Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2002. Том 43, № 5

УДК 517.5

О ПОРОЖДАЮЩИХ В ИДЕАЛАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА И ТИПА В ПЛОСКОСТИ

А. С. Кривошеев, С. Н. Ганцев

Аннотация: Изучаются идеалы в пространстве целых функций конечного порядка и типа в плоскости. Получены необходимые и достаточные условия, при которых идеал, состоящий из функций, обращающихся в нуль на общих нулях системы из N функций, ими порождается.

Ключевые слова: целая функция, идеал, регулярный рост

§ 1. Введение. Предварительные сведения

Пусть $[\rho,\infty)$ определяет множество всех целых функций f таких, что для некоторых положительных констант c_1 и c_2

$$|f(z)| \le c_1 \exp[c_2|z|^\rho], \quad z \in \mathbb{C}.$$

Другими словами, $[\rho,\infty)$ — это множество всех целых функций порядка (не выше) ρ и конечного типа (при порядке ρ).

Через $[\rho,\infty)(\Lambda)$, где $\Lambda = \{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ — последовательность комплексных чисел, обозначим идеал, который состоит из всех функций из $[\rho,\infty)$, множество нулей которых содержит в себе Λ.

Как обычно, обозначим через $I(f_1,\dots,f_N)$ идеал в $[\rho,\infty)$, порожденный функциями $f_1,\dots,f_N \in [\rho,\infty)$, т. е. множество вида

$$\{f_1(z)g_1(z) + \dots + f_N(z)g_N(z)\}, \quad g_j(z) \in [\rho,\infty), \quad j = 1,\dots,N.$$

Пусть $\Lambda = \{\lambda_j\}$ — последовательность общих нулей функций $f_1,\dots,f_N$. Возникает вопрос: при каких условиях на $f_1,\dots,f_N$ идеал $I(f_1,\dots,f_N)$ совпадает с идеалом $[\rho,\infty)(\Lambda)$? Эта задача тесно связана с хорошо известной теоремой о короне (см., например, книгу [1]). Согласно этой теореме для любых функций $f_1,\dots,f_N \in H^\infty$ (где H^∞ — множество функций, аналитических и ограниченных в единичном круге), для некоторого $\delta > 0$ удовлетворяющих оценке

$$\sup_i |f_i(z)| > \delta,$$

существуют $g_1,\dots,g_N \in H^\infty$ такие, что

$$f_1g_1 + \dots + f_Ng_N \equiv 1.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–01100) и гранта Президента РФ для молодых докторов наук (код проекта 00–15–99283).

Опираясь на данную теорему, Келлехер и Тейлор в работе [2] доказали, что идеал $I(f_1,\dots,f_N\in[1,\infty))$ в $[1,\infty)$ совпадает со всем множеством $[1,\infty)$ в том и только в том случае, когда для некоторых положительных констант ε и A выполнено неравенство

$$|f_1(z)|+\dots+|f_N(z)|\geq\varepsilon\exp[-A|z|]\quad\forall z\in\mathbb{C}. \tag{1}$$

Основная идея доказательства теоремы о короне, предложенная Волффом, состоит в решении $\bar\partial$-уравнения. Эта методика позволила расширить данную задачу уже на более широкий класс функций, рассмотренных в работах [3, 4]. Существенное ограничение во всех выше перечисленных работах состоит в том, что функции $f_1,\dots,f_N$ не имеют общих нулей, т. е. указанная нами задача рассматривалась в одном частном случае, когда идеал $[\rho,\infty)(\Lambda)$ совпадает со всем $[\rho,\infty)$. В отличие от этих работ в [5] рассмотрен общий случай, но для порядка ρ, равного 1. Здесь был найден критерий совпадения идеалов, который основывается на введенном там же понятии регулярного роста системы функций.

В данной работе также рассматривается общий случай, но уже для произвольного порядка. При этом метод доказательства отличается от использованного в [5].

Нам понадобится понятие слабого регулярного роста, сформулированное в [5]. Прежде всего введем некоторые обозначения.

Пусть S — единичная окружность с центром в нуле. Для каждых $\mu\in S$ и $\delta>0$ введем множество $E(\mu,\delta)$ последовательностей $\{z_k\}_{k=1}^\infty$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $z_k\in\{t\mu,t>0\}$, $k\geq1$;
2) $|z_k|\to\infty$ при $k\to\infty$;
3) $|z_k|/|z_{k-1}|<1+\delta$.

Далее, пусть $\Gamma=\{\gamma_j\}_{j=1}^\infty$, $\gamma_j\in\mathbb{C}$, — множество с ограниченной верхней плотностью и $z_0\in\mathbb{C}\backslash\Gamma$. Тогда для каждого $\delta>0$ определим функцию

$$q_\delta(z,z_0,\Gamma)=\prod_{\gamma_j\in B(z_0,\delta|z_0|)}(z-\gamma_j)/(z_0-\gamma_j),$$

где $B(z_0,\delta|z_0|)$ — открытый круг с центром в точке z_0 и радиусом $\delta|z_0|$. В случае, если $\Gamma\cap B(z_0,\delta|z_0|)=\varnothing$, положим $q_\delta(z,z_0,\Gamma)\equiv1$. Легко видеть, что верны следующие соотношения:

$$q_\delta(z_0,z_0,\Lambda)=1;\qquad |q_\delta(z,z_0,\Lambda)|\geq1,\quad z\notin B(z_0,2\delta|z_0|). \tag{2}$$

Определение 1 [5]. Говорят, что система целых функций $(f_1,\dots,f_N)$ из $[\rho,\infty)$ в $\mathbb{C}$ имеет *слабый регулярный рост вдоль луча* $t\mu$ $(\mu\in S)$, если для любых $r>\tau>1$ существует $\delta_0>0$, удовлетворяющее условию: для каждого $\delta\in(0,\delta_0]$ найдутся последовательность $\{z_k\}\in E(\mu,\delta)$ и число $A>0$ такие, что

$$\max_{1\leq i\leq N}\ln|f_i(z)/q_{r\delta}(z,z_k,\Lambda)|\geq-A|z|^\rho,\quad z\in B(z_k,\tau\delta|z_k|),\quad k\geq1,$$

где $\Lambda=\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ — множество общих нулей функций $f_1,\dots,f_N$ с учетом их кратностей.

Отметим, что условие (1) эквивалентно слабой регулярности роста системы $(f_1,\dots,f_N)$ вдоль каждого луча из $\mathbb{C}$ в случае, когда $f_1,\dots,f_N$ не имеют общих нулей (см. [5]).

Если проанализировать понятие слабой регулярности роста, то нетрудно заметить, что ограничения, накладываемые на функции $f_1, \dots, f_N$, являются, по сути, ограничениями на взаимное расположение необщих нулей. Следующий параграф посвящен установлению взаимосвязи между слабой регулярностью роста и взаимным расположением необщих нулей.

§ 2. Слабая регулярность роста и геометрия взаимного расположения нулей системы функций

Введем еще некоторые обозначения. Рассмотрим N наборов комплексных чисел

$$\bigl(a_1^1, a_2^1, \dots, a_{k_1}^1\bigr),\ \bigl(a_1^2, a_2^2, \dots, a_{k_2}^2\bigr), \dots, \bigl(a_1^N, a_2^N, \dots, a_{k_N}^N\bigr),$$

не исключается случай, когда какие-то наборы пустые, т. е. не содержат ни одного элемента.

Для каждого $z_0 \in \mathbb{C}$, не совпадающего ни с одним из a_j^i и $i = 1, \dots, N$, построим следующий многочлен:

$$P_i(z, z_0) = \prod_{j=1}^{k_i} \frac{z - a_j^i}{z_0 - a_j^i}.$$

Если i-й набор оказывается пустым, то полагаем $P_i(z, z_0) \equiv 1$.

