Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2002. Том 43, № 5

УДК 517.957

КОММУТАТИВНЫЕ КОЛЬЦА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ, ОТВЕЧАЮЩИЕ МНОГОМЕРНЫМ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ МНОГООБРАЗИЯМ

А. Е. Миронов

Аннотация: Построены новые примеры многомерных матричных коммутирующих дифференциальных операторов, а также построен многомерный аналог иерархии Кадомцева — Петвиашвили.

Ключевые слова: коммутирующие дифференциальные операторы

1. Введение

В статье мы построим коммутативные кольца многомерных $N \times N$-матричных дифференциальных операторов, чьи совместные собственные вектор-функции и собственные числа параметризуются точками спектрального многообразия Y^k, которое является пересечением гладких гиперповерхностей $Y_{a_1} \cap \dots \cap Y_{a_k}$ в главно поляризованном абелевом многообразии X^g размерности g, $k < g-1$. Гиперповерхность Y_{a_j} является сдвигом на элемент $a_j \in X^g$ тэта-дивизора $Y \subset X^g$. Число N равно rd_g, где d_g — индекс g-кратного самопересечения гиперповерхности Y. Через Q^j обозначим многообразие $Y^j \cap Y$. Далее будем предполагать, что многообразие Y^j трансверсально пересекается с $Y_{a_{j+s}}$ и с Y, $j+s \le k$. Пусть Y^j и Q^j являются гладкими, неприводимыми, и пусть также набор $a_1, \dots, a_k$ находится в общем положении (т. е. принадлежит некоторому открытому всюду плотному множеству в $X^g \times \dots \times X^g$).

С этими коммутативными кольцами связан аналог иерархии Кадомцева — Петвиашвили, который мы укажем в этой работе.

Основной результат — это следующая

Теорема 1. *Существует вложение L_k кольца мероморфных функций на многообразии Y^k с полюсом на Q^k в кольцо $N \times N$-матричных дифференциальных операторов по $g-k$ переменным с аналитическими в окрестности 0 коэффициентами*

$$L_k : \mathscr{A}_k \to \mathrm{Mat}(N, g-k).$$

Образом вложения является коммутативное кольцо $(g-k)$-мерных матричных дифференциальных операторов.

Используя теорему Римана — Роха — Хирцебруха, можно показать, что число d_g, а значит, и N, кратно $g!$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 00–01–00915, 00–15–99252 и 01–01–06017).

Операторы $L_k(\mathscr{A}_k)$ являются операторами ранга r. Это означает, что каждой точке многообразия Y^k отвечает r линейно независимых собственных вектор-функций.

Двумерные операторы $L_k(\mathscr{A}_k)$ с двоякопериодическими коэффициентами являются конечнозонными на любом уровне энергии E, т. е. блоховские вектор-функции (собственные одновременно для оператора $L_k(\lambda)$, $\lambda \in \mathscr{A}_k$, и для операторов сдвига на периоды) параметризуются римановой поверхностью конечного рода, заданной в спектральной поверхности уравнением $\lambda = E$.

Если размерность Y^k равна 2, то, используя формулу присоединения и теорему Лефшеца о вложении, можно показать, что размерность Кодаиры спектральной поверхности Y^k равна 2, т. е. эта поверхность является поверхностью общего типа.

Теорему 1 докажем, учитывая результаты Накаяшики [1] (см. также [2]), который построил вложение кольца мероморфных функций на X^g с полюсом на Y в кольцо g-мерных $N \times N$-матричных дифференциальных операторов. Двумерные 2×2-матричные такие операторы (операторы Накаяшики) изучались в работах автора [3, 4]. В частности, в [4] доказано, что не существует двумерных вещественных операторов Накаяшики, конечнозонных на любом уровне энергии, с гладкими двоякопериодическими коэффициентами, но существуют двумерные вещественные конечнозонные на любом уровне энергии операторы Накаяшики с сингулярными двоякопериодическими коэффициентами. В [4] также указаны гладкие вещественные операторы Накаяшики, среди которых имеется оператор второго порядка H, по диагонали которого стоят операторы Шредингера в двоякопериодических магнитных полях и с двоякопериодическими потенциалами вида

$$(\partial_{y_1} - A_1)^2 + (\partial_{y_2} - A_2)^2 + u(y), \quad y = (y_1, y_2).$$

Магнитно-блоховские вектор-функции оператора H (собственные одновременно для H и для операторов магнитных трансляций T_j^*, $T_j^*\varphi(y) = \varphi(y+e_j)\exp(2\pi y_j)$, $j = 1, 2$, e_j — периоды) на каждом уровне энергии параметризуются римановой поверхностью конечного рода. Это свойство является аналогом конечнозонности на любом уровне энергии для операторов с двоякопериодическими коэффициентами.

В частном случае, когда $g = 3$, $r = 1$, а в качестве спектральной поверхности служит тэта-дивизор, теорема 1 была доказана А. Накаяшики [1].

М. Ротштейн в [5] построил другой пример коммутирующих матричных дифференциальных операторов. В этом примере $g = 5$, $r = 1$, размерность матриц N равна 5, а в качестве спектральной поверхности служит поверхность Фано.

Напомним конструкцию И. М. Кричевера [6] построения коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов ранга 1. Пусть Γ — риманова поверхность рода g, $P = p_1 + \dots + p_g$ — неспециальный положительный дивизор на Γ, ∞ — точка на Γ, отличная от точек дивизора P, k^{-1} — локальный параметр в ∞, $k^{-1}(\infty) = 0$. Существует функция Бейкера — Ахиезера $\psi(p, x)$, $p \in \Gamma$, которая мероморфна на $\Gamma \backslash \infty$, множество ее полюсов совпадает с P и не зависит от x, в окрестности ∞ функция $\psi \exp(-kx)$ аналитична. Для любой мероморфной функции $f(p)$ на Γ с единственным полюсом в ∞ существует единственный дифференциальный оператор $L(f)$ такой, что

$$L(f)\psi = f\psi.$$

Для различных f операторы $L(f)$ попарно коммутируют. Отсюда вытекает сопоставление спектральных данных коммутирующих операторов Берчналла — Чаунди — Кричевера и спектральных данных операторов $L_k(\mathscr{A}_k)$:

$$\{\Gamma, \infty, P, f\} \longleftrightarrow \{Y^k, Q^k, Q_c^k, \lambda\},$$

где $Q_c^k = Y^k \cap Y_c$, $c \in X^g$, — некоторый ненулевой элемент.

