторном морфизме $\xi_0 : g_0 \to f_0$, где отображение $\xi_0 : g^{-1}O$ стремится к $f^{-1}O$. Лемма доказана.

Таким образом, мы рассмотрели некоторые аспекты, связанные с локально бикомпактными отображениями и k-отображениями.

Все задачи были поставлены Б. А. Пасынковым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пасынков Б. А.* О распространении на отображения некоторых понятий и утверждений, касающихся пространств // Отображения и функторы. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1984
2. *Энгелькин Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.
3. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. М.: Мир, 1973.

Статья поступила 16 октября 2001 г.

Миронова Юлия Николаевна
Московская гос. юридическая академия, кафедра правовой информатики
mironovajn@mail.ru