Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2002. Том 43, № 5

УДК 510.67

ОДНОРОДНЫЕ МОДЕЛИ И СТАБИЛЬНЫЕ ДИАГРАММЫ

К. Ж. Кудайбергенов

Аннотация: Изучен некоторый фрагмент теории стабильности в категории D-множеств. Приведены условия существования D-однородных моделей сколь угодно больших мощностей. Доказана теорема категоричности для класса (D, λ)-однородных моделей.

Ключевые слова: теория стабильности, теорема категоричности

Введение

В работе изучается некоторый фрагмент теории стабильности в категории D-множеств, т. е. подмножеств моделей некоторой фиксированной теории T, в которых реализуются только типы из данного семейства D. Такого рода деятельность начата и глубоко развита в работах С. Шелаха [1, 2]. В работах [3–7] автор изучал (D, λ)-однородные модели стабильных теорий, используя методы и результаты из [1, 2]. Стабильность теории нужна была, чтобы можно было использовать средства теории стабильности типа рангов и форкинга. Но уже после работы [1] стало ясно, что если подобные средства имеются внутри категории D-множеств, то стабильность теории не нужна. В 1994 г. автор попробовал переизложить (или, точнее, распространить на новую ситуацию) с помощью одного из вариантов ранга Морли часть работы [3], не выходя за пределы категории D-множеств. Полученная теория почти дословно повторяла (для более общего случая) классическую теорию тотальной трансцендентности (см. [8]) и изложение в [3], так что автор отложил свои наброски на неопределенное время. Но недавно Б. И. Зильбер, которому автор искренне благодарен, сообщил о возросшем интересе к однородным моделям и о большом числе новых работ по теории стабильности для классов подмоделей достаточно большой однородной модели. Осознав опасность, что его результаты могут быть перекрыты, автор решил опубликовать полученные к этому времени результаты.

В § 1 содержатся предварительные сведения о категории, в которой мы работаем: определения D-множества, D-модели, D-типа и т. п. В § 2 дается определение ранга D-типа и перечисляются некоторые его простейшие свойства. В следующих параграфах предполагается, что ранг любого D-типа меньше ∞. В § 5, 6 некоторые результаты работы [3] распространяются на новую ситуацию: приводятся условия существования D-однородных моделей сколь угодно больших мощностей и доказывается теорема категоричности для класса (D, λ)-однородных моделей. В § 3, 4 доказываются необходимые для этого технические утверждения о существовании и свойствах неразличимых множеств в D-моделях и утверждения о существовании (D, λ)-простых моделей.

Заметим, что мы не предполагаем заранее существования большой D-однородной модели.

Изложение вполне замкнуто, все утверждения приводятся с полными доказательствами.

§ 1. Предварительные сведения

Пусть T — полная теория языка L, имеющая бесконечные модели. Мы будем работать в некоторой достаточно насыщенной модели теории T. Все элементы (множества) будут элементами (подмножествами) этой модели. Модели обозначаем через M, N. Мы не делаем различий в обозначениях между моделью и ее универсумом. Через $L(A)$ обозначим обогащение языка L именами элементов множества A.

Мы используем обозначения из [1]. Пусть $D(A)$ — множество всех типов над $\varnothing$, реализуемых конечными последовательностями элементов множества A, и пусть D — множество вида $D(M)$, где M — модель. Множество A называется *D-множеством*, если $D(A) \subseteq D$, модель N — *D-моделью*, если $D(N) = D$. Множество D называется *конечной диаграммой*; для краткости будем называть его *диаграммой*. Через $D(T)$ обозначается диаграмма ω-насыщенной модели теории T.

Мы будем рассматривать только полные типы. Будем говорить, что p — *тип над* A, и писать $\mathrm{dom}(p) = A$, если p — максимальное совместное множество формул с параметрами из A. Через $p|B$ будем обозначать ограничение p на B, т. е. тип над B, содержащийся в p.

Тип p над A называется *D-типом над A*, если для некоторого (эквивалентно, любого) элемента a, реализующего p, множество $A \cup \{a\}$ является D-множеством.

Элементарные отображения называем *морфизмами* (это действительно морфизмы в категории D-множеств). Морфизмы естественным образом действуют на множестве D-типов.

Следующий очевидный факт очень важен.

Лемма 1.0. (1) *Семейство всех D-типов замкнуто относительно подтипов и объединений цепей.*

(2) *Тип p является D-типом тогда и только тогда, когда для любого конечного $B \subseteq \mathrm{dom}(p)$ тип $p|B$ будет D-типом.*

Множество всех D-типов над A обозначим через $S_D(A)$, мощность множества A — через $|A|$.

Определение. (i) Диаграмма D называется *λ-стабильной*, если $|S_D(A)| \leq \lambda$ для любого A мощности $|A| \leq \lambda$.

(ii) Диаграмма D называется *стабильной*, если она λ-стабильна для некоторого λ.

Напомним определение однородной модели.

Определение. (1) Модель M называется *λ-однородной*, если для любого $A \subseteq M$ мощности $|A| < \lambda$ и любого $a \in M$ каждый морфизм из A в M продолжается до морфизма из $A \cup \{a\}$ в M.

(2) Модель M называется *однородной*, если она $|M|$-однородна.

(3) Модель M называется *(D, λ)-однородной*, если $D(M) = D$ и M λ-однородна.

(4) Модель M называется *D-однородной*, если $D(M) = D$ и M однородна.

Следующий результат Кейслера и Морли [9] играет фундаментальную роль при изучении однородных моделей.

Лемма 1.1. *Если модель M (D, λ)-однородна и D-множества $A \subseteq B$ таковы, что $|A| < \lambda$ и $|B| \leq \lambda$, то любой морфизм из A в M продолжается до морфизма из B в M.*

Отсюда вытекает следующая

Лемма 1.2. *Модель M (D, λ)-однородна тогда и только тогда, когда $D(M) \subseteq D$ и для любого $A \subseteq M$ мощности $|A| < \lambda$ каждый D-тип над A реализуется в M.*

§ 2. Ранг

Определение. *Ранг D-типа p над конечным множеством* определим следующим образом.