Лемма 1. *Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$ и для некоторого $B > 0$ выполнены неравенства*

$$\max_{1\le i\le N} \ln\bigl|P_i\bigl(a_l^p, z_0\bigr)\bigr| \ge -B, \quad 1 \le p \le N,\ 1 \le l \le k_p.$$

Тогда для всех $z \in \mathbb{C}$

$$\max_{1\le i\le N} [\ln|P_i(z, z_0)| + k_i] \ge -B.$$

Доказательство. В силу условий леммы для каждых $p = 1, \dots, N$ и $l = 1, \dots, k_p$ существует индекс $i_{p,l}$ такой, что $\ln\bigl|P_{i_{p,l}}\bigl(a_l^p, z_0\bigr)\bigr| \ge -B$. Легко видеть, что для всех $z \notin B\bigl(a_j^{i_{p,l}}, \bigl|a_l^p - a_j^{i_{p,l}}\bigr|/2\bigr)$ имеет место оценка

$$2\bigl|z - a_j^{i_{p,l}}\bigr| \ge \bigl|a_l^p - a_j^{i_{p,l}}\bigr|.$$

Поэтому с учетом последних двух неравенств вне объединения

$$\bigcup_{j=1}^{k_{i_{p,l}}} B\bigl(a_j^{i_{p,l}}, \bigl|a_l^p - a_j^{i_{p,l}}\bigr|/2\bigr)$$

выполнены соотношения

$$\ln|P_{i_{p,l}}(z, z_0)| + k_{i_{p,l}} \ge \ln|P_{i_{p,l}}(z, z_0)| + k_{i_{p,l}} \ln 2 \ge -B.$$

Объединяя эти оценки для всевозможных $p = 1, \dots, N$ и $l = 1, \dots, k_p$, получим, что для всех z вне пересечения

$$\bigcap_{p=1}^{N} \bigcap_{l=1}^{k_p} \bigcup_{j=1}^{k_{i_{p,l}}} B\bigl(a_j^{i_{p,l}}, \bigl|a_l^p - a_j^{i_{p,l}}\bigr|/2\bigr)$$

выполнено неравенство

$$\max_{1\le i\le N}[\ln|P_i(z,z_0)|+k_i]\ge \max_{\substack{1\le p\le N\\ 1\le l\le k_p}}[\ln|P_{i_{p,l}}(z,z_0)|+k_{i_{p,l}}]\ge -B.$$

Для доказательства леммы достаточно показать, что

$$\Omega=\bigcap_{p=1}^{N}\bigcap_{l=1}^{k_p}\bigcup_{j=1}^{k_{i_{p,l}}}B\big(a_j^{i_{p,l}},\big|a_l^p-a_j^{i_{p,l}}\big|/2\big)\equiv\varnothing.$$

Пусть $z\in\Omega$. Тогда для каждых $p=1,\dots,N$ и $l=1,\dots,k_p$ существует индекс $j(p,l,z)$ такой, что z принадлежит кругу $B\big(a_{j(p,l,z)}^{i_{p,l}},\big|a_l^p-a_{j(p,l,z)}^{i_{p,l}}\big|/2\big)$. Но тогда z будет принадлежать и множеству

$$\Omega(z)=\bigcap_{p=1}^{N}\bigcap_{l=1}^{k_p}B\big(a_{j(p,l,z)}^{i_{p,l}},\big|a_l^p-a_{j(p,l,z)}^{i_{p,l}}\big|/2\big).\tag{3}$$

Покажем, что для каждого $z\in\Omega$ множество $\Omega(z)$ пустое. Предположим обратное, т. е. пусть существует такое $z\in\Omega$, для которого $\Omega(z)\ne\varnothing$.

Пусть круг $B\big(a_{j_2}^{i_2},|a_{j_1}^{i_1}-a_{j_2}^{i_2}|/2\big)$ совпадает с одним из кругов из пересечения (3). Тогда существует круг $B\big(a_{j_3}^{i_3},|a_{j_2}^{i_2}-a_{j_3}^{i_3}|/2\big)$, лежащий в этом же пересечении, поскольку p пробегает все значения от 1 до N, а l — от 1 до k_p. В силу предположения имеем

$$\big|a_{j_1}^{i_1}-a_{j_2}^{i_2}\big|>\big|a_{j_2}^{i_2}-a_{j_3}^{i_3}\big|.$$

Аналогично для круга $B\big(a_{j_3}^{i_3},|a_{j_2}^{i_2}-a_{j_3}^{i_3}|/2\big)$ существует соответствующий круг $B\big(a_{j_4}^{i_4},|a_{j_3}^{i_3}-a_{j_4}^{i_4}|/2\big)$, причем

$$\big|a_{j_1}^{i_1}-a_{j_2}^{i_2}\big|>\big|a_{j_2}^{i_2}-a_{j_3}^{i_3}\big|>\big|a_{j_3}^{i_3}-a_{j_4}^{i_4}\big|.$$

Продолжая процесс дальше, на k-м шаге получим

$$\big|a_{j_1}^{i_1}-a_{j_2}^{i_2}\big|>\dots>\big|a_{j_{k-1}}^{i_{k-1}}-a_{j_k}^{i_k}\big|>\big|a_{j_k}^{i_k}-a_{j_{k+1}}^{i_{k+1}}\big|.$$

Данную процедуру можно проделывать до бесконечности. Так как число кругов, входящих в пересечение (3), конечно, то на каком-то шаге, скажем m_1, будет

$$\big|a_{j_1}^{i_1}-a_{j_2}^{i_2}\big|>\dots>\big|a_{j_{m_1}}^{i_{m_1}}-a_{j_{m_1+1}}^{i_{m_1+1}}\big|>\big|a_{j_{m_1+1}}^{i_{m_1+1}}-a_{j_{m_1+2}}^{i_{m_1+2}}\big|>\dots>\big|a_{j_{m_1}}^{i_{m_1}}-a_{j_{m_1+1}}^{i_{m_1+1}}\big|>\dots;$$

получили противоречие. Следовательно, для любого $z\in\Omega$ множество $\Omega(z)$ пустое, а вместе с ним пустым будет и Ω. Лемма доказана.

Рассмотрим систему функций $(f_1,\dots,f_N)$ с общим нулевым множеством Λ. Пусть Γ_i — все нули функции f_i. Положим $\Lambda_i=\Gamma_i\setminus\Lambda$ и назовем его *множеством необщих нулей функции* f_i.

Введем теперь другое определение слабого регулярного роста и, используя только что доказанную лемму, покажем, что оно эквивалентно определению 1.

Определение 2. Будем говорить, что система целых функций $(f_1,\dots,f_N)$ из $[\rho,\infty)$ в $\mathbb{C}$ имеет *слабый регулярный рост вдоль луча* $t\mu$ $(\mu\in S)$, если существует $\tilde{\delta}_0$, удовлетворяющее условию: для любого $\delta\in(0,\tilde{\delta}_0]$ существуют числа

r_0 и $C > 0$ такие, что для всех $z_0 \in \{t\mu, t > 0\}$, $z_0 \notin \bigcup\limits_{i=1}^{N} \Lambda_i$, $|z_0| \ge r_0$, для любого индекса $1 \le p \le N$ и для всех $\lambda_l^p \in \Lambda_p \cap B(z_0, \delta|z_0|)$ имеет место оценка

$$\max_{1\le i\le N} \ln\bigl|q_\delta\bigl(\lambda_l^p, z_0, \Lambda_i\bigr)\bigr| \ge -C|z_0|^\rho,$$

где $\Lambda_i = \bigl\{\lambda_j^i\bigr\}_{j=1}^{\infty}$ — множество необщих нулей функции f_i с учетом их кратностей.