Как и в одномерном случае, можно построить операторы L_α, коэффициенты которых зависят от времени и удовлетворяют эволюционным уравнениям. Справедлива

Теорема 2. *Существует многомерный аналог иерархии Кадомцева — Петвиашвили*

$$[\partial_{t_\alpha} - L_\alpha, \partial_{t_\beta} - L_\beta] = 0,$$

где L_α и L_β — $N\times N$-матричные дифференциальные операторы по $g-k$ переменным, коэффициенты которых зависят от t_α и t_β, α и β принадлежат счетному множеству индексов.

Как уже отмечалось в [4], коэффициенты операторов Накаяшики не могут удовлетворять эволюционным уравнениям типа иерархии Кадомцева — Петвиашвили.

В разд. 2 мы введем векторные тэта-функции, которые задают сечения голоморфных векторных расслоений ранга r над абелевым многообразием X^g. При $r = 1$ векторные тэта-функции совпадают с классическими тэта-функциями Римана. С помощью векторных тэта-функций можно выписывать в явном виде сечения голоморфных векторных расслоений над римановыми поверхностями. Если X^g является многообразием Якоби римановой поверхности $\Gamma \subset X^g$, то ограничение векторной тэта-функции на Γ будет сечением векторного расслоения над Γ ранга r степени rsg, где s — некоторое натуральное число, g — род Γ.

В разд. 3, используя преобразование Фурье — Мукаи [7], мы введем модуль Бейкера — Ахиезера над кольцом дифференциальных операторов, элементы которого выражаются через векторные тэта-функции. Теоремы 1 и 2 вытекают из теоремы 3 о свободности модуля Бейкера — Ахиезера.

Автор благодарит И. А. Тайманова за полезные обсуждения и замечания.

2. Векторные тэта-функции

В этом разделе мы укажем коэффициенты разложения в ряд Фурье векторных тэта-функций. В лемме 1 будет найдена размерность пространства векторных тэта-функций.

Обозначим через $X^g = \mathbb{C}^g/\{\mathbb{Z}^g + \Omega\mathbb{Z}^g\}$ главно поляризованное комплексное абелево многообразие, где Ω — симметричная $g \times g$-матрица с $\operatorname{Im}\Omega > 0$. Для невырожденных попарно коммутирующих матриц A_j, $j = 1, \dots, g$, размера $r \times r$ введем множество матричных функций (мультипликаторов) на $\mathbb{C}^g$:

$$e_{n+\Omega m}(z) = \exp(-s\pi i\langle m, \Omega m\rangle - 2s\pi i\langle m, z\rangle)A_1^{m_1}\dots A_g^{m_g},$$

где $m, n \in \mathbb{Z}^g$, $\langle m, z\rangle = m_1 z_1 + \dots + m_g z_g$, s — некоторое натуральное число. Нетрудно убедиться, что эти функции удовлетворяют равенствам

$$e_\lambda(z + \lambda')e_{\lambda'}(z) = e_{\lambda'}(z + \lambda)e_\lambda(z) = e_{\lambda+\lambda'}(z), \quad \lambda, \lambda' \in \mathbb{Z}^g + \Omega\mathbb{Z}^g.$$

Любой набор матричных функций, удовлетворяющий этим равенствам, задает векторное расслоение ранга r на X^g, которое получается факторизацией $\mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^r$ по действию решетки $\mathbb{Z}^g + \Omega\mathbb{Z}^g$:

$$(z, v) \sim (z + \lambda, e_\lambda(z)v), \quad v \in \mathbb{C}^r.$$

Глобальные сечения задаются вектор-функциями на $\mathbb{C}^g$ со свойствами периодичности

$$f(z + \lambda) = e_\lambda f(z).$$

Векторной тэта-функцией ранга r степени s назовем вектор-функцию

$$\theta^{r,s}(z) = \left(\theta_1^s(z), \dots, \theta_r^s(z)\right)^\top, \quad z \in \mathbb{C}^g,$$

с целыми компонентами, обладающую свойством

$$\theta^{r,s}(z + \Omega m + n) = \exp(-s\pi i\langle m, \Omega m\rangle - 2s\pi i\langle m, z\rangle)A_1^{m_1} \dots A_g^{m_g}\theta^{r,s}(z).$$

В силу периодичности $\theta^{r,s}$ разлагается в ряд

$$\theta^{r,s} = \sum_{l\in\mathbb{Z}^g} \exp(2\pi i\langle l, z\rangle)a_l, \quad a_l = \left(a_l^1, \dots, a_l^r\right)^\top \in \mathbb{C}^r.$$

Найдем рекуррентные соотношения на коэффициенты a_l:

$$\theta^{r,s}(z + \Omega e_j) = \sum_{l\in\mathbb{Z}^g} \exp(2\pi i\langle l, \Omega e_j\rangle)\exp(2\pi i\langle l, z\rangle)a_l$$
$$= \sum_{l\in\mathbb{Z}^g} \exp(-s\pi i\Omega_{jj})\exp(2\pi i\langle l - se_j, z\rangle)A_j a_l,$$

следовательно,

$$a_{l+se_j} = \exp(s\pi i\Omega_{jj} + 2\pi i\langle l, \Omega e_j\rangle)A_j^{-1}a_l,$$