(1) $R_D(p) \geq 0$ для любого такого p;

(2) $R_D(p) \geq \delta$, где δ — предельный ординал, если $R_D(p) \geq \alpha$ для всех $\alpha < \delta$;

(3) $R_D(p) \geq \alpha + 1$, если существуют несовместимые D-типы p_0, p_1 над конечными множествами такие, что $R_D(p_i) \geq \alpha$ и $p \subseteq p_i$, $i < 2$.

Если $R_D(p) \geq \alpha$ и неверно, что $R_D(p) \geq \alpha + 1$, то пишем $R_D(p) = \alpha$. Если $R_D(p) \geq \alpha$ для всех α, то пишем $R_D(p) = \infty$.

В общем случае полагаем

$$R_D(p) = \min\{R_D(p|B) : B \subseteq \mathrm{dom}(p),\ |B| < \omega\}.$$

Лемма 2.1. (i) *$R_D(p) = 0 \iff$ в любой D-модели тип p реализуется единственным элементом.*

(ii) *Если $p \subseteq q$, то $R_D(q) \leq R_D(p)$.*

(iii) *Если существует тип ранга α и $\beta < \alpha$, то существует тип ранга β.*

(iv) *Если $p \in S_D(A)$ и f — морфизм с $\mathrm{dom}(f) = A$, то $R_D(p) = R_D(f(p))$.*

(v) *Если $p \subseteq q \subseteq p'$ и $R_D(p) = R_D(p')$, то $R_D(p) = R_D(q)$.*

(vi) *Существует ординал α такой, что $R_D(p) \geq \alpha$ влечет $R_D(p) = \infty$ для любого D-типа p. (Наименьший такой ординал α обозначим через α_D.)*

Доказательство легко следует из определений.

Определение. Тип $p \in S_D(A)$, где $|A| < \omega$, назовем (D, λ)-*стабильным*, если для любого $B \supseteq \mathrm{dom}(p)$ мощности $|B| \leq \lambda$ имеет место соотношение $|\{q \in S_D(B) : p \subseteq q\}| \leq \lambda$.

Ясно, что диаграмма D λ-стабильна тогда и только тогда, когда каждый D-тип над конечным множеством (D, λ)-стабилен.

Предложение 2.2. *Пусть $p \in S_D(A)$, $|A| < \omega$.*

(1) *Пусть тип p (D, μ)-стабилен, $\mu < 2^\omega$, и предположим, что выполняется любое из следующих условий:*

(a) *если $A \subseteq B \subseteq C$, $D(C) \subseteq D$, $|C| \leq \omega$ и $p \subseteq q \in S_D(B)$, то q содержится в D-типе над C;*

(b) *если $A \subseteq B \subseteq C$, $D(C) \subseteq D$, $|C| < \omega$, $p \subseteq q \in S_D(B)$ и $R_D(q) = \infty$, то q содержится в D-типе над C ранга ∞.*

Тогда $R_D(p) < \infty$.

(2) *Если* $R_D(p) < \infty$, *то тип* p (D, μ)-*стабилен для любого* $\mu \geq |D|$.

Доказательство. (1) Допустим противное. Построим D-типы p_s, $s \in {}^{\omega>}2$, над конечными множествами такие, что

(i) если $s \subseteq t$, то $p_s \subseteq p_t$;

(ii) p_{s0} и p_{s1} несовместимы;

(iii) $R_D(p_s) = \infty$.

Полагаем $p_\varnothing = p$. Пусть тип p_s определен и $R_D(p) \geq \alpha_D + 1$. Тогда по определению существуют несовместимые типы p_{s0} и p_{s1} такие, что $p_s \subseteq p_{si}$ и $R_D(p_{si}) \geq \alpha_D$, $i < 2$. (Если выполняется условие (b), то можно считать, что $\mathrm{dom}(p_{s0}) = \mathrm{dom}(p_{s1})$.)

Полагая $p_\eta = \bigcup\limits_{n<\omega} p_{\eta|n}$, $\eta \in {}^{\omega}2$ (и расширяя p_η, если выполняется (a)), получим 2^ω D-типов над счетным множеством $\cup\{\mathrm{dom}(p_s) : s \in {}^{\omega>}2\}$, расширяющих p, что противоречит μ-стабильности.

(2) Для каждого $q \in S_D(B)$ ранга $< \infty$ выберем конечное $B_q \subseteq B$ такое, что $R_D(q) = R_D(q|B_q)$. По лемме 2.3 отображение $q \mapsto q|B_q$ инъективно, поэтому

$$|\{q \in S_D(B) : p \subseteq q\}| \leq |\cup\{S_D(B_q) : R_D(q) < \infty\}| \leq |D| \cdot |B|,$$

откуда вытекает требуемое утверждение.

Предложение 2.2 доказано.

Лемма 2.3. *Пусть q — D-тип ранга α. Если $p_0, p_1 \in S_D(A)$ — расширения q того же ранга, то $p_0 = p_1$. В частности, если $q \subseteq p_i \in S_D(A_i)$ и $R_D(q) = R_D(p_i)$, $i < 2$, а $f : A_0 \to A_1$ — биективный морфизм, тождественный на* $\mathrm{dom}(q)$, *то* $f(p_0) = p_1$.

Доказательство. Допустим противное. Можно считать, что множество $\mathrm{dom}(q)$ конечно. Тогда оно содержится в конечном $B \subseteq A$ таком, что $p_0|B \neq p_1|B$. Так как $q \subseteq p_i|B \subseteq p_i$, то по лемме 2.1(v) $R_D(q) = R_D(p_i|B) = \alpha$, откуда по определению $R_D(q) \geq \alpha + 1$; противоречие.

Лемма 2.3 доказана.

Определение. Назовем диаграмму D *почти тотально трансцендентной*, если $R_D(p) < \infty$ для любого D-типа p. Если $D = D(T)$, то теорию T тоже можно назвать *почти тотально транцендентной.*

Заметим, что если T — теория счетного числа независимых унарных предикатов, то T почти тотально трансцендентна, но не тотально трансцендентна. Легко построить пример нестабильной теории T такой, что некоторая диаграмма $D \subseteq D(T)$ почти тотально трансцендентна.

Следствие 2.4. (1) *Если диаграмма D μ-стабильна, $\mu < 2^\omega$ и для любого D-типа p над конечным множеством выполняется любое из условий* (a) *или* (b) *предложения* 2.2, *то D почти тотально трансцендентна.*

(2) *Если диаграмма D почти тотально трансцендентна, то D μ-стабильна для любого $\mu \geq |D|$.*

Соглашение. В дальнейшем D — почти тотально трансцендентная диаграмма.