Пусть $f_1, \dots, f_N \in [\rho, \infty)$. Согласно определению порядка и типа целой функции найдутся положительные постоянные $D, D_1, \widetilde{D} = \widetilde{D}(R)$ такие, что

$$\ln|f_i(z)| \le D|z|^\rho + D_1, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \ln|f_i(z)| \le \widetilde{D}|z|^\rho, \quad |z| \ge R > 0. \tag{4}$$

Предложение. *Определения* 1 *и* 2 *эквивалентны.*

Доказательство. Докажем, что из определения 2 следует 1. Пусть $r > \tau > 1$, $\delta_0 = \tilde{\delta}_0/r$ и $\mu \in S$. Возьмем $\delta \in (0, \delta_0]$. Из доказательства теоремы об оценке снизу целой функции конечного типа на системе окружностей (см., например, [6, гл. I, теорема 4.3]) вытекает существование последовательности $\{z_k\} \in E(\mu, \delta)$ и числа $C_1 > 0$ таких, что для всех $i = 1, \dots, N$ верна оценка

$$\ln|f_i(z_k)| \ge -C_1|z_k|^\rho, \quad k \ge 1. \tag{5}$$

Из второго неравенства в (4) получаем, что для всех $i = 1, \dots, N$

$$\ln|f_i(z)| \le \widetilde{D}(1+6r)^\rho|z_k|^\rho, \quad z \in B(z_k, 6r\delta|z_k|), \quad k \ge k_1, \tag{6}$$

где k_1 — наименьшее натуральное число, при котором $|z_{k_1}| \ge R$.

Положим $\varphi_{i,k}(z) = f_i(z)[q_{r\delta}(z, z_k, \Lambda_i)q_{r\delta}(z, z_k, \Lambda)]^{-1}$. Из первого равенства в (2) получаем $\varphi_{i,k}(z_k) = f_i(z_k)$. Следовательно, для каждого $i = 1, \dots, N$

$$\ln|\varphi_{i,k}(z_k)| \ge -C_1|z_k|^\rho, \quad k \ge 1. \tag{7}$$

Заметим, что множества Λ и Λ_i состоят из нулей функции f_i, поэтому $\varphi_{i,k}$ целая для каждого $k \ge 1$. Из соотношений (2), (6), используя принцип максимума модуля для аналитической функции, нетрудно получить, что

$$\ln|\varphi_{i,k}(z)| \le \widetilde{D}(1+6r)^\rho|z_k|^\rho, \quad z \in B(z_k, 6r\delta|z_k|), \quad k \ge k_1.$$

Из последних двух неравенств следует, что

$$\ln\left|\frac{\varphi_{i,k}(z)}{\varphi_{i,k}(z_k)}\right| \le [\widetilde{D}(1+6r)^\rho + C_1]|z_k|^\rho, \quad z \in B(z_k, 6r\delta|z_k|), \quad k \ge k_1.$$

По теореме об оценке снизу модуля аналитической функции в круге (см. [6, гл. I, теорема 4.2]) вне исключительных кружков с общей суммой диаметров $8\eta r\delta|z_k|$ для каждого $i = 1, \dots, N$ имеем

$$\ln\left|\frac{\varphi_{i,k}(z)}{\varphi_{i,k}(z_k)}\right| \ge -a_1|z_k|^\rho, \quad z \in B(z_k, r\delta|z_k|), \quad k \ge k_1, \tag{8}$$

где $\eta = (r - \tau)/8r$ и $a_1 = (2 + \ln[3e/2\eta])(\widetilde{D}(1+6r)^\rho + C_1)$. При этом, как видно из доказательства леммы Картана об оценке снизу полинома (на которой основана цитируемая теорема), каждый из исключительных кружков содержит хотя бы один нуль функции $\varphi_{i,k}$. По построению $\varphi_{i,k}$ не имеет нулей в круге

$B(z_k, r\delta|z_k|)$, поэтому $B(z_k, \tau\delta|z_k|)$ не пересекает исключительных кружков. Тогда (8) выполнено всюду в круге $B(z_k, \tau\delta|z_k|)$.

Теперь, заменяя для каждого $i = 1, \dots, N$ множества $\{a_j^i\}$ в лемме 1 множествами $\Lambda_i \cap B(z_k, r\delta|z_k|)$ и многочлен $P_i(z, z_0)$ многочленом $q_{r\delta}(z, z_k, \Lambda_i)$, получим, что все условия леммы 1 выполнены, а значит,

$$\max_{1\le i\le N}[\ln|q_{r\delta}(z, z_k, \Lambda_i)| + m_{i,k}] \ge -C|z_k|^\rho, \quad z \in B(z_k, r\delta|z_k|),\ k \ge k_1,$$

где $m_{i,k}$ — число элементов множества Λ_i в круге $B(z_k, r\delta|z_k|)$. Ввиду [6, гл. I, лемма 4.1] с учетом оценок (5), (6) получаем

$$m_{i,k} \le [\widetilde{D}(1 + 6r)^\rho + C_1]|z_k|^\rho, \quad k \ge k_1.$$

Тогда с учетом последних двух неравенств

$$\max_{1\le i\le N} \ln|q_{r\delta}(z, z_k, \Lambda_i)| \ge -a_2|z_k|^\rho, \quad z \in B(z_k, r\delta|z_k|), \quad k \ge k_1, \tag{9}$$

где $a_2 = \widetilde{D}(1 + 6r)^\rho + C_1 + C$.

С учетом определения функции $\varphi_{i,k}$ и неравенств (6)–(9) получаем

$$\max_{1\le i\le N} \ln\left|\frac{f_i(z)}{q_{r\delta}(z, z_k, \Lambda)}\right| = \max_{1\le i\le N}\left[\ln\left|\frac{\varphi_{i,k}(z)}{\varphi_{i,k}(z_k)}\right| + \ln|q_{r\delta}(z, z_k, \Lambda_i)| + \ln|\varphi_{i,k}(z_k)|\right]$$
$$\ge -\frac{a_1 + a_2 + C_1}{(1 - \tau\delta)^\rho}|z|^\rho, \quad z \in B(z_k, \tau\delta|z_k|), \quad k \ge k_1.$$

Полагая A равным $(a_1 + a_2 + C_1)(1 - \tau\delta)^{-\rho}$ и перенумеровывая последовательность $\{z_k\}$, получаем, что все условия определения 1 выполнены. В одну сторону предложение доказано.

Докажем, что из определения 1 следует 2. Положим $r = 5$, $\tau = 4$. Тогда для $\delta \in (0, \delta_0]$ (δ_0 выбирается в зависимости от r и τ) существует последовательность $\{z_k\} \in E(y, \delta)$ такая, что выполнено неравенство в определении 1.

Положим

$$\varphi_{i,k}(z) = f_i(z)\Big[q_{5\delta}(z, z_k, \Lambda) \prod_{\lambda_j^i \in B(z_k, 4\delta|z_k|)} \big(z - \lambda_j^i\big)/(8\delta z_k)\Big]^{-1}.$$

По принципу максимума модуля для аналитической функции из соотношений (2), (4) вытекает, что для некоторого $k_1 > 0$ в круге $B(z_k, 4\delta|z_k|)$ справедлива оценка

$$\ln|\psi_{i,k}(z)| \le \widetilde{D}(1 + 12\delta)^\rho|z_k|^\rho, \quad k \ge k_1.$$

Применяя это неравенство и неравенство в определении 1, для всякого $z \in B(z_k, 4\delta|z_k|)$ получим

$$\max_{1\le i\le n} \ln\Big|\prod_{\lambda_j^i \in B(z_k, 4\delta|z_k|)} (z - \lambda_j^i)/(8\delta z_k)\Big| \ge -C|z|^\rho, \quad k \ge k_1, \tag{10}$$

где $C = A + \widetilde{D}(1 + 12\delta)^\rho(1 - 4\delta)^{-\rho}$.

Выберем точку z_0 на луче $\{t\mu, t > 0\}$ так, что $|z_0| > |z_{k_1}|$. Очевидно, найдется номер $k > k_1$, для которого $|z_{k-1}| < |z_0| \le |z_k|$ и круг $B(z_k, 4\delta|z_k|)$ содержит в себе $B(z_0, \delta|z_0|)$. Тогда из (10) для любого $z \in B(z_0, \delta|z_0|)$ при $k \ge k_1$ выполнены неравенства

$$-C|z|^\rho \le \max_{1\le i\le n} \ln\Big|\prod_{\lambda_j^i \in B(z_0, \delta|z_0|)} (z - \lambda_j^i)/(2\delta z_0)\Big| \le \ln|q_\delta(z, z_0, \Lambda_i)|.$$

Из полученного неравенства уже легко получить неравенство в определении 2. Остается положить $r_0 = |z_{k_1}|$, $\tilde{\delta}_0$ взять равным δ_0 и перенумеровать последовательность $\{z_k\}$. Предложение доказано.