$e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)^\top$ (1 на j-м месте). Из последней формулы вытекает, что $\theta^{r,s}$ определяется заданием коэффициентов a_l, где компоненты l находятся в пределах $0 \le l_\alpha \le s-1$, стало быть, размерность пространства векторных тэта-функций не превышает rs^g. Покажем, что при любом выборе a_l, $0 \le l_\alpha \le s-1$, ряд для векторной тэта-функции $\theta^{r,s}$ сходится. Для этого перепишем его в следующем виде:

$$\theta^{r,s}(z) = \sum_{l_0}\sum_{l\in\mathbb{Z}^g} \exp(2\pi i\langle l_0 + sl, z\rangle)a_{l_0+sl},$$

где компоненты l_0 находятся в пределах от 0 до $s-1$. Полученные выше рекуррентные соотношения разрешимы в явном виде

$$a_{l_0+sl} = \exp(s\pi i\langle l, \Omega l\rangle + 2\pi i\langle l_0, \Omega l\rangle)A_1^{-l_1} \dots A_g^{-l_g}a_{l_0}.$$

Пусть

$$\theta_{a_{l_0}}^{r,s} = \sum_{l\in\mathbb{Z}^g} \exp(s\pi i\langle l, \Omega l\rangle + 2\pi i\langle l_0, \Omega l\rangle + 2\pi i\langle l_0 + sl, z\rangle)A_1^{-l_1} \dots A_g^{-l_g}a_{l_0},$$

тогда

$$\theta^{r,s} = \sum_{l_0} \theta_{a_{l_0}}^{r,s}.$$

Обозначим через C_j наибольшее из двух чисел $\left\|A_j^{-1}\right\|$ и $\|A_j\|$, тогда норма каждого слагаемого в ряде для $\theta_{a_{l_0}}^{r,s}$ не превосходит

$$|\exp(s\pi i\langle l, \Omega l\rangle + 2\pi i\langle l_0, \Omega l\rangle + 2\pi i\langle l_0 + sl, z\rangle)|C_1^{|l_1|} \dots C_g^{|l_g|}\|a_{l_0}\|,$$

следовательно, в силу положительной определенности $\mathrm{Im}\Omega$ этот ряд сходится абсолютно. Мы получили следующий результат.

Лемма 1. *Размерность пространства векторных тэта-функций степени s ранга r равна rs^g.*

Укажем пример матриц A_j. В качестве A_1 возьмем матрицу с недиагональной жордановой формой, в качестве остальных A_j можно взять многочлены от A_1. Если же жордановы формы матриц A_j диагональны, то расслоение, отвечающее набору A_j, является прямой суммой линейных расслоений.

3. Коммутирующие операторы

В этом разделе сформулируем теорему Накаяшики [1] в нужном для нас частном случае голоморфных векторных расслоений ранга $r \geq 1$, инвариантных относительно сдвигов на элементы X^g. Используя преобразование Фурье — Мукаи этих расслоений, введем модули Бейкера — Ахиезера M_c^j над кольцами дифференциальных операторов $\mathscr{D}_j$. В следствии 2 будет показано, что отображение ограничения функций из M_c^j на подмногообразие $Y^{j+1} \subset Y^j$ задает эпиморфизм $M_c^j \to M_c^{j+1}$. В теореме 3 будет доказана свободность $\mathscr{D}_j$-модуля M_c^j. В следствии 3 покажем, что коэффициенты операторов $L_k(\mathscr{A}_k)$ удовлетворяют эволюционным уравнениям.

Через $\mathrm{Pic}^0(X^g)$ обозначим многообразие Пикара X^g. В нашем случае X^g и $\mathrm{Pic}^0(X^g)$ изоморфны. Обозначим через $\mathscr{P}$ расслоение Пуанкаре над $X^g \times \mathrm{Pic}^0(X^g)$. Сечения $\mathscr{P}$ при подъеме на $\mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^g$ задаются функциями $f(z,x)$ такими, что

$$f(z + \Omega m_1 + n_1, x + \Omega m_2 + n_2) = \exp(-2\pi i(\langle m_1, x\rangle + \langle m_2, z\rangle))f(z,x),$$

где $m_j,\ n_j \in \mathbb{Z}^g$.

Пусть Y является нулями некоторой тэта-функции ϑ (ранга 1) степени s,

$$\vartheta(z + \Omega m + n) = \exp(-s\pi i\langle m, \Omega m\rangle - 2s\pi i\langle m, z\rangle)\vartheta(z).$$

Через $\mathscr{L}_c$ обозначим голоморфное векторное расслоение над X^g, сечения которого задаются вектор-функциями $f(z)$ ранга r на $\mathbb{C}^g$ со свойством

$$f(z + \Omega m + n) = \exp(-2\pi i\langle m, c\rangle)A_1^{m_1}\dots A_g^{m_g} f(z), \quad m, n \in \mathbb{Z}^g,\ c \in \mathbb{C}^g. \tag{1}$$

Отметим, что расслоение $\mathscr{L}_c$ инвариантно относительно сдвигов на элементы X^g. Пусть $\mathscr{L}$ — пространство глобальных сечений расслоения $\mathscr{L}_0$ с полюсом на Y, π — проекция $X^g \times \mathrm{Pic}^0(X^g) \to X^g$. Обозначим через $F(Y, \mathscr{L}_0)(U)$ пространство мероморфных сечений расслоения $\pi^*\mathscr{L}_0 \otimes \mathscr{P}$ над $X^g \times U$ с полюсом на $Y \times U$, где U — открытое подмножество в $\mathrm{Pic}^0(X^g)$. При фиксированном $x \in U$ пространство $F(Y, \mathscr{L}_0)(U)$ совпадает с пространством

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathrm{H}^0(X^g, \mathscr{L}_x(jY)).$$

Через $\mathscr{L}_x(jY)$ будем иногда обозначать расслоение $\mathscr{L}_x \otimes [jY]$, где $[jY]$ — линейное расслоение, ассоциированное с дивизором jY. Векторные расслоения и соответствующие им пучки аналитических сечений мы для простоты обозначаем одним и тем же символом. Пространство $\mathrm{H}^0(X^g, \mathscr{L}_x(jY))$ можно отождествить с пространством глобальных сечений расслоения $\mathscr{L}_x$ с полюсом на Y, причем порядок полюса не превышает j.