§ 3. Неразличимые множества

Лемма 3.1. *Если I — бесконечная неразличимая D-последовательность над A, то I — неразличимое множество над A.*

Доказательство. Допустим противное. С помощью теоремы компактности Мальцева найдем плотно упорядоченную неразличимую D-последовательность большой мощности, имеющую еще большее число сечений, которые можно расширить до попарно различных D-типов. Это противоречит стабильности диаграммы D.

Лемма 3.1 доказана.

Определение. Пусть $p \in S_D(A)$. Последовательность $I = \{a_i : i < \alpha\}$ называется *последовательностью Морли типа* p над A, если для любого $i < \alpha$ тип $p_i = \mathrm{tp}(a_i/A \cup \{a_j : j < i\})$ является расширением типа p того же ранга.

Предложение 3.2. *Если $I = \{a_i : i < \alpha\}$ — бесконечная последовательность Морли над A, то I — неразличимое множество над A.*

Доказательство. В силу леммы 3.1 достаточно доказать, что $(a_{i_k} : k \leq n)$ и $(a_{j_k} : k \leq n)$ реализуют один и тот же тип над A для любых $i_0 < \dots < i_n < \alpha$ и $j_0 < \dots < j_n < \alpha$. Это делается индукцией по n. При $n = 0$ утверждение очевидно. По индуктивному предположению существует морфизм $f : A \cup \{a_{i_k} : k < n\} \to A \cup \{a_{j_k} : k < n\}$, тождественный на A и переводящий a_{i_k} в a_{j_k}. Пусть $q_{s_n} = \mathrm{tp}(a_{s_n}/A \cup \{a_{s_k} : k < n\})$, $s \in \{i, j\}$. Достаточно показать, что $f(q_{i_n}) = q_{j_n}$.

Так как $p_0 \subseteq q_{s_n} \subseteq p_{s_n}$ и I — последовательность Морли, то по лемме 2.1(v) $R_D(q_{s_n}) = R_D(p_0)$, $s \in \{i, j\}$. Тогда по лемме 2.3 $f(q_{i_n}) = q_{j_n}$.

Предложение 3.2 доказано.

Предложение 3.3. *Пусть I — неразличимое множество над A, $\bar{b}$ — конечный набор элементов такой, что $\mathrm{tp}(\bar{b}/A \cup I)$ — D-тип. Тогда существует конечное $J \subseteq I$ такое, что $I - J$ неразличимо над $A \cup \bar{b} \cup J$.*

Доказательство. Выберем конечное $J \subseteq I$ такое, что ранг типа $p_J = \mathrm{tp}(\bar{b}/A \cup J)$ равен рангу типа $p_I = \mathrm{tp}(\bar{b}/A \cup I)$. Пусть I_0, I_1 — конечные подмножества одинаковой мощности в $I - J$. Так как I неразличимо над A, то существует морфизм $f : A \cup J \cup I_0 \to A \cup J \cup I_1$, тождественный на $A \cup J$. Пусть $p_i = \mathrm{tp}(\bar{b}/A \cup J \cup I_i)$, $i < 2$. Достаточно доказать, что $f(p_0) = p_1$.

Поскольку $p_J \subseteq p_i \subseteq p_I$, в силу выбора J и по лемме 2.1(v) $R_D(p_i) = R_D(p_J)$. Тогда по лемме 2.3 $f(p_0) = p_1$.

Предложение 3.3 доказано.

Определение. Если I — бесконечное неразличимое множество, то пусть

$$Av(I/A) = \{\varphi(x, \bar{a}) \in L(A) : |\neg\varphi(I, \bar{a})| < \omega\}.$$

Следствие 3.4. *$Av(I/A) \in S_D(A)$ для любого бесконечного неразличимого множества I и любого A такого, что $I \cup A$ — D-множество.*

Доказательство. По предложению 3.3 для любого конечного $B \subseteq A$ почти все элементы из I реализуют $Av(I/B)$ и, следовательно, $Av(I/B) \in S_D(B)$.

Следствие 3.4 доказано.

Предложение 3.5. *Пусть M — (D,ω)-однородная модель, $p \in S_D(M)$. Тогда для любого D-множества $B \supseteq M$ тип p имеет расширение в $S_D(B)$ того же ранга.*

Доказательство. Выберем конечное $A \subseteq M$ такое, что $R_D(p|A) = R_D(p)$. Пусть $\bar{b} \in B$. По лемме 1.1 существует морфизм $f : A \cup \bar{b} \to M$, тождественный на A. Положим $p_{\bar{b}} = f^{-1}(p|A \cup f(\bar{b}))$. По лемме 2.1(v),(iv) $R_D(p_{\bar{b}}) = R_D(p)$. Если еще $\bar{c} \in B$, то $p_{\bar{b}}, p_{\bar{c}} \subseteq p_{\bar{b}\bar{c}}$, поскольку $p_{\bar{b}}$ и $p_{\bar{b}\bar{c}}|A \cup \bar{b}$ совпадают как расширения $p|A$ того же ранга (лемма 2.3). Следовательно, $\cup\{p_{\bar{b}} : \bar{b} \in B\}$ — искомое расширение p того же ранга.

Предложение 3.5 доказано.

Предложение 3.6. *Пусть M — (D,ω)-однородная модель и тип $p \in S_D(M)$ не реализуется в M. Тогда $p = Av(I/M)$ для некоторого бесконечного неразличимого множества $I \subseteq M$.*

Доказательство. Выберем конечное $A \subseteq M$ такое, что $R_D(p) = R_D(p|A)$. Индукцией по $n < \omega$ найдем попарно различные элементы $a_n \in M$ такие, что a_n реализует $p|A \cup \{a_i : i < n\}$. Тогда $I = \{a_n : n < \omega\}$ — последовательность Морли над A. По предложению 3.2 I — неразличимое множество над A. Для завершения доказательства достаточно показать, что для любого конечного $B \subseteq M$ почти все элементы из I реализуют $p|B$.