Рассмотрим некоторые примеры.

1. Пусть $f_i(z)$, $i = 1, \dots, N$, являются полиномами. Тогда вне некоторого круга $|z| \geq r_0$ оценка в определении 2 будет выполнена автоматически.

2. Пусть

$$f_1(z) = \sin(\pi z), \quad f_2(z) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 + z/k) \prod_{k=1}^{\infty}(1 + z/(k + k^{-1})).$$

Эти функции имеют экспоненциальный тип и $\mathbb{Z}^-$ (множество целых отрицательных чисел) является их общим нулевым множеством. Покажем, что они имеют слабый регулярный рост вдоль положительной вещественной оси. Положим $\delta = 1/2$, $r_0 = 3$. Номера k_0 и k_1 выберем так, чтобы

$$z_0/2 + 1 > k_0 > z_0/2; \quad 3z_0/2 > k_1 > 3z_0/2 - 1,$$

где $z_0 \in \mathbb{R}, z_0 \geq r_0$.

Для каждого $m = k_0, \dots, k_1$ рассмотрим следующие произведения:

$$q_{1/2}(m + m^{-1}, z_0, \Lambda_1) = \prod_{j=k_0}^{k_1} \frac{m + m^{-1} - j}{z_0 - j}, \quad q_{1/2}(m, z_0, \Lambda_2) = \prod_{j=k_0}^{k_1} \frac{m - j - j^{-1}}{z_0 - j - j^{-1}},$$

где Λ_i — множество необщих нулей функции f_i. Оценим первое из них. Легко видеть, что

$$|q_{1/2}(m + m^{-1}, z_0, \Lambda_1)| > \frac{2}{3z_0^3} \frac{(m - k_0)!}{z_0^{m-k_0}} \frac{(k_1 - m - 1)!}{z_0^{k_1-m-1}} > \exp(-5z_0).$$

Для второго произведения справедлива аналогичная оценка. Таким образом, система функций (f_1, f_2) имеет слабый регулярный рост вдоль положительной вещественной оси, а следовательно, и вдоль каждого луча $\{t\mu, t > 0\}$, $\mu \in \mathbb{S}$.

§ 3. Достаточные условия представления

В этом параграфе мы докажем, что достаточным условием существования функций $g_1, \dots, g_N \in [\rho, \infty)$ таких, что для любой функции $F(z) \in [\rho, \infty)(\Lambda)$ (Λ — общее нулевое множество функций $f_1, \dots, f_N$ из $[\rho, \infty)$) справедливо представление

$$F(z) = f_1(z)g_1(z) + \dots + f_N(z)g_N(z),$$

является слабая регулярность роста системы функций $(f_1, \dots, f_N)$ вдоль каждого луча $\{t\mu\}$ ($\mu \in S$).

Лемма 2. *Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{C}$, K — замкнутое подмножество Ω и числа $A > 0$, $a \in (0, 1)$ такие, что*

$$\operatorname{dist}(z, \partial\Omega) \geq 2a \exp[-A|z|^\rho] \quad \forall z \in K.$$

Положим $\Omega' = \{z \in \Omega : \operatorname{dist}(z, \partial\Omega) \geq a \exp[-A(|z|^\rho + 2)]\}$. Тогда существуют числа $c > 0$ и функция $e(z) \in C^\infty(\mathbb{C})$ такие, что

$$0 \leq e(z) \leq 1, \ z \in \mathbb{C}; \quad e(z) = 1, \ z \in K; \quad e(z) = 0, \ z \in \mathbb{C} \backslash \Omega';$$

$$\left|\frac{\partial e(z)}{\partial \bar{z}}\right| \le c \exp A|z|^\rho, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Доказательство. Пусть $\Omega_m = K \cap \{z : m-1 \le |z|^\rho \le m\}$, $m = 1, 2 \ldots$. Как обычно (см. например [7, теорема 1.4.1, формула (1.4.2)]), мы можем найти функции $e_m \in C^\infty(\mathbb{C})$, $m \ge 1$, такие, что

$$0 \le e(z) \le 1,\ z \in \mathbb{C}; \quad e_m(z) = 1,\ z \in \Omega_m;$$

$$e(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C} \backslash [\Omega'_m = \{y : \operatorname{dist}(y, \Omega_m) \le a e^{-3A} e^{-Am}\}];$$

$$\left|\frac{\partial e_m(z)}{\partial \bar{z}}\right| \le \tilde{c} a^{-1} e^{3A} e^{Am}, \quad z \in \mathbb{C},$$

где $\tilde{c}$ не зависит от a, A и m.

Пусть $z \in \Omega'_m$. Тогда $|z|^\rho + 2 \ge m$ и в силу последнего неравенства имеем

$$\left|\frac{\partial e_m(z)}{\partial \bar{z}}\right| \le \tilde{c} a^{-1} e^{5A} e^{A|z|^\rho}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Выберем $y \in \Omega_m$ такое, что $|y - z| \le a e^{-3A} e^{-Am}$. Тогда с учетом неравенств $|z|^\rho - 1 \le m$ и $|z|^\rho + 2 \ge |y|^\rho$ получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(z, \partial\Omega) \ge \operatorname{dist}(y, \partial\Omega) - |y - z| \ge 2a e^{-A|y|^\rho} - a e^{-3A} e^{-Am} \\ \ge 2a e^{-2A} e^{-A|z|^\rho} - a e^{-3A} e^{A} e^{-A|z|^\rho} = a e^{-2A} e^{-A|z|^\rho}.\end{aligned}$$

Таким образом, верно включение $\Omega'_m \subset \Omega'$, $m \ge 1$. Определим функцию $e(z)$ по формуле

$$e(z) = 1 - \prod_{m=1}^{\infty} (1 - e_m(z)).$$

Отметим, что в каждой точке $z \in \mathbb{C}$ отличны от единицы не более трех сомножителей этого произведения. С учетом доказанного выше легко видеть, что $e(z)$ удовлетворяет всем требованиям. Лемма доказана.

Построим специальное покрытие комплексной плоскости, которое нам понадобится при доказательстве основного результата данного параграфа.

Пусть $(f_1, \ldots, f_N)$ — система целых функций из $[\rho, \infty)$, имеющая слабый регулярный рост вдоль каждого луча $\{t\mu\}$ $(\mu \in S)$.

Положим $\tau = 2$, $r = 4$. Для каждого $\mu \in S$ найдем число $\delta = \delta_0(\mu)$, фигурирующее в определении 1. Из покрытия S совокупностью кружков $B(\mu, \delta_0(\mu)/2)$, $\mu \in S$, выделим конечное подпокрытие $B(\mu_l, \delta_l/2)$ (где $\delta_l = \delta_0(\mu_l)$), $l = 1, \ldots, l_0$. Согласно определению 1 для каждого $l = 1, \ldots, l_0$ мы можем выбрать последовательность $\{z_{k,l}\} \in E(\mu_l, \delta_l)$ и число $A_l > 0$ так, чтобы неравенство в этом определении было выполнено с заменами $\{z_k\}, A$ и δ соответственно на $\{z_{k,l}\}, A_l$ и δ_l. Нетрудно видеть, что для каждого $l = 1, \ldots, l_0$ найдутся $R_l > 0$, $l = 1, \ldots, l_0$, такие, что вне круга $B(0, R_l)$ угол, порожденный кружком $B(\mu_l, \delta_l/2)$, покрывался объединением $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B(z_{k,l}, 2\delta_l |z_{k,l}|)$.