Пространство $F(Y, \mathscr{L}_0)(U)$ называется *преобразованием Фурье — Мукаи над* U пространства $\mathscr{L}$.

На $F(Y,\mathscr{L}_0)(U)$ действуют операторы ковариантного дифференцирования

$$\nabla_j = \partial_{x_j} - \frac{1}{s}\partial_{z_j}\log\vartheta(z) : F(Y,\mathscr{L}_0)(U) \to F(Y,\mathscr{L}_0)(U),$$
$$\nabla_k\nabla_j = \nabla_j\nabla_k, \quad k,j = 1,\dots,g,$$

которые снабжают $F(Y,\mathscr{L}_0)(U)$ структурой модуля над кольцом $\mathscr{O}_U[\nabla_1,\dots,\nabla_g]$, где $\mathscr{O}_U$ — кольцо аналитических функций на U. Из построения следует, что $F(Y,\mathscr{L}_0)(U)$ является также модулем над кольцом мероморфных функций $\mathscr{A}_0$ на X^g с полюсом на Y.

Обозначим через $\mathscr{D}_g$ кольцо дифференциальных операторов $\mathscr{O}_g[\partial_{x_1},\dots,\partial_{x_g}]$, где $\mathscr{O}_g$ — кольцо аналитических функций по переменным $x_1,\dots,x_g$, определенных в окрестности $0\in\mathbb{C}^g$. В [1] введен модуль Бейкера — Ахиезера

$$M_c = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_c(n)$$

над кольцом дифференциальных операторов $\mathscr{D}_g$, где

$$M_c(n) = \left\{ f(z,x)\exp\left(-\sum_{j=1}^{g}\frac{x_j}{s}\,\partial_{z_j}\log\vartheta(z)\right),\ f(z,x)\in \mathrm{H}^0(X,\mathscr{L}_{c+x}(nY)) \right\}.$$

Нам понадобится еще один $\mathscr{D}_g$-модуль

$$\mathscr{D}_g M_c(n) = \left\{ \sum d\varphi,\ d\in\mathscr{D}_g,\ \varphi\in M_c(n) \right\}.$$

Элементы M_c можно выразить через векторные тэта-функции. Любая вектор-функция из M_c представляется в виде суммы вектор-функций вида

$$g(x)\frac{\theta^{r,sn}(z+\frac{x+c}{sn})}{\vartheta^n(z)}\exp\left(-\sum_{j=1}^{g}\frac{x_j}{s}\,\partial_{z_j}\log\vartheta(z)\right),$$

где $g(x)\in\mathscr{O}_g$, $\theta^{r,sn}$ — некоторая векторная тэта-функция.

В [1] доказана

Теорема Накаяшики. *Для c общего положения M_c — свободный $\mathscr{D}_g$-модуль ранга N. Справедливо равенство $M_c = \mathscr{D}_g M_c(g)$.*

Равенство $M_c = \mathscr{D}_g M_c(g)$ означает, что $\mathscr{D}_g$-модуль M_c порождается элементами из $M_c(g)$.

Зафиксируем базис $\Phi_c = (\phi_{1,c}(z,x),\dots,\phi_{N,c}(z,x))^\top$ в $\mathscr{D}_g$-модуле M_c. Иногда, как и в следующем следствии, мы под Φ_c будем понимать матричную функцию, в которой N строк и r столбцов, поскольку каждая компонента $\phi_{j,c}(z,x)$ сама является вектор-функцией размера r.

Следствие 1 [1]. *Существует кольцевое вложение*

$$L_0 : \mathscr{A}_0 \to \mathrm{Mat}(N,g),$$

определенное равенством

$$L_0(\lambda)\Phi_c = \lambda\Phi_c, \quad \lambda\in\mathscr{A}_0.$$

Образом вложения является коммутативное кольцо g-мерных матричных дифференциальных операторов.

Перейдем к нашей конструкции. На самом деле мы докажем теорему 1 в более сильном варианте. Будем считать, что гиперповерхность Y_{a_j} может быть не только сдвигом Y, но и сдвигом некоторой гладкой гиперповерхности, линейно эквивалентной Y, т. е. Y_{a_j} является нулями некоторой тэта-функции степени s со сдвигом

$$Y_{a_j} = \{z \in X^g,\ \vartheta_j(z - a_j) = 0\}.$$

Через $\mathscr{L}_c^k$ обозначим линейное расслоение над Y^k, сечения которого задаются функциями $f(z)$ на $Y^k \subset \mathbb{C}^g$ со свойством (1).

Введем модуль Бейкера — Ахиезера

$$M_c^k = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_c^k(n)$$

над $\mathscr{D}_{g-k}$, где

$$M_c^k(n) = \left\{ f(z,x) \exp\left(-\sum_{j=1}^{g} \frac{x_j}{s}\, \partial_{z_j} \log \vartheta(z) \right),\ f(z,x) \in \mathrm{H}^0\big(Y^k, \mathscr{L}_{c+x}^k(nQ^k)\big) \right\}.$$

Справедлива

Теорема 3. *Для c общего положения M_c^k является свободным $\mathscr{D}_{g-k}$-модулем ранга N.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобится

Лемма 2. *Отображение ограничения*

$$\pi_j : \mathrm{H}^0\big(Y^j, \mathscr{L}_{c+x}^j(nQ^j)\big) \to \mathrm{H}^0\big(Y^{j+1}, \mathscr{L}_{c+x}^{j+1}(nQ^{j+1})\big),$$
$$\pi_j(\varphi) = \varphi|_{Y^{j+1}}, \quad n \geq 1,\ j \geq 0,$$

является эпиморфизмом для x в общем положении.

Через Y^0, $\mathscr{L}_c^0$ и Q^0 мы обозначаем соответственно X^g, $\mathscr{L}_c$ и Y.