Итак, пусть $B \subseteq M$ конечно. С помощью предложения 3.5 расширим I до последовательности Морли $I^* = \{a_n : n < \omega_1\}$ над A такой, что $I^* - I$ — последовательность Морли типа p. По предложению 3.2 I^* — неразличимое множество. По предложению 3.3 существует конечное $J \subseteq I^*$ такое, что $I^* - J$ неразличимо над B. Пусть $a \in I - J$ и $a^* \in (I^* - I) - J$. Тогда $\mathrm{tp}(a/B) = \mathrm{tp}(a^*/B) = p|B$.

Предложение 3.6 доказано.

Предложение 3.7. *Пусть A — D-множество регулярной мощности λ, $Z \subseteq A$, $|D| + |Z| < \lambda$. Тогда существует неразличимое над Z множество $I \subseteq A$ мощности λ.*

Доказательство. Пусть $Y \subseteq A$, $|Y| < \lambda$. Назовем тип $p \in S_D(Y)$ максимальным, если множество $p(A)$ элементов из A, реализующих p, имеет мощность λ. Такой тип существует, поскольку кардинал λ регулярен и в силу следствия 2.4 $|S_D(Y)| \le |Y| + |D| < \lambda$.

В множестве $\cup\{S_D(Y) : Z \subseteq Y, |Y| < \lambda\}$ выберем максимальный тип p^* наименьшего ранга. Пусть $p^* \in S_D(Y^*)$.

Если $Y^* \subseteq Y \subseteq A$ и $|Y| < \lambda$, то p^* имеет максимальное расширение $q \in S_D(Y)$, поскольку p^* максимален, λ регулярен и $|S_D(Y)| < \lambda$. Так как $p^* \subseteq q$, то $R_D(q) \le R_D(p^*)$, поэтому в силу выбора p^* имеем $R_D(p^*) = R_D(q)$. Отсюда и из леммы 2.3 следует, что p^* имеет единственное максимальное расширение в $S_D(Y)$.

Индукцией по $i < \lambda$ определим элементы $a_i \in A$ и типы $p_i \in S_D(Y_i)$, $Y_i = Y^* \cup \{a_j : j < i\}$ такие, что

(i) $p_0 = p^*$;

(ii) a_i реализует p_i;

(iii) p_i — максимальное расширение типа p_0;

(iv) $p_i \subseteq p_{i+1}$;

(v) $p_i = \bigcup\limits_{j<i} p_j$ для предельных i.

Проверим (iii) для предельного i. Пусть $b \in p_0(A) - p_i(A)$. Тогда $b \notin p_j(A)$ для некоторого $j < i$, поэтому тип $\mathrm{tp}(b/Y_j)$ не максимален вследствие того, что p_j — единственное максимальное расширение p_0 в $S_D(Y_j)$. Значит, тип $\mathrm{tp}(b/Y_i)$ не максимален. Так как $|S_D(Y_i)| < \lambda$ и λ регулярен, то $|p_0(A) - p_i(A)| < \lambda$. Поскольку $p_i(A) \subseteq p_0(A)$ и $|p_0(A)| = \lambda$, то $|p_i(A)| = \lambda$.

Таким образом, $I = \{a_i : i < \lambda\}$ — последовательность Морли. По предложению 3.2 I — неразличимое множество.

Предложение 3.7 доказано.

§ 4. (D, λ)-простые модели

Определение. (1) Модель M называется (D, λ)-*простой над множеством* $A \subseteq M$, если M (D, λ)-однородна и для любой (D, λ)-однородной модели N любой морфизм из A в N продолжается до морфизма из M в N.

(2) Тип $p \in S_D(A)$ называется (D, λ)-*изолированным*, если существует $B \subseteq A$ мощности $|B| < \lambda$ такое, что тип $p|B$ имеет единственное расширение в $S_D(A)$ (в этом случае говорим, что тип p D-*изолирован* над B).

(3) D-множество B назовем (D, λ)-*конструкцией* над A, если $B = A \cup \{a_i : i < \delta\}$, где для любого $i < \delta$ тип $\mathrm{tp}(a_i/A \cup \{a_j : j < i\})$ (D, λ)-изолирован.

(4) Модель M называется $(D, \lambda, 1)$-*простой над* A, если M (D, λ)-однородна и ее универсум является (D, λ)-конструкцией над A.

Лемма 4.1. *Если B — (D, λ)-конструкция над A, то для любой (D, λ)-однородной модели N любой морфизм из A в N продолжается до морфизма из B в N. В частности, если модель M $(D, \lambda, 1)$-проста над A, то M (D, λ)-проста над A.*

Доказательство очевидно.

Теорема 4.2. *Если существует (D, λ)-однородная модель, то для любого D-множества A существует $(D, \lambda, 1)$-простая модель над A. В частности, для любого D-множества A существует модель, (D, λ)-простая над A.*

Доказательство. Пусть N — (D, λ)-однородная модель. Пусть M — максимальная (D, λ)-конструкция над A. Достаточно показать, что M является (D, λ)-однородной моделью.

Пусть $B \subseteq M$, $|B| < \lambda$, $p \in S_D(B)$. Покажем, что p реализуется элементом из M. В силу лемм 1.1 и 4.1 можно считать, что $M \subseteq N$. По лемме 1.2 некоторый элемент $a \in N$ реализует тип p, поэтому p содержится в D-типе над M (например, в $\mathrm{tp}(a/M)$). Выберем такой D-тип q наименьшего ранга. Выберем конечное $C \subseteq M$ такое, что $R_D(q) = R_D(q|C)$. Если $q|C \cup B \subseteq q' \in S_D(M)$, то $R_D(q') \leq R_D(q|C \cup B) \leq R_D(q|C) = R_D(q)$, поэтому $R_D(q') = R_D(q)$ в силу выбора q, откуда по лемме 2.3 $q' = q$. Следовательно, тип q (D, λ)-изолирован. Отсюда ввиду максимальности M следует, что q (а потому и p) реализуется элементом из M.

Осталось показать, что M — модель. Пусть формула $\varphi(x, \bar{a})$ из $L(M)$ реализуется элементом $b \in N$. Тогда $\mathrm{tp}(b/\bar{a})$ является D-типом и согласно только что доказанному он, а вместе с ним и формула $\varphi(x, \bar{a})$ реализуется элементом из M. По тесту Тарского — Воота M является моделью.

Теорема 4.2 доказана.