Пусть $\Theta = \max\limits_{1 \le l \le l_0} A_l$. Через $U^i_{k,l}(d)$ обозначим открытое подмножество точек z круга $B(z_{k,l}, 2d\delta_l |z_{k,l}|)$, удовлетворяющих неравенству

$$\ln |f_i(z)/q_{4\delta_l}(z, z_{k,l}, \Lambda)| \ge -d\Theta |z|^\rho,$$

где $\Lambda = \{\lambda_j\}$ — общие нули функций $f_1, \dots, f_N$ с учетом кратностей. В силу выбора величин δ_l и A_l с учетом определения 1 для каждого $d \geq 1$ множества $\bigcup\limits_{i=1}^{N} U_{k,l}^i(d)$ и $B(z_{k,l}, 2d\delta_l|z_{k,l}|)$ совпадают. Пусть $R_0 \geq \max\limits_{1\leq l\leq l_0} R_l$. По построению объединение всех кругов $B(z_{k,l}, 2\delta_l|z_{k,l}|)$ содержит множество $\mathbb{C}\backslash B(0, R_0)$. Пусть μ_0 — произвольная точка из $S \subset B(0, R_0)$ (можно считать $R_0 > 1$), не совпадающая ни с одним из общих нулей λ_j. Очевидно, найдется число $\Theta' > 0$ такое, что

$$\max_{1\leq i\leq N} \ln|f_i(z)/q_{4R_0}(z, \mu_0, \Lambda)| \geq -\Theta' \quad \forall z \in B(0, 2R_0).$$

Для каждого $i = 1, \dots, N$ через $U_0^i(d)$ обозначим подмножество точек z круга $B(0, 2dR_0)$ таких, что

$$\ln|f_i(z)/q_{4R_0}(z, \mu_0, \Lambda)| \geq -d\Theta'.$$

Тогда, как и выше, для любого $d \geq 1$ круг $B(0, 2dR_0)$ совпадает с объединением $\bigcup\limits_{i=1}^{N} U_0^i(d)$. Положим

$$V_i(d) = U_0^i(d) \cup \left[\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{l=1}^{l_0} U_{k,l}^i(d)\right].$$

Таким образом, для каждого $d \geq 1$ построено открытое покрытие плоскости $V_1(d), \dots, V_N(d)$.

Лемма 3. *Существуют положительные постоянные $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ такие, что для каждого номера $i = 1, \dots, N$ и любого $z \in V_i(1)$ верна оценка*

$$\operatorname{dist}(z, \partial V_i(2)) \geq \tilde{a} \exp[-\tilde{b}|z|^\rho], \quad z \in \mathbb{C}.$$

Доказательство. Требуемую оценку достаточно доказать лишь для больших по модулю точек z. Поэтому согласно сказанному выше можно считать, что для некоторых $k = 1, 2, \dots$ и $l = 1, \dots, l_0$ множество $U_{k,l}^i(1)$ содержит z. Положим

$$\psi_{k,l}^i(y) = f_i(y)/q_{4\delta_l}(y, z_{k,l}, \Lambda).$$

Из неравенства (2) и первого неравенства в (4) следует, что

$$\ln\left|\psi_{k,l}^i(y)\right| \leq D|y|^\rho + D_1 \quad \forall y \in \partial B(z_{k,l}, 8\delta_l|z_{k,l}|).$$

Тогда по принципу максимума для любого $y \in B(z_{k,l}, 8\delta_l|z_{k,l}|)$

$$\ln\left|\psi_{k,l}^i(y)\right| \leq D(1 + 8\delta_l)^\rho|z_{k,l}|^\rho + D_1.$$

Очевидно, $\delta_l|z_{k,l}| > 1$ при больших k. Тогда, представляя производную $(\psi_{k,l}^i)'(y)$ интегралом Коши по единичной окружности с центром в точке y, найдем, что для некоторого $D_2 > 0$, не зависящего от k и l, имеет место оценка

$$\ln\left|\left(\psi_{k,l}^i\right)'(y)\right| \leq D(1 + 8\delta_l)^\rho|z_{k,l}|^\rho + D_2 \quad \forall y \in B(z_{k,l}, 7\delta_l|z_{k,l}|).$$

Поскольку $z \in U_{k,l}^i(1) \subseteq B(z_{k,l}, 2\delta_l|z_{k,l}|)$, из формулы первообразной следует, что

$$\left|\psi_{k,l}^i(z) - \psi_{k,l}^i(y)\right| \leq \exp\left[\frac{D(1 + 8\delta_l)^\rho}{D(1 - 2\delta_l)^\rho}|z|^\rho + D_2\right]|z - y|.$$

Пусть $y \in B(z, \tilde{a}\exp[-\tilde{b}|z|^\rho])$, где $\tilde{b} = D\frac{(1+8\delta_l)^\rho}{(1-2\delta_l)^\rho} + \frac{3}{2}\Theta$ (Θ — константа, полученная при построении множеств $V_1(d), \dots, V_N(d)$) и $\tilde{a} = \exp[-D_2]$. Тогда (при больших $|z|$) y лежит в круге $B(z_{k,l}, 4\delta_l|z_{k,l}|)$ и в силу последнего неравенства будет верна оценка

$$\left|\psi^i_{k,l}(y)\right| \geq \left|\psi^i_{k,l}(z)\right| - \exp\left[-\frac{3}{2}\Theta|z|^\rho\right], \quad y \in B(z, \tilde{a}\exp[-\tilde{b}|z|^\rho]).$$

Учитывая, что $z \in U^i_{k,l}(1)$, получим

$$\left|\psi^i_{k,l}(y)\right| \geq \exp[-\Theta|z|^\rho]\left(1 - \exp\left[-\frac{1}{2}\Theta|z|^\rho\right]\right), \quad y \in B(z, \tilde{a}\exp[-\tilde{b}|z|^\rho]).$$

По предположению мы взяли z по модулю достаточно большим, тогда можно сказать, что для таких z и $y \in B(z, \tilde{a}\exp[-\tilde{b}|z|^\rho])$ выполнены следующие неравенства:

$$|z| \leq |y| + \tilde{a}\exp[-\tilde{b}|z|^\rho] \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{\rho}} |y|,$$

$$1 - \exp\left[-\frac{\Theta}{2}|z|^\rho\right] \geq \exp\left[-\frac{\Theta}{2}|z|^\rho\right] \geq \exp\left[-\frac{2\Theta}{3}|y|^\rho\right].$$

Из последних трех неравенств получаем

$$\ln\left|\psi^i_{k,l}(y)\right| \geq -2\Theta|y|^\rho \quad \forall y \in B(z, \tilde{a}\exp[-\tilde{b}|z|^\rho]).$$

Таким образом, согласно определению множества $U^i_{k,l}(2)$ круг $B(z, \tilde{a}\exp[-\tilde{b}|z|^\rho])$ лежит в нем, а следовательно, и в $V_i(2)$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Существует разбиение единицы $E_i \in C^\infty(\mathbb{C})$, $i = 1, \dots, N$, соответствующее покрытию $V_1(2), \dots, V_N(2)$ комплексной плоскости (т. е. E_i равна нулю в окрестности границы множества $V_i(2)$ и вне него), такое, что для некоторых $\tilde{c}, \tilde{d} > 0$ выполнены неравенства*

$$\ln|\partial E_i(z)/\partial\bar{z}| \leq \tilde{c}|z|^\rho + \tilde{d}, \quad z \in \mathbb{C}, \ i = 1, \dots, N.$$

Доказательство. Введем множество

$$\Omega_i = \bigcup_{z \in V_i(1)} B(z, \tilde{a}\exp[-\tilde{b}|z|^\rho]),$$

где $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ — положительные постоянные, существование которых утверждается в лемме 3. Для каждого $i = 1, \dots, N$ через $e_i(z)$ обозначим функцию, построенную в лемме 2 для множеств $\Omega = \Omega_i$, $K = \overline{V}_i(1)$ и чисел $A = \tilde{b}$, $a = \tilde{a}/2$. Положим теперь

$$E_i(z) = e_i(z)\left(\sum_{j=1}^N e_j(z)\right)^{-1}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Согласно лемме 2 $e_i(z)$ неотрицательны. Поэтому $E_i(z) \geq 0$ для всех z. По построению $E_i(z) \leq 1$ для любого z и $\sum E_i(z) \equiv 1$. По лемме 2 $e_i(z)$ равна нулю в окрестности границы множества $V_i(2)$ и вне него. Таким образом, $E_i(z)$ является разбиением единицы, соответствующим покрытию $V_i(2)$, $i = 1, \dots, N$.