Доказательство. Пусть F — расслоение ранга r над X^g, инвариантное относительно сдвигов. Через F_c обозначим расслоение $F \otimes \mathscr{P}_c$, где $\mathscr{P}_c$ — ограничение расслоения Пуанкаре на $X^g \times \{c\}$. В [1] (см. пример 5.8 и предложение 5.10) доказано, что

$$\mathrm{H}^i(X^g, F_c(nY)) = 0, \quad i \geq 1,\ n \geq 1, \tag{2}$$

$$\mathrm{H}^i(X^g, F_c(nY)) = 0, \quad i \neq g,\ n \leq -1, \tag{3}$$

и для точки c в общем положении при $i \geq 0$ выполнено равенство

$$\mathrm{H}^i(X^g, F_c) = 0. \tag{4}$$

Отметим, что расслоение

$$\mathscr{L}_c \otimes [sY] \otimes [-Y_{a_1}] \otimes \cdots \otimes [-Y_{a_s}]$$

инвариантно относительно сдвигов, где $1 \leq s \leq k$, поскольку таковыми являются $\mathscr{L}_c$ и $[Y] \otimes [-Y_{a_j}]$. Значит,

$$\mathrm{H}^i(X^g, \mathscr{L}_c \otimes [nY] \otimes [-Y_{a_1}] \otimes \cdots \otimes [-Y_{a_s}]) = 0, \tag{5}$$

где $1 \leq i < g$, $n \in \mathbb{Z}$. Имеется точная последовательность пучков

$$0 \to \mathscr{L}_c^j \otimes [nQ^j] \otimes [-Y^{j+1}] \to \mathscr{L}_c^j \otimes [nQ^j] \to \mathscr{L}_c^{j+1} \otimes [nQ^{j+1}] \to 0. \tag{6}$$

Из длинной точной когомологической последовательности, отвечающей этой последовательности пучков, следует, что для доказательства сюръективности π_j достаточно установить равенство

$$\mathrm{H}^i\big(Y^j, \mathscr{L}_c^j \otimes [nQ^j] \otimes [-Y^{j+1}]\big) = 0. \tag{7}$$

Из (5) немедленно вытекает сюръективность π_0. Для доказательства (7) рассмотрим следующую точную последовательность:

$$\begin{aligned}0 \to \mathscr{L}_c^j \otimes [nQ^j] \otimes [-(Y^j \cap Y_{a_{j+1}})] \otimes \dots \otimes [-(Y^j \cap Y_{a_{j+s}})]& \\ \to \mathscr{L}_c^j \otimes [nQ^j] \otimes [-(Y^j \cap Y_{a_{j+2}})] \otimes \dots \otimes [-(Y^j \cap Y_{a_{j+s}})]& \\ \to \mathscr{L}_c^{j+1} \otimes [nQ^{j+1}] \otimes [-(Y^{j+1} \cap Y_{a_{j+2}})] \otimes \dots \otimes [-(Y^{j+1} \cap Y_{a_{j+s}})] \to 0,&\end{aligned} \tag{8}$$

где $j + s \le k$. Из длинных точных когомологических последовательностей, отвечающих (6) и (8), используя (2)–(4), индукцией по j получаем

$$\mathrm{H}^i\big(Y^j, \mathscr{L}_c^j \otimes [nQ^j] \otimes [-(Y^j \cap Y_{a_{j+1}})] \otimes \dots \otimes [-(Y^j \cap Y_{a_{j+s}})]\big) = 0, \tag{9}$$

где $1 \le i < g - j$, $j + s \le k$. Следовательно, отображение π_j сюръективно. Лемма доказана.

Отметим также, что, если $n > g$, то равенство (9) выполнено при $i \ge 1$.

Из леммы 2 выводим

Следствие 2. *Отображение ограничения*

$$\pi_j : M_c^j \to M_c^{j+1}, \quad \pi_j(\varphi) = \varphi|_{Y^{j+1}},$$

является эпиморфизмом для c в общем положении.

Нам также понадобится

Лемма 3. *Линейная оболочка множества*

$$\left\{\bigcup_{b,\varphi} \frac{\vartheta_{j+1}(z-b)}{\vartheta(z)}\,\varphi,\ \varphi \in \mathrm{H}^0(X^g, \mathscr{L}_{c+sb}((n-1)Y),\ b \in \mathbb{C}^g\right\},$$

где $n > g$ и объединение берется по всем b и φ, совпадает с $\mathrm{H}^0(X^g, \mathscr{L}_c(nY))$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность отображений

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(X^g, \mathscr{L}_c(nY)) \xrightarrow{\pi_0} \mathrm{H}^0\big(Y^1, \mathscr{L}_c^1(nQ^1)\big) \xrightarrow{\pi_1} \dots& \\ \dots \xrightarrow{\pi_{g-2}} \mathrm{H}^0\big(Y^{g-1}, \mathscr{L}_c^{g-1}(nQ^{g-1})\big) \longrightarrow 0.&\end{aligned}$$

Через Y^{g-1} мы обозначили риманову поверхность $Y^{g-2} \cap Y_{a_{g-1}}$, где a_{g-1} — некоторый элемент X^g. Отображения $\pi_0, \dots, \pi_{g-3}$ являются сюръективными по лемме 2. Так как (9) выполнено при $n > g$, то π_{g-2} является также сюръективным. Следовательно, для доказательства леммы достаточно показать, что линейная оболочка ограничения вектор-функций, указанных в лемме, на Y^{g-1} совпадает с $\mathrm{H}^0\big(Y^{g-1}, \mathscr{L}_c^{g-1}(nQ^{g-1})\big)$. Выберем b_1 и $b_2 \in \mathbb{C}^g$ так, чтобы дивизоры $B_1 = Y_{b_1} \cap Y^{g-1}$ и $B_1 = Y_{b_1} \cap Y^{g-1}$ не пересекались. Заметим, что из (6), (8) и (9) следуют равенства

$$\mathrm{H}^1\big(\mathscr{L}_c^{g-1} \otimes [nQ^{g-1}]\big) = 0,$$

$$\mathrm{H}^1\big(Y^{g-1}, \mathscr{L}_c^{g-1} \otimes [nQ^{g-1}] \otimes [-B_i]\big) = 0,$$

$$\mathrm{H}^1\big(Y^{g-1}, \mathscr{L}_c^{g-1} \otimes [nQ^{g-1}] \otimes [-B_1] \otimes [-B_2]\big) = 0.$$