Следствие 4.3. *Пусть $A \subseteq B$ — D-множества, $|A| < \lambda$, $p \in S_D(A)$. Допустим, что существует (D,λ)-однородная модель. Тогда p расширяется до D-типа над B.*

Доказательство. По теореме 4.2 существует (D,λ)-простая над B модель M. По лемме 1.2 некоторый элемент $a \in M$ реализует p. Тогда $\mathrm{tp}(a/B)$ — искомое расширение типа p.

Следствие 4.3 доказано.

Следствие 4.4. *Пусть $\lambda \geq |D| + |T|$. Допустим, что существуют D-множество A мощности λ и (D,ω)-однородная модель N. Тогда существует D-модель мощности λ, содержащая A. В частности, если N содержит бесконечное неразличимое множество, то существует D-модель мощности λ.*

Доказательство. Если есть бесконечное неразличимое D-множество, то по теореме компактности существует такое множество мощности λ. По теореме 4.2 существует (D,λ)-простая над A модель M. Остается взять элементарную подмодель в M мощности λ, содержащую A.

Следствие 4.4 доказано.

§ 5. Однородные модели

Предложение 5.1. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) *модель M (D,λ)-однородна;*

(2) *модель M (D,ω)-однородна, и $I \geq \lambda$ для любого максимального бесконечного неразличимого множества $I \subseteq M$.*

Доказательство. (1)$\Rightarrow$(2). Допустим противное. Пусть I — контрпример, $a \in I$, $f : I - \{a\} \to I$ — биекция. Так как множество I неразличимо, а модель M λ-однородна, то f продолжается до морфизма $g : I \to M$. Тогда $g(I)$ — неразличимое множество в M, собственным образом расширяющее I, что противоречит максимальности I.

(2)$\Rightarrow$(1). Пусть $A \subseteq M$, $|A| < \lambda$, $a \in M$, $p = \mathrm{tp}(a/A)$, $f : A \to M$ — морфизм. Нужно доказать, что $f(p)$ реализуется в M.

По теореме 4.2 существует (D,ω)-простая над A модель N. В силу (D,ω)-простоты можно считать, что $N \prec M$, и f можно продолжить до морфизма $h : N \to M$. Если $a \in N$, то $h(a)$ реализует $f(p)$.

Допустим, что $a \notin N$. Тогда тип $q = \mathrm{tp}(a/N) \in S_D(N)$ не реализуется в (D,ω)-однородной модели N. По предложению 3.6 $q = Av(I/N)$ для некоторого бесконечного неразличимого множества $I \subseteq N$. Тогда $h(q) = Av(h(I)/h(N))$. Расширим $h(I)$ до максимального неразличимого множества $I_1 \subseteq M$. В силу (2) $|I_1| \geq \lambda$. По предложению 3.4 существует $I_2 \subseteq I_1$ такое, что $|I_2| \leq |h(A)| < \lambda$ и $I_1 - I_2$ неразличимо над $h(A)$. Так как $Av(I_1 - I_2/h(A)) = Av(I_1/h(A)) = Av(h(I)/h(A)) = h(q|A) = f(p)$, любой элемент из $I_1 - I_2$ реализует $f(p)$.

Предложение 5.1 доказано.

Теорема 5.2. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) *для любого $\lambda \geq |D| + |T|$ существует D-однородная модель мощности λ;*

(2) *существует (D,ω)-однородная модель мощности, большей чем $|D|$;*

(3) *существует (D,ω)-однородная модель, содержащая бесконечное неразличимое множество;*

(4) *существуют D-модели $M \prec N$ такие, что $M \neq N$ и M (D,ω)-однородна;*

(5) *существуют D-множество мощности, большей чем $|D|$, и (D,ω)-однородная модель.*

Доказательство. (1)⇒(2) очевидно.

(2)⇒(3) следует из предложения 3.7.

(1)⇒(4). Пусть M, N — D-однородные модели, $|M| < |N|$. Тогда $M \neq N$ и в силу леммы 1.1 можно считать, что $M \prec N$.

(4)⇒(3). Пусть $a \in N - M$. Тогда тип $tp(a/M) \in S_D(M)$ опускается в M. По предложению 3.6 модель M содержит бесконечное неразличимое множество.

(3)⇒(1). Пусть $\lambda \geq |D| + |T|$. Индукцией по i построим элементарную цепь $\{M_i : i \leq \lambda\}$ такую, что

(i) M_i является моделью мощности λ;

(ii) все типы из $S_D(M_i)$ реализуются в M_{i+1};

(iii) $M_i = \bigcup\limits_{j<i} M_j$ для предельных j.

В качестве M_0 возьмем D-модель мощности λ, которая существует по следствию 4.4. Допустим, что модель M_i построена. По следствию 2.4(2) $|S_D(M_i)| = \lambda$. Пусть $S_D(M_i) = \{p_j : j < \lambda\}$. Индукцией по j построим цепь D-моделей $\{M^i_j : j \leq \lambda\}$ следующим образом. Пусть $M^i_0 = M_i$. На предельных шагах берем объединения. Допустим, что модель M^i_j построена. По предложению 3.5 тип p_j расширяется до типа $p^*_j \in S_D(M^i_j)$. Пусть a_j реализует p^*_j. По следствию 4.4 существует D-модель M^i_{j+1} мощности λ, содержащая $M^i_j \cup \{a_j\}$. Полагаем $M_{i+1} = M^i_\lambda$.

Пусть $M = M_\lambda$. В силу (i) $|M| = \lambda$. Модель M (D,ω)-однородна. Действительно, пусть p — D-тип над конечным множеством $A \subseteq M$. Тогда $A \subseteq M_i$ для некоторого $i < \lambda$. По следствию 4.3 тип p расширяется до D-типа над M_i, который по построению реализуется в модели $M_{i+1} \prec M$. По лемме 1.2 модель M (D,ω)-однородна. Покажем, что M (D,λ)-однородна. Пусть I — максимальное бесконечное неразличимое множество в M. В силу предложения 5.1 достаточно доказать, что $|I| \geq \lambda$. Допустим, что $|I| < \lambda$. Пусть $p = Av(I/M)$. По следствию 3.4 $p \in S_D(M)$. Выберем конечное $A \subseteq M$ такое, что $R_D(p) = R_D(p|A)$. Без ограничения общности считаем $A \subseteq M_0$. В силу (ii) для каждого $i < \lambda$ существует элемент $b_i \in M_{i+1} - M_i$, реализующий $p|M_i$. Тогда множество $J = \{b_i : i < \lambda\}$ является последовательностью Морли типа $p|A$ и потому неразличимо (предложение 3.2). Из доказательства предложения 3.6 следует, что $p = Av(J/M)$. По предложению 3.3 существует $J' \subseteq J$ такое, что $|J'| \leq |I| < \lambda$ и $J - J'$ неразличимо над I. Пусть $a \in J - J'$. Тогда $tp(a/I) = Av(J - J'/I) = Av(J/I) = p|I = Av(I/I)$. Следовательно, $I \cup \{a\}$ — неразличимое множество в M, собственным образом содержащее I, что противоречит максимальности I.