По лемме 2 функция $e_i(z)$ ограничена сверху единицей в $\mathbb{C}$ и равна единице на $V_i(1)$. Кроме того, множества $V_i(1)$, $i = 1, \dots, N$, покрывают в совокупности всю комплексную плоскость. Следовательно, имеет место неравенство

$$1 \leq \sum_{i=1}^{N} e_i(z) \leq N \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Но тогда

$$\left|\frac{dE_i(z)}{d\bar{z}}\right| \leq N \sum_{i=1}^{N} \left|\frac{de_i(z)}{d\bar{z}}\right|.$$

Отсюда с учетом оценки на производную $e_i(z)$ в лемме 2 получаем неравенство нашей леммы.

Для последовательности $\Lambda = \{\lambda_j\}$ общих нулей с учетом кратностей функций $f_1, \dots, f_N \in [\rho, \infty)$ определим функцию $f(z)$ по формуле

$$f(z) = z^{m_0} \prod_{j=1, \lambda_j \neq 0} \left(1 - \frac{z}{\lambda_j}\right) \exp\left(\frac{z}{\lambda_j} + \dots + \frac{z^p}{p\lambda_j^p}\right), \quad z \in \mathbb{C},$$

где m_0 — кратность общего нуля $z = 0$ функций $f_1, \dots, f_N$ (возможно, равная нулю) и p — наименьшее целое число, удовлетворяющее условию

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_j|^{p+1}} < \infty.$$

Поскольку точки λ_j, $j = 1, 2, \dots$, являются нулями (частью нулей) целой функции порядка (не выше) ρ и конечного типа (при порядке ρ) (скажем, f_1), то (см. [6]) наше произведение сходится во всей плоскости и представляет собой целую функцию. Кроме того, $f(z)$ обращается в нуль только в точках λ_j. Для всех $k = 1, 2, \dots$ и $l = 1, \dots, l_0$ положим

$$\psi_{k,l}(z) = \begin{cases} \ln|f(z)|, & z \notin B(z_{k,l}, 8\delta_l|z_{k,l}|), \\ \max\{\ln|f(z)|, \ln|f(z)/q_{4\delta_l}(z, z_{k,l}, \Lambda)|\}, & z \in B(z_{k,l}, 8\delta_l|z_{k,l}|). \end{cases}$$

Пусть также

$$\psi_0(z) = \begin{cases} \ln|f(z)|, z \notin B(\mu_0, 8R_0), \\ \max\{\ln|f(z)|, \ln|f(z)/q_{4R_0}(z, \mu_0, \Lambda)|\}, \quad z \in B(\mu_0, 8R_0). \end{cases}$$

Функции $\psi_{k,l}$, ψ_0 субгармоничны в $\mathbb{C}$. Действительно, при наличии у них полунепрерывности сверху их субгармоничность следует из очевидного выполнения интегрального неравенства для субгармонических функций в каждой точке из $\mathbb{C}$ (поскольку это неравенство выполнено для субгармонических функций, через которые определяются $\psi_{k,l}$, ψ_0). Полунепрерывность же функций $\psi_{k,l}$, ψ_0 требует проверки лишь соответственно на границах кругов $B(z_{k,l}, 8\delta_l|z_{k,l}|)$ и $B(\mu_0, 8R_0)$.

Необходимая нам полунепрерывность сверху легко вытекает из неравенства

$$\ln|f(z)| \geq \ln|f(z)/q_\delta(z, z_0, \Lambda)|,$$

выполненного согласно (2) для всех $z_0 \neq \lambda_j$, $j = 1, 2, \dots,$, и $\delta > 0$ на границе круга $B(z_0, 2\delta|z_0|)$. Положим теперь

$$\psi(z) = \sup\{\psi_0(z), \psi_{k,l}(z)\}, \quad z \in \mathbb{C},$$

где супремум берется по всевозможным значениям индексов k и l. Функция $\psi(z)$ субгармонична в $\mathbb{C}$, поскольку на самом деле в окрестности каждой точки $z \in \mathbb{C}$ представляет собой максимум лишь конечного числа субгармонических функций. Остальные функции там совпадают, так как некоторая окрестность каждой точки из $\mathbb{C}$ пересекается лишь с конечным числом кругов $B(z_{k,l}, 8\delta_l|z_{k,l}|)$.

По построению в каждой точке $z \in B(\mu_0, 8R_0)$ выполнено неравенство

$$\psi(z) \geq \psi_0(z) \geq \ln|f(z)/q_{4R_0}(z, \mu_0, \Lambda)|.$$

Согласно определению функций $f(z)$ и $q_{4R_0}(z, \mu_0, \Lambda)$ их частное не имеет нулей в $B(\mu_0, 8R_0)$. Поскольку круг $B(0, R_0)$ компактно содержится в $B(\mu_0, 8R_0)$, в силу последнего неравенства функция ограничена снизу на $B(0, R_0)$.

Лемма 5. *Существует $D_2 > 0$ такое, что для каждого $i = 1, \dots, N$ выполнено неравенство*

$$\ln|f_i(z)/f(z)| + \psi(z) \leq D_2|z|^\rho + D_1,$$

где D_1 то же, что и в неравенствах (4).

Доказательство. Достаточно показать, что требуемое неравенство верно, если ψ заменить какой-либо функцией из семейства $\{\psi_{k,l}, \psi_0\}$. Пусть $\psi = \psi_0$. Очевидно, что необходимая оценка требует доказательства лишь в точках z с достаточно большим модулем. Для таких z имеет место неравенство $\psi_0(z) = \ln|f(z)|$. С учетом первого неравенства в (4) получаем

$$\ln|f_i(z)/f(z)| + \psi_0(z) = \ln|f_i(z)| \leq D|z|^\rho + D_1.$$

Пусть теперь $\psi = \psi_{k,l}$. Случай, когда $\psi_{k,l}(z) = \ln|f(z)|$, уже рассмотрен. Поэтому можно считать, что $z \in B(z_{k,l}, 8\delta_l|z_{k,l}|)$ и $\psi_{k,l}(z) = \ln|f(z)/q_{4\delta_l}(z, z_{k,l}, \Lambda)|$. Из (2), (4) и принципа максимума следует, что

$$\ln|f_i(z)/f(z)| + \psi_{k,l}(z) \leq D(1 + 8\delta_l)^\rho|z_{k,l}|^\rho + D_1.$$

Используя неравенство $(1 - 8\delta_l)|z_{k,l}| \leq |z|$, получим

$$\ln|f_i(z)/f(z)| + \psi_{k,l}(z) \leq D\frac{(1 + 8\delta_l)^\rho}{(1 - 8\delta_l)^\rho}|z|^\rho + D_1.$$

Полагая $D_2 = D(1+8\delta_l)^\rho(1-8\delta_l)^{-\rho}$, приходим к требуемому неравенству. Лемма доказана.

Мы все подготовили для того, чтобы перейти к формулировке и доказательству основного результата данного параграфа.

Теорема 1. *Рассмотрим функции $f_1, \dots, f_N$, принадлежащие $[\rho, \infty)$ и имеющие общее нулевое множество $\Lambda = \{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$. Пусть система $(f_1, \dots, f_N)$ имеет в $\mathbb{C}$ слабый регулярный рост вдоль каждого луча $\{t\mu\}$ ($\mu \in S$). Тогда для любой функции $F \in [\rho, \infty)(\Lambda)$ можно найти $g_1, \dots, g_N \in [\rho, \infty)$ такие, что*

$$F(z) = f_1(z)g_1(z) + \dots + f_N(z)g_N(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Доказательство. Ниже мы используем обозначения, введенные при построении покрытия $V_1(2), \dots, V_N(2)$.