Тогда по теореме Римана — Роха имеем

$$h^0\big(\mathscr{L}_c^{g-1} \otimes [nQ^{g-1}]\big) = \deg\big(\mathscr{L}_c^{g-1} \otimes [nQ^{g-1}]\big) - (g(Y^{g-1}) - 1)r,$$

$$h^0\big(\mathscr{L}_c^{g-1} \otimes [nQ^{g-1}] \otimes [-B_i]\big) = \deg\big(\mathscr{L}_c^{g-1} \otimes [nQ^{g-1}] \otimes [-B_i]\big) - (g(Y^{g-1}) - 1)r,$$

$$h^0\big(\mathscr{L}_c^{g-1} \otimes [nQ^{g-1}] \otimes [-B_1] \otimes [-B_2]\big) \\ = \deg\big(\mathscr{L}_c^{g-1} \otimes [nQ^{g-1}] \otimes [-B_1] \otimes [-B_2]\big) - (g(Y^{g-1}) - 1)r,$$

где h^0 — размерность H^0, $g(Y^{g-1})$ — род Y^{g-1}. Так как дивизоры B_1 и B_2 не пересекаются, то

$$\dim\big(\mathrm{H}^0(Y^{g-1}, \mathscr{L}_c^{g-1}(nQ^{g-1}) \otimes [-B_1]\big) \cap \mathrm{H}^0\big(Y^{g-1}, \mathscr{L}_c^{g-1}(nQ^{g-1}) \otimes [-B_2]\big)\big) \\ = h^0\big(\mathscr{L}_c^{g-1}(nQ^{g-1}) \otimes [-B_1] \otimes [-B_2]\big).$$

Напомним, что $\mathrm{H}^0\big(Y^{g-1}, \mathscr{L}_c^{g-1}(nQ^{g-1}) \otimes [-B_j]\big)$ мы отождествляем с пространством глобальных сечений $\mathscr{L}_c^{g-1}(nQ^{g-1})$, имеющих нули в точках дивизора B_j. Отсюда следует равенство

$$h^0\big(\mathscr{L}_c^{g-1} \otimes [nQ^{g-1}]\big) = h^0\big(\mathscr{L}_c^{g-1} \otimes [nQ^{g-1}] \otimes [-B_1]\big) \\ + h^0\big(\mathscr{L}_c^{g-1} \otimes [nQ^{g-1}] \otimes [-B_2]\big) - h^0\big(\mathscr{L}_c^{g-1} \otimes [nQ^{g-1}] \otimes [-B_1] \otimes [-B_2]\big),$$

которое означает, что линейная оболочка ограничения $W(b_1) \cup W(b_2)$ на Y^{g-1} совпадает с $\mathrm{H}^0\big(\mathscr{L}_c^{g-1} \otimes [nQ^{g-1}]\big)$, где

$$W(b) = \left\{ \frac{\vartheta_{j+1}(z-b)}{\vartheta(z)}\,\varphi,\ \varphi \in \mathrm{H}^0(X^g, \mathscr{L}_{c+sb}((n-1)Y) \right\}.$$

Это завершает доказательство леммы.

Заметим, что мы доказали даже большее. В условии леммы 3 можно брать объединение не по всем b, а достаточно взять множество

$$W(a_1) \cup \dots \cup W(a_{g-2}) \cup W(b_1) \cup W(b_2).$$

Обозначим через S_n^g размерность пространства дифференциальных операторов по g переменным с постоянными коэффициентами, степень которых не превышает $n-1$. Нетрудно проверить, что

$$S_n^g = C_{n+g-1}^{n-1} = \frac{n(n+1)\dots(n+g-1)}{g!}.$$

Введем еще одно обозначение

$$\mathscr{F}_j(n) = \dim \mathrm{H}^0\big(Y^j, \mathscr{L}_c^j(nQ^j)\big), \quad 0 \le j < g-1.$$

Доказательство теоремы 2. Выберем однородный базис Φ_c в $\mathscr{D}_g$-модуле M_c так, чтобы его ограничение на подмногообразие Y^j порождало $\mathscr{D}_j$-модуль M_c^j, т. е.

$$M_c^j = \{d_1\phi_{1,c}|_{Y^j} + \dots + d_N\phi_{N,c}|_{Y^j},\ d_i \in \mathscr{D}_g\}.$$

Это возможно сделать в силу следствия 2. Под однородностью базиса мы понимаем следующее. Во-первых, все элементы базиса Φ_c содержатся в $M_c(g)$ (это требование выполнимо по теореме Накаяшики). И, во-вторых, если $\phi_{1,c}, \dots, \phi_{1,K}$

— элементы базиса, которые принадлежат $M_c(n)$, $n \le g$, то они порождают $M_c(n)$. Иными словами,

$$\{d_1\phi_{1,c} + \dots + d_K\phi_{K,c},\ d_j \in \mathscr{D}_g\} \cap M_c(n) = M_c(n).$$

Обозначим через a_n^g число элементов базиса Φ_c, принадлежащих $M_c(n)$, но не принадлежащих $M_c(n-1)$. В силу однородности базиса и свободности $\mathscr{D}_g$-модуля M_c справедливо равенство

$$a_1^g S_n^g + \dots + a_g^g S_{n-g+1}^g = \mathscr{F}_0(n), \quad n > g.$$

Через $\mathscr{D}_{g-j}\Phi_c^j \subset M_c^j$ обозначим $\mathscr{D}_{g-j}$-модуль

$$\{\varphi|_{Y^j},\ \varphi = d_1\phi_{1,c} + \dots + d_N\phi_{N,c},\ d_s \in \mathscr{D}_{g-j}\}.$$

Докажем индукцией по k, что $\mathscr{D}_{g-k}\Phi_c^k$ является свободным $\mathscr{D}_{g-k}$-модулем ранга N. Затем, вычислив размерности пространств $M_c^j(n)$ и $\mathscr{D}_{g-j}\Phi_c^j \cap M_c^j(n)$ (при фиксированном x), мы установим, что эти $\mathscr{D}_{g-k}$-модули совпадают.