(2)⇒(5) очевидно.

(5)⇒(2) вытекает из теоремы 4.2.

Теорема 5.2 доказана.

Следствие 5.3. *Если модель M (D,λ)-проста над A, то $|M| \leq |A| + |D| + |T| + \lambda$.*

Доказательство. Пусть $\nu = |A| + |D| + |T| + \lambda$. По теореме 5.2 существует D-однородная модель N мощности ν. По лемме 1.1 существует морфизм $f : A \to N$. Так как модель M (D,λ)-проста над A, то f продолжается до морфизма отображения $g : M \to N$. Значит, $|M| \leq |N|$.

Следствие 5.3 доказано.

Рассуждая, как в последнем абзаце доказательства теоремы 5.2, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 5.4. *Пусть* $M = \bigcup_{i<\delta} M_i$ *— объединение элементарной цепи* (D,λ)*-однородных моделей. Тогда модель* M *тоже* (D,λ)*-однородна.*

Доказательство. Пусть I — максимальное бесконечное неразличимое множество в M. В силу предложения 5.1 достаточно доказать, что $|I| \geq \lambda$. Допустим, что $|I| < \lambda$. Пусть $p = Av(I/M)$. По следствию 3.4 $p \in S_D(M)$. Выберем конечное $A \subseteq M$ такое, что $R_D(p) = R_D(p|A)$. Тогда $A \subseteq M_n$ для некоторого $n < \delta$. В силу (D,λ)-однородности в модели M_n можно построить последовательность Морли $J = \{b_i : i < \lambda\}$ типа $p|A$. По предложению 3.2 J — неразличимое множество. Из доказательства предложения 3.6 следует, что $p = Av(J/M)$. По предложению 3.3 существует $J' \subseteq J$ такое, что $|J'| \leq |I| < \lambda$ и $J - J'$ неразличимо над I. Пусть $a \in J - J'$. Тогда $\mathrm{tp}(a/I) = Av(J - J'/I) = Av(J/I) = p|I = Av(I/I)$. Следовательно, $I \cup \{a\}$ — неразличимое множество в M, собственным образом содержащее I, что противоречит максимальности I.

Теорема 5.4 доказана.

§ 6. Категоричность

Напомним, что некоторый класс моделей называется *μ-категоричным*, если любые две модели мощности μ из этого класса изоморфны.

Обозначим через $\mathscr{H}(D,\lambda)$ класс всех (D,λ)-однородных моделей. Для этого класса будет доказана теорема категоричности.

Определение. (1) Зафиксируем D-тип вида $p^* = Av(I^*/A^*)$, где I^* — бесконечное неразличимое множество и $|A^*| < \omega$, наименьшего возможного ранга. Тип p назовем *D-минимальным*, если $p = f(p^*)$ для некоторого морфизма f.

(2) Если тип $p \in S_D(A)$ D-минимален и $A \subseteq M$, то *p-базисом* модели M назовем максимальную последовательность Морли типа p в M.

Лемма 6.1. *Если модель* M (D,λ)*-однородна, то существует конечное множество* $A \subseteq M$ *и* D*-минимальный тип* $p \in S_D(A)$.

Доказательство следует из леммы 1.1.

Определение. Тип p назовем (D,λ)*-недвукардинальным*, если для любых (D,λ)-однородных моделей $M \prec N$, $N \neq M$, $|M| > |D| + |T|$, условие $\mathrm{dom}(p) \subseteq M$ влечет реализуемость p в $N - M$.

Определение. Модель M назовем (D,λ)-минимальной над множеством $A \subseteq M$, если из условий: $A \subseteq N \prec M$ и N (D,λ)-однородна, следует, что $M = N$.

Предложение 6.3. *Пусть* M *—* (D,λ)*-однородная модель мощности* $|M| > |D| + |T|$, *тип* $p \in S_D(A)$ D*-минимален и* (D,λ)*-недвукардинален,* $A \subseteq M$, I *—* p*-базис модели* M*. Тогда модель* M (D,λ)*-проста и* (D,λ)*-минимальна над* $A \cup I$.

Доказательство. Пусть $A \cup I \subseteq N \prec M$ и модель N (D,λ)-однородна. Если $N \neq M$, то в силу недвукардинальности тип p реализуется некоторым элементом $a \in N - M$. По предложению 3.6 $\mathrm{tp}(a/M) = Av(J/M)$ для некоторого бесконечного неразличимого множества $J \subseteq M$. Тогда $R_D(\mathrm{tp}(a/M)) = R_D(p)$ ввиду D-минимальности типа p. Следовательно, $I \cup \{a\}$ — последовательность

Морли типа p, что противоречит максимальности I. Значит, $N = M$ и модель M (D,λ)-минимальна над $A \cup I$.

По теореме 4.2 существует модель $N \prec M$, (D,λ)-простая над $A\cup I$. В силу (D,λ)-минимальности имеем $N = M$, т. е. модель M (D,λ)-проста над $A \cup I$.

Предложение 6.3 доказано.

Следствие 6.4. *Допустим, что D-минимальный тип p^* (D,λ)-недвукардинален. Пусть $\kappa > |D|+|T|$. Тогда любая (D,λ)-однородная модель M_0 мощности κ является однородной и класс $\mathscr{H}(D,\lambda)$ κ-категоричен.*

Доказательство. По теореме 5.2 существует D-однородная модель M_1 мощности κ. Пусть $p_i \in S_D(A_i)$ — D-минимальный тип, $A_i \subseteq M_i$, I_i — p_i-базис модели M_i, $i < 2$. По следствию 5.3 и предложению 6.3 $|I_i| = \kappa$, поэтому существует сюръективный морфизм $f : A_0 \cup I_0 \to A_1 \cup I_1$. Продолжив f до морфизма $g : M_0 \to M_1$, по предложению 6.3 получим $g(M_0) = M_1$.