Так как $F \in [\rho, \infty)$, существуют положительные постоянные a и b такие, что

$$\ln|F(z)| \leq a|z|^\rho + b, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{11}$$

Для каждого $i = 1, \dots, N$ функции $g_i(z)$ будем искать в виде (см. [1, добавление])

$$g_i = \frac{E_i F}{f_i} + \sum_{j=1}^{N} v_{ij} \frac{f_j}{f},$$

где $E_1, \dots, E_N$ — функции, существование которых утверждается в лемме 4, построенные по покрытию комплексной плоскости $V_1(2), \dots, V_N(2)$, а v_{ij} — неизвестные функции, от которых мы потребуем, чтобы они удовлетворяли условиям $v_{ij} = -v_{ji}$, $v_{ii} \equiv 0$, с тем, чтобы автоматически получить тождество

$$f_1 g_1 + \dots + f_N g_N \equiv F.$$

Для аналитичности функций g_i необходимо, чтобы выполнялось тождество $dg_i/d\bar{z} \equiv 0$, которое означает, что функции v_{ij} должны удовлетворять условию

$$\frac{\partial E_i}{\partial \bar{z}} \frac{F}{f_i} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial v_{ij}}{\partial \bar{z}} \frac{f_j}{f} = 0.$$

Полученное выше равенство будет иметь место, например, если

$$\frac{\partial v_{ij}}{\partial \bar{z}} = \frac{E_i F f}{f_i f_j} \frac{\partial E_j}{\partial \bar{z}} - \frac{E_j F f}{f_i f_j} \frac{\partial E_i}{\partial \bar{z}}, \tag{12}$$

как легко проверить непосредственно, используя тождества

$$E_1 + \dots + E_n \equiv 1, \quad \frac{\partial E_1}{\partial \bar{z}} + \dots + \frac{\partial E_N}{\partial \bar{z}} \equiv 0.$$

Мы сначала решим каждое из уравнений

$$\frac{dw_{ij}}{d\bar{z}} = \frac{E_i F f}{f_i f_j} \frac{dE_j}{d\bar{z}},$$

а затем положим $v_{ij} = w_{ij} - w_{ji}$, так что автоматически $v_{ij} = -v_{ji}$.

Оценим правую часть нашего уравнения. Рассмотрим случай, когда $z \in \mathbb{C} \backslash B(0, R_0)$. Найдутся индексы $k = k(z)$, $l = l(z)$, для которых $z \in B(z_{k,l}, 2\delta_l |z_{k,l}|)$. Тогда с учетом определения функций ψ, $E_1, \dots, E_n$, множеств $V_1(2), \dots, V_N(2)$, леммы 4 и неравенства (11) получаем

$$\begin{aligned}\ln\left|\frac{E_i(z)F(z)f(z)}{f_i(z)f_j(z)} \frac{\partial E_j(z)}{\partial \bar{z}}\right| &\le \ln\left|\frac{E_i(z) \frac{F(z)}{q_{4\delta_l}(z, z_{k,l}, \Lambda)} \frac{f(z)}{q_{4\delta_l}(z, z_{k,l}, \Lambda)}}{\frac{f_i(z)}{q_{4\delta_l}(z, z_{k,l}, \Lambda)} \frac{f_j(z)}{q_{4\delta_l}(z, z_{k,l}, \Lambda)}} \frac{\partial E_j(z)}{\partial \bar{z}}\right| \\ &\le \left(4\Theta + a\frac{(1+8\delta)^\rho}{(1-2\delta)^\rho} + \tilde{c}\right)|z|^\rho + \psi(z) + b + \tilde{d}.\end{aligned}$$

Аналогично, когда $z \in B(0, R_0)$, имеем

$$\ln\left|\frac{E_i(z)F(z)f(z)}{f_i(z)f_j(z)} \frac{\partial E_j(z)}{\partial \bar{z}}\right| \le \left(4\Theta' + a\frac{(1+8\delta)^\rho}{(1-2\delta)^\rho} + \tilde{c}\right)|z|^\rho + \psi(z) + b + \tilde{d}.$$

Следовательно, существуют константы $\widetilde{A}$, $\widetilde{B} > 0$ такие, что

$$\left|\frac{\partial v_{ij}}{\partial \bar{z}}(z)\right| \le \widetilde{A} \exp[\widetilde{B}|z|^\rho + 2\psi(z)], \quad z \in \mathbb{C}.$$

Из этого неравенства уже нетрудно получить, что

$$\int\limits_{\mathbb{C}} \left|\frac{\partial v_{ij}}{\partial \bar z}(z)\right|^2 \exp[-2((\widetilde{B}+1)|z|^\rho + 2\psi(z))]\, d\sigma < \infty.$$

Поэтому согласно теореме 4.4.2 в [7] существует решение v_{ij} уравнения (12), удовлетворяющее неравенству

$$\int\limits_{\mathbb{C}} |v_{ij}(z)|^2 \exp[-2((\widetilde{B}+2)|z|^\rho + 2\psi(z))]\, d\sigma < \infty.$$

Тогда с учетом леммы 5 верна оценка

$$\int\limits_{\mathbb{C}} \left|v_{ij}(z)\frac{f_j(z)}{f(z)}\right|^2 \exp[-2(\widetilde{B}+D_2+2)|z|^\rho]\, d\sigma < \infty.$$

С другой стороны, нетрудно показать, что

$$\int\limits_{\mathbb{C}} \left|\frac{E_i(z)F(z)}{f_i(z)}\right|^2 \exp\left[-2\left(2\widetilde{\Theta} + a\frac{(1+8\delta)^\rho}{(1-4\delta)^\rho}+1\right)|z|^\rho\right] d\sigma < \infty,$$

где $\widetilde{\Theta} = \max\{\Theta, \Theta'\}$. Теперь, используя неравенство Коши — Буняковского для интегралов и полученные выше оценки, уже нетрудно получить, что

$$\int\limits_{\mathbb{C}} |g_i(z)|^2 \exp[-2C|z|^\rho]\, d\sigma < \infty,$$

где C — некоторая положительная постоянная. Отсюда, применяя неравенство о среднем для субгармонических функций и неравенство Коши — Буняковского, при $|y| \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned} |g_i(y)| \leq c \int\limits_{B(y,1)} |g_i(z)|\, d\sigma &\leq c\Bigg[\int\limits_{B(y,1)} |g_i(z)|^2 \exp[-2C|z|^\rho]\, d\sigma\Bigg]^{\frac{1}{2}} \exp[C|z|^\rho] \\ &\leq c_1 \exp[C|z|^\rho] \leq c_1 \exp[C(|y|+1)^\rho] \leq c_1 \exp[2^\rho C|y|^\rho], \end{aligned}$$

где $c_1 > 0$ не зависит от y. При $|y| < 1$ такая оценка, очевидно, выполнена в силу непрерывности (возможно, с другой константой c_1). Теорема доказана.

§ 4. Необходимые условия представления

Теорема 2. *Рассмотрим $f_1, \dots, f_N \in [\rho, \infty)$, и пусть $\Lambda = \{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ — их общее нулевое множество. Пусть для любой функции $F \in [\rho,\infty)(\Lambda)$ существуют $g_1, \dots, g_N \in [\rho, \infty)$ такие, что*

$$F(z) = f_1(z)g_1(z) + \dots + f_N(z)g_N(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Тогда система $(f_1, \dots, f_N)$ имеет слабый регулярный рост вдоль каждого луча $t\mu$ ($\mu \in S$).