Начальный шаг индукции — это теорема Накаяшики. Пусть при $k = j$ утверждение доказано. Из свободности $\mathscr{D}_{g-j}$-модуля M_c^j вытекает равенство

$$a_1^g S_n^{g-j} + \dots + a_g^g S_{n-g+1}^{g-j} = \mathscr{F}_j(n), \quad n > g. \tag{10}$$

Предположим, что $\mathscr{D}_{g-j-1}$-модуль $\mathscr{D}_{g-j-1}\Phi_c^{j+1}$ не является свободным при $k = j+1 < g$. Тогда существуют операторы $\tilde{d}_i \in \mathscr{D}_{g-j-1}$ такие, что

$$\phi = \tilde{d}_1\phi_{1,c} + \dots + \tilde{d}_N\phi_{N,c}, \quad \phi|_{Y^{j+1}} = 0.$$

Это эквивалентно тому, что найдется элемент из $M_c^j(n)$ (можно считать, что $n > g$) вида

$$\frac{\vartheta_j(z - a_{j+1})}{\vartheta(z)}\varphi, \quad \varphi \in M_{c-a_{j+1}}^j(n-1),$$

для которого справедливо равенство

$$\tilde{d}_1\phi_{1,c} + \dots + \tilde{d}_N\phi_{N,c} = \frac{\vartheta_{j+1}(z - a_{j+1})}{\vartheta(z)}\varphi, \quad z \in Y^j. \tag{11}$$

Введем подпространство в $\mathrm{H}^0\big(Y^j, \mathscr{L}_{c+x}^j(nQ^j)\big)$:

$$V_{c+x}^j(n) = \left\{\frac{\psi}{e}\bigg|_{Y^j},\ \psi = d_1\phi_{1,c} + \dots + d_{N,c}\phi_N,\ d_i \in \mathscr{D}_{g-j-1}\right\} \cap \mathrm{H}^0\big(Y^j, \mathscr{L}_{c+x}^j(nQ^j)\big),$$

где

$$e = \exp\left(-\sum_{j=1}^{g} \frac{x_j}{s}\,\partial_{z_j}\log\vartheta(z)\right).$$

Найдем размерность пространства $V_{c+x}^j(n)$. Из (10) вытекают равенства

$$\begin{aligned} a_1^g\big(S_n^{g-j} - S_{n-1}^{g-j}\big) + \dots + a_g^g\big(S_{n-g+1}^{g-j} - S_{n-g}^{g-j}\big) &= a_1^g S_n^{g-j-1} + \dots + a_g^g S_{n-g+1}^{g-j-1} \\ &= \mathscr{F}_j(n) - \mathscr{F}_j(n-1) = \mathscr{F}_{j+1}(n), \end{aligned}$$

следовательно,

$$\dim V_{c+x}^j(n) = \mathscr{F}_j(n) - \mathscr{F}_j(n-1). \tag{12}$$

Введем еще одно подпространство в $\mathrm{H}^0\big(Y^j, \mathscr{L}^j_{c+x}(nQ^j)\big)$, зависящее от элемента a_{j+1}:

$$W^j_{c+x}(n) = \left\{ \frac{\vartheta_{j+1}(z-a_{j+1})}{\vartheta(z)}\,\varphi,\ \varphi \in \mathrm{H}^0\big(Y^j, \mathscr{L}^j_{c+x+sa_{j+1}}((n-1)Q^j\big),\ z\in Y^j \right\}.$$

Ясно, что

$$\dim W^j_{c+x}(n) = \mathscr{F}_j(n-1),$$

так как $\dim \mathrm{H}^0\big(Y^j, \mathscr{L}^j_{c+x+sa_{j+1}}((n-1)Q^j)\big) = \mathscr{F}_j(n-1)$.

Из лемм 2 и 3 вытекает, что существует элемент a_{j+1}, для которого равенство вида (11) невозможно. Поскольку

$$\dim V^j_{c+x}(n) + \dim W^j_{c+x}(n) = \dim \mathrm{H}^0\big(Y^j, \mathscr{L}^j_{c+x}(nQ^j)\big),$$

равенство вида (11) невозможно для элементов из некоторой малой окрестности a_{j+1}. В силу аналитической зависимости пространства $W^j_{c+x}(n)$ от a_{j+1} равенство вида (11) не выполняется для открытого всюду плотного множества таких a_{j+1}. Следовательно, так как по нашему предположению набор $a_1,\dots,a_k$ находится в общем положении, $\mathscr{D}_{g-j-1}$-модуль $\mathscr{D}_{g-j-1}\Phi^{j+1}_c$ является свободным ранга N.

Докажем, что $\mathscr{D}_{g-j-1}$-модули $\mathscr{D}_{g-j-1}\Phi^{j+1}_c$ и M^{j+1}_c совпадают.