Предложение 6.5. *Пусть $\kappa \geq |D|+|T|+\lambda$, N — (D,λ)-однородная модель мощности $|N| > \kappa$, содержащая бесконечное неразличимое над A множество, $A \subseteq N$, $p \in S_D(A)$. Если тип p опускается в N, то существует (D,λ)-однородная модель $M \prec N$ мощности κ такая, что тип $p|A\cap M$ опускается в M и M содержит бесконечное неразличимое над $A \cap M$ множество.*

Доказательство. Индукцией по i построим элементарную цепь $\{M_i : i \leq \omega\}$ следующим образом. Выберем D-множество $B \subseteq N$ мощности κ, содержащее бесконечное неразличимое над A множество. По теореме 4.2 существует (D,λ)-простая над B модель $M_0 \prec N$. По следствию 5.3 $|M_0| = \kappa$. Пусть модель M_i построена, $M_i \prec N$, $|M_i| = \kappa$. Так как p опускается в N, для каждого элемента $a \in M_i$ существует формула $\varphi_a(x,\bar{b}_a) \in p$ такая, что $\models \neg\varphi(a,\bar{b}_a)$. По теореме 4.2 существует (D,λ)-простая над $M_i \cup \{\bar{b}_a : a \in M_i\}$ модель $M_{i+1} \prec N$. По следствию 5.3 $|M_{i+1}| = \kappa$. Ясно, что никакой элемент из M_i не реализует $p|A \cap M_{i+1}$.

Пусть $M = M_\omega$. По теореме 5.4 модель M (D,λ)-однородна. Ясно, что $|M| = \kappa$. Никакой элемент $a \in M$ не реализует $p|A \cap M$, потому что $a \in M_i$ для некоторого i и по построению a не реализует $p|A \cap M_{i+1}$.

Предложение 6.5 доказано.

В следующем предложении (это теорема 9.6 из [3]) D — произвольная диаграмма (не обязательно стабильная).

Предложение 6.6. *Пусть $p \in S_D(A)$, I — неразличимая последовательность над A, $I_0 \subseteq I$, $|I_0| \geq \lambda$, модель M (D,λ)-однородна, $A \cup I_0 \subseteq M$, модель N $(D,\lambda,1)$-проста над $A \cup I$. Тогда если p реализуется в N, то p реализуется и в M.*

Доказательство. Пусть $N = A \cup I \cup \{a_i : i < \delta\}$ — (D,λ)-конструкция, $p_i = \mathrm{tp}(a_i/A \cup I \cup \{a_j : j < i\})$. Пусть элемент $a \in N$ реализует p. Ясно, что если $a \in A \cup I$, то p реализуется в M. Допустим, что $a = a_{i'}$ для некоторого $i' < \delta$. Индукцией по $n < \omega$ определим множества $A_n \subseteq N$ следующим образом. Выберем $A_0 \subseteq \mathrm{dom}(p_{i'})$ такое, что $|A_0| < \lambda$ и тип $p_{i'}$ D-изолирован над A_0. Допустим, что A_n определено и $|A_n| \leq \lambda$. Для каждого $a_i \in A_n$ выберем $A_n^i \subseteq \mathrm{dom}(p_i)$ такое, что $\left|A_n^i\right| < \lambda$ и тип p_i D-изолирован над A_n^i. Полагаем $A_{n+1} = \cup\left\{A_n^i : a_i \in A_n\right\}$. Ясно, что $|A_{n+1}| \leq \lambda$.

Пусть $I_1 = I \cap \bigcup\limits_{n<\omega} A_n$ и $\{a_{s(i)} : i < \delta_1\} = \{a_i : i < \delta\} \cap \bigcup\limits_{n<\omega} A_n$, где $s(i) < s(j) < i'$ для всех $i < j < \delta_1$. Положим $s(\delta_1) = i'$. По построению для любого $i \leq \delta_1$ тип $q_i = \mathrm{tp}(a_{s(i)}/A \cup I \cup \{a_{s(j)} : j < i\})$ (D,λ)-изолирован. Так как I — неразличимая последовательность над A и $|I_1| \leq \lambda \leq |I_0|$, существует морфизм $f : A \cup I_1 \to A \cup I_0$, тождественный на A. Поскольку тип q_i (D,λ)-изолирован для любого $i \leq \delta_1$ и модель M (D,λ)-однородна, индукцией по $i \leq \delta_1 + 1$ можно определить морфизмы $f_i : A \cup I_1 \cup \{a_{s(j)} : j < i\} \to M$ такие, что $f_0 = f$ и $f_j \subseteq f_i$ для всех $j < i$. Так как элемент $a_{s(\delta_1)} = a_{i'}$ реализует p, то $f_{\delta_1+1}(a_{s(\delta_1)})$ реализует p в M.

Предложение 6.6 доказано.

Теорема 6.7. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) *класс* $\mathscr{H}(D,\lambda)$ κ*-категоричен для любого* $\kappa > |D| + |T|$*;*

(2) *класс* $\mathscr{H}(D,\lambda)$ κ*-категоричен для некоторого* $\kappa > |D| + |T| + \lambda$*;*

(3) *для любого* $\kappa > |D| + |T|$ *каждая* (D,λ)*-однородная модель мощности* κ *однородна;*

(4) *для некоторого* $\kappa > |D| + |T| + \lambda$ *каждая* (D,λ)*-однородная модель мощности* κ *однородна;*

(5) *если* M *и* N — (D,λ)*-однородные модели,* $|M| > |D| + |T|$, $M \prec N$, $M \neq N$, *и* $p = Av(I/A)$ *для некоторого* $A \subseteq M$ *мощности* $|A| < |M|$ *и бесконечного неразличимого множества* $I \subseteq M$*, то* p *реализуется в* $N - M$*;*

(6) *существует* (D,λ)*-недвукардинальный* D*-минимальный тип.*

Доказательство. (1)$\Rightarrow$(2) очевидно.

(2)$\Rightarrow$(4) следует из теоремы 5.2.

(4)$\Rightarrow$(3). Допустим противное. Пусть N — контрпример к (3). Тогда существуют $A \subseteq N$, $|A| < |N|$, и тип $p \in S_D(A)$, который опускается в N. По предложению 3.7 существует бесконечное неразличимое над A множество в N. По предложению 6.5 существует (D,λ)-однородная модель $M \prec N$ мощности $|D| + |T| + \lambda$ такая, что тип $p|B$ опускается в M и M содержит бесконечное неразличимое над B множество I_0, где $B = A \cap M$. Так как M (D,λ)-однородна, то $|I_0| \geq \lambda$. По теореме компактности существует неразличимое над B D-множество $I \supseteq I_0$ мощности κ, по теореме 4.2 — $(D,\lambda,1)$-простая над $B \subseteq I$ модель N_0. По следствию 5.3 $|N_0| = \kappa$. Так как $|B| \leq |M| < |N_0|$ и D-тип $p|B$ опускается в N_0 по предложению 6.6, то N_0 не однородна, что противоречит (4).

(3)$\Rightarrow$(1) очевидно.

(3)$\Rightarrow$(5). Пусть M, N, p, A, I такие, как в (5). Нужно доказать, что p реализуется в $N - M$. Пусть $\kappa = |M|^+$. Индукцией по i построим элементарную цепь $\{M_i : i \leq \kappa\}$ следующим образом. Пусть $M_0 = M$, $a \in N - M$. По теореме 4.2 существует (D,λ)-простая над $M \cup \{a\}$ модель $M_1 \prec N$. По лемме 5.3 $|M_0| = |M|$. В силу (3) модели M и M_1 изоморфны.

Допустим, что модель M_i, $1 \leq i < \kappa$, построена и изоморфна M. Так как модель M однородна и $|A| < |M|$, существует изоморфизм f_i модели M на M_i, тождественный на A. Продолжим f_i до морфизма g_i с областью определения M_1. Полагаем $M_{i+1} = g_i(M_1)$. Тогда $M_i \prec M_{i+1}$ и $M_i \neq M_{i+1}$.

Для предельного $\delta \leq \kappa$ положим $M_\delta = \bigcup\limits_{i<\delta} M_i$. По индуктивному предположению модель M_i изоморфна M для любого $i < \delta$, поэтому при $\delta < \kappa$ модель M_δ (D,λ)-однородна по теореме 5.4 и $|M_\delta| = |M|$. В силу (3) M и M_δ изоморфны.

Расширим I до максимального неразличимого множества $I_0 \subseteq M_\kappa$. В силу (3) модель M_κ однородна и $|M_\kappa| \geq \kappa$ (поскольку $M_i \neq M_{i+1}$ для всех $i < \kappa$), тем самым $|I_0| \geq \kappa$. По предложению 3.3 существует $I_1 \subseteq I_0$ такое, что $|I_1| \leq \omega + |A| < \kappa$ и $I_0 - I_1$ неразличимо над A. Имеем $Av(I_0 - I_1/A) = Av(I_0/A) =$

$Av(I/A) = p$. Так как $|I_0 - I_1| \geq \kappa > |M_0|$, существуют $i < \kappa$ и элемент $b \in M_{i+1} - M_i$ такой, что b принадлежит $I_0 - I_1$ и, значит, реализует p. Так как g_i — морфизм, тождественный на A, то $g_i^{-1}(b)$ реализует p. Так как $g_i(M) = M_i$ и $g_i(M_1) = M_{i+1}$, то $g_i^{-1}(b) \in M_1 - M \subseteq N - M$.

(5)⇒(6) очевидно.

(6)⇒(1) вытекает из следствия 6.4.

Теорема 6.7 доказана.

Примечание. При чтении корректуры автор сделал неверные сокращения в правильном доказательстве импликации (3)⇒(1) теоремы 5.2, из-за чего в доказательстве возникли пробелы. Заполнить их можно так. Модели M_i должны быть (D,ω)-однородными. Полагаем $M_0 = M^\omega$, где $\{M^i : i \leq \omega\}$ – элементарная цепь D-моделей мощности λ, M^0 выбирается произвольно, на предельных шагах берутся объединения, а в M^{i+1} реализуются все D-типы над конечными подмножествами модели M^i (это делается аналогично описанному в статье построению M_{i+1} с использованием следствия 4.3). Если модель M_i построена, то строим, как описано в статье, D-модель M'_{i+1} мощности λ, в которой реализуются все типы из $S_D(M_i)$, а затем аналогично построению M_0 строим (D,ω)-однородную модель $M_{i+1} \succ M'_{i+1}$ мощности λ. Далее как в статье.

Автор благодарен Б. И. Зильберу за интерес к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Shelah S.* Finite diagrams stable in power // Ann. Math. Logic. 1970. V. 2. P. 69–118.
2. *Shelah S.* Classification theory and the number of non-isomorphic models. Amsterdam: North-Holland, 1978.
3. *Kudaibergenov K. Zh.* Homogeneous models of stable theories // Siberian Adv. Math. 1993. V. 3, N 3. P. 1–33.
4. *Кудайбергенов К. Ж.* Об однородных моделях одноразмерностных теорий // Алгебра и логика. 1995. Т. 34, № 1. С. 61–78.
5. *Кудайбергенов К. Ж.* Об однородных моделях некоторых слабо минимальных теорий // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 6. С. 1253–1259.
6. *Кудайбергенов К. Ж.* Об однородных моделях локально модулярных теорий конечного ранга // Мат. труды. 2002. Т. 5, № 1. С. 74–83.
7. *Кудайбергенов К. Ж.* Об однородных моделях тотально трансцендентных немультиразмерностных теорий // Алгебра и логика. 1991. Т. 30, № 1. С. 48–73.
8. *Сакс Дж.* Теория насыщенных моделей. М.: Мир, 1976.
9. *Keisler H. J., Morley M. D.* On the number of homogeneous models of a given power // Israel J. Math. 1967. V. 5, N 2. P. 73–78.

Статья поступила 23 февраля 2001 г.

Кудайбергенов Канат Жанзакович
Институт математики МОиН РК, ул. Пушкина, 125, Алматы 480100, Казахстан
kanat@math.kz