Из того, что $\frac{\vartheta_j(z)}{\vartheta(z)}$ является мероморфной функцией, и из точности последовательности (6) вытекают равенства

$$\begin{aligned}
&\dim \mathrm{H}^0\big(Y^{j+1}, \mathscr{L}^{j+1}_{c+x}(nQ^{j+1})\big)\\
&\qquad= \dim \mathrm{H}^0\big(Y^j, \mathscr{L}^j_{c+x}(nQ^j)\big) - \dim \mathrm{H}^0\big(Y^j, \mathscr{L}^j_{c+x}((n)Q^j)\otimes[-Y^{j+1}]\big)\\
&= \dim \mathrm{H}^0\big(Y^j, \mathscr{L}^j_{c+x}(nQ^j)\big) - \dim \mathrm{H}^0\big(Y^j, \mathscr{L}^j_{c+x}((n-1)Q^j)\big) = \mathscr{F}_j(n) - \mathscr{F}_j(n-1).
\end{aligned}$$

Так как справедливо включение $\mathscr{D}_{g-j-1}\Phi^{j+1}_c \subset M^{j+1}_c$ и из (12) следует, что

$$\dim \mathrm{H}^0\big(Y^{j+1}, \mathscr{L}^{j+1}_{c+x}(nQ^{j+1})\big) = \dim V^j_{c+x}(n) = \mathscr{F}_{j+1}(n),$$

то $\mathscr{D}_{g-j-1}$-модули $\mathscr{D}_{g-j-1}\Phi^{j+1}_c$ и M^{j+1}_c совпадают. Теорема 3 доказана.

Покажем, как из теоремы 3 вывести теоремы 1 и 2. Обозначим через

$$\Phi_c = (\phi_{1,c}(z,x),\dots,\phi_{N,c}(z,x))^\top$$

базис в $\mathscr{D}_{g-k}$-модуле M^k_c. Тогда по теореме 3 для $\lambda \in \mathscr{A}_k$ существует единственный оператор $L_k(\lambda) \in \mathrm{Mat}(N, g-k)$ такой, что

$$L_k(\lambda)\Phi_c = \lambda\Phi_c.$$

Для различных λ операторы $L_k(\lambda)$ попарно коммутируют. Теорема 1 доказана.

Обозначим через $T_j \in \mathrm{Mat}(N, g-k)$ оператор порядка g, определенный равенством

$$T_j\Phi_c = \partial_{t_j}\Phi_c,$$

время t_j, $1 \le j \le k$, мы отождествляем с переменной x_{g-k}. Справедливы равенства

$$[L_k(\lambda), T_j - \partial_{t_j}]\Phi = 0, \quad [T_m - \partial_{t_m}, T_n - \partial_{t_n}]\Phi = 0.$$

Тогда из теоремы 3 вытекает

Следствие 3. *Справедливы эволюционные уравнения*

$$\frac{\partial L_k(\lambda)}{\partial t_j} = [L_k(\lambda), T_j], \quad \lambda \in \mathscr{A}_k,$$

$$\frac{\partial T_m}{\partial t_n} - \frac{\partial T_n}{\partial t_m} = [T_n, T_m].$$

Перейдем к доказательству теоремы 2. Разделим каждую вектор-функцию $\phi_{j,c}(z,x)$ на

$$\exp\left(-\sum_{j=g-k+1}^{g} \frac{x_j}{s}\,\partial_{z_j}\log\vartheta(z)\right),$$

затем заменим $x = (x_1, \dots, x_g)$ на

$$(x,t) = \left(x_1, \dots, x_{g-k}, \sum_m t_{1,m}, \dots, \sum_m t_{k,m}\right),$$

где $m = (m_1, \dots, m_g) \in \mathbb{Z}^g$, $m_1 + \dots + m_g \geq 2$, $m_i \geq 0$, и, наконец, умножим на

$$\exp\left(-\sum_{j=1}^{k}\sum_m \frac{t_{j,m}}{s}\bigl(\partial_{z_{g-k+j}}\log\vartheta(z) + \partial_z^m \log\vartheta(z)\bigr)\right),$$

где

$$\partial_z^m \log\vartheta(z) = \partial_{z_1}^{m_1}\dots\partial_{z_g}^{m_g}\log\vartheta(z).$$

Получим вектор-функцию $\psi_{j,c}(z,x,t)$, которая представляется в виде суммы вектор-функций:

$$g(x,t)\frac{\theta^{r,sn}\bigl(z + \frac{(x,t)+c}{sn}\bigr)}{\vartheta^n(z)}\exp\Biggl(-\sum_{j=1}^{g-k}\frac{x_j}{s}\partial_{z_j}\log\vartheta(z) - \sum_{j=1}^{k}\sum_m \frac{t_{j,m}}{s}\bigl(\partial_{z_{g-k+j}}\log\vartheta(z) + \partial_z^m\log\vartheta(z)\bigr)\Biggr).$$

Тогда для

$$\Psi = (\psi_{1,c}(z,x,t), \dots, \psi_{N,c}(z,x,t))^\top$$

справедливо равенство

$$L_{j,m}\Psi = \partial_{t_{j,m}}\Psi.$$

По теореме 3 имеет место равенство

$$[\partial_{t_{j,m}} - L_{j,m}, \partial_{t_{i,n}} - L_{i,n}] = 0.$$

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nakayashiki A.* Commuting partial differential operators and vector bundles over Abelian varieties // Amer. J. Math. 1994. V. 116. P. 65–100.
2. *Nakayashiki A.* Structure of Baker — Akhiezer modules of principally polarized Abelian varieties, commuting partial differential operators and associated integrable systems // Duke Math. J. 1991. V. 42, N 2. P. 315–358.
3. *Миронов А. Е.* Коммутативные кольца дифференциальных операторов, связанные с двумерными абелевыми многообразиями // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 6. С. 1389–1403.

4. *Миронов А. Е.* Вещественные коммутирующие дифференциальные операторы, связанные с двумерными абелевыми многообразиями // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 1. С. 126–143.
5. *Rothstein M.* Sheaves with connection on abelian varieties // Duke Math. J. 1996. V. 84, N 3. P. 565–598.
6. *Кричевер И. М.* Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений // Успехи мат. наук. 1977. Т. 32, № 6. С. 183–208.
7. *Mukai S.* Duality between $D(X)$ and $D(\widehat{X})$ with its application to Picard sheaves // Nagoya Math. J. 1981. V. 81. P. 153–175.

Статья поступила 6 декабря 2001 г.

Миронов Андрей Евгеньевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
mironov@math.nsc.ru