Доказательство. Пусть $\mu_0 \in S$. Для того чтобы доказать слабую регулярность роста системы функций $(f_1, \dots, f_N)$ вдоль луча $t\mu_0$, согласно определению 2 необходимо показать существование $\tilde\delta_0 > 0$, удовлетворяющего условию: для любого $\delta \in (0, \tilde\delta_0]$ должны существовать $r_0 = r_0(\delta, \mu_0) > 0$ и $C =$

$C(\delta,\mu_0) > 0$ такие, что для всех $z_0 \in \{t\mu, t>0\}$, $z_0 \notin \bigcup\limits_{i=1}^{N} \Lambda_i$, $|z_0| \ge r_0$, для любого индекса $1 \le p \le N$ и для всех $\lambda_l^p \in \Lambda_p \cap B(z_0, \delta|z_0|)$ выполнено неравенство

$$\max_{1\le i\le N} \ln\bigl|q_\delta\bigl(\lambda_l^p, z_0, \Lambda_i\bigr)\bigr| \ge -C|z_0|^\rho.$$

Предположим, что это неверно. Тогда для любого $\tilde\delta_0 > 0$, в частности для $\tilde\delta_0 < 1/4$, существуют $\delta \in (0, \tilde\delta_0]$, последовательности $\{C_m\}$, $C_m \to +\infty$, $\{z_m\}$, $z_m \in \{t\mu_0, t>0\}$, $\{p_m\}$, $1 \le p_m \le N$, $\{l_m\}$ и $\{\lambda_{l_m}^{p_m}\}$, $\lambda_{l_m}^{p_m} \in \Lambda_{p_m} \cap B(z_m, \delta|z_m|)$ такие, что

$$\max_{1\le i\le N} \ln\bigl|q_\delta(\lambda_{l_m}^{p_m}, z_m, \Lambda_i)\bigr| < -C_m|z_m|^\rho, \quad m=1,2,\dots. \tag{14}$$

Переходя к подпоследовательности, можно считать, что

$$|z_m| > \frac{(1+\delta)(1+3\delta)}{(1-3\delta)}|z_{m-1}|, \quad m=1,2,\dots.$$

По последовательности $\{\lambda_{l_m}^{p_m}\}_{m=1}^\infty$ построим последовательность $\Gamma = \{\gamma_j\}_{j=1}^\infty$. Пусть ρ не целое. Тогда выберем элементы последовательности Γ таким образом, чтобы для каждого $m=1,2,\dots$ выполнялись следующие соотношения:

$$\gamma_m \in B(z_m, \delta|z_m|); \quad \bigl|\lambda_{l_m}^{p_m} - \gamma_m\bigr| \ge \delta|z_m|/2.$$

В случае целого ρ для каждого $m=1,2,\dots$ положим

1) $\gamma_{2m-1} \in B(z_m, \delta|z_m|)$ и $\bigl|\lambda_{l_m}^{p_m} - \gamma_{2m-1}\bigr| \ge \delta|z_m|/2$;

2) $\gamma_{2m} = \xi\gamma_{2m-1}$,

где ξ — комплексное число, удовлетворяющее условиям $|1-\xi| \ge 1$, $\xi^\rho = -1$.

Последовательность $\bigl\{\lambda_{l_m}^{p_m}\bigr\}$ является частью нулей целой функции из $[\rho,\infty)$ (в качестве такой, например, выступает произведение $f_1 f_2 \dots f_N$). Используя второе неравенство в (4), получим

$$\ln|f_1(z)\cdot f_2(z)\cdot \ldots \cdot f_N(z)| \le N\widetilde{D}|z|^\rho, \quad |z| \ge R.$$

Тогда по теореме 2.3 из [6, гл. I] имеет место оценка на верхнюю плотность последовательности $\bigl\{\lambda_{l_m}^{p_m}\bigr\}$:

$$\varlimsup_{m\to\infty} \frac{m}{|\lambda_{l_m}^{p_m}|} < N\widetilde{D}e\rho.$$

В силу выбора точек γ_j для каждого $m=1,2,\dots$ выполнены также неравенства

$$\bigl|\lambda_{l_m}^{p_m} - \gamma_j\bigr| \le 2\delta|z_m| < \frac{2\delta}{1-\delta}|\gamma_j|, \quad |\gamma_j| > (1-\delta)(1+\delta)^{-1}\bigl|\lambda_{l_m}^{p_m}\bigr|,$$

где $j=m$, когда ρ не целое, и $j=2m-1$ в случае целого ρ. Пусть ρ не целое. Тогда из последних неравенств вытекает

$$\varlimsup_{m\to\infty} \frac{m}{\gamma_m} < \frac{1-\delta}{1+\delta} \varlimsup_{m\to\infty} \frac{m}{|\lambda_{l_m}^{p_m}|} < \frac{(1-\delta)N\widetilde{D}e\rho}{1+\delta}.$$

В случае целого ρ каждому члену $\lambda_{l_m}^{p_m}$ последовательности $\bigl\{\lambda_{l_m}^{p_m}\bigr\}$ соответствуют два члена γ_{2m-1} и γ_{2m} последовательности Γ. В силу построения имеем $|\gamma_{2m}| = |\gamma_{2m-1}|$. Поэтому

$$\varlimsup_{j\to\infty} \frac{j}{\gamma_j} < \varlimsup_{m\to\infty} \frac{2m-1}{\gamma_{2m-1}} + \varlimsup_{m\to\infty} \frac{2m}{\gamma_{2m}} = 2\varlimsup_{m\to\infty} \frac{2m-1}{\gamma_{2m-1}} < \frac{2(1-\delta)N\widetilde{D}e\rho}{1+\delta}.$$

Кроме того, при целом ρ в силу определения последовательности Γ

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\Big|\rho^{-1}\sum_{|\gamma_j|<r}\gamma_j^{-\rho}\Big| = \overline{\lim_{r\to\infty}}\Big|\rho^{-1}\sum_{|\gamma_m|<r}(\gamma_{2m-1}^{-\rho}+\xi^{-\rho}\gamma_{2m}^{-\rho})\Big| = 0.$$

Определим теперь целую функцию $\psi(z)$. Если ρ не целое, то положим $\psi(z) = f(z)$, где $f(z)$ определена по общим нулям функций $f_1,\dots,f_N$ перед теоремой 3. В противном случае определим ψ по формуле

$$\psi(z) = z^{m_0}\prod_{j=1}\Big(1-\frac{z}{\hat\lambda_j}\Big)\exp\Big(\frac{z}{\hat\lambda_j}+\dots+\frac{z^p}{p\hat\lambda_j^{\,p}}\Big),$$

где m_0 — кратность нуля $z = 0$ у функции $f(z)$ и последовательность $\{\hat\lambda_j\}$ строится по нулевому множеству $\Lambda = \{\lambda_j^i\}$ функции $f(z)$ следующим образом: для всех $j = 1, 2, \dots$ таких, что $\lambda_j \ne 0$, выполнены следующие условия:

1) $\hat\lambda_{2j-1} = \lambda_j$;

2) $\hat\lambda_{2j} = \xi\lambda_j$, где ξ то же, что и выше.

Рассуждая, как выше, получим, что неравенство

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\frac{j}{|\hat\lambda_j|} < \widetilde{D}e\rho$$

выполнено как в случае целого, так и нецелого ρ и, кроме того, при ρ целом справедливо следующее равенство:

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\Big|\rho^{-1}\sum_{|\hat\lambda_j|<r}\hat\lambda_j^{-\rho}\Big| = 0.$$

С учетом изложенного выше по теоремам 7 и 15 из [8, гл. I] функция

$$F(z) = \psi(z)\prod_{j=1}^{\infty}\Big(1-\frac{z}{\gamma_j}\Big)\exp\Big(\frac{z}{\gamma_j}+\dots+\frac{z^n}{n\gamma_j^n}\Big)$$

принадлежит $[\rho,\infty)$, здесь n — наименьшее целое число, удовлетворяющее условию

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|\gamma_j|^{n+1}} < \infty.$$

По теореме об оценке снизу на окружностях целой функции конечного порядка и типа (см. [6, гл. I, теорема 4.3]) найдем последовательность $\{\alpha_k\} \in E(\mu_0,\delta)$ и число $A > 0$ такие, что

$$\ln|F(\alpha_k)| \ge -A|\alpha_k|^\rho, \quad k = 1, 2, \dots. \tag{15}$$

Существует подпоследовательность $\{k_m\}$ такая, что круг $B(\alpha_{k_m}, 3\delta|\alpha_{k_m}|)$ содержит в себе $B(z_m,\delta|z_m|)$, причем круги $B(\alpha_{k_{m-1}}, 3\delta|\alpha_{k_{m-1}}|)$ и $B(\alpha_{k_m}, 3\delta|\alpha_{k_m}|)$ не пересекаются (здесь подразумевается, что подпоследовательность $\{k_m\}$ возрастающая). В самом деле, для каждого z_m найдутся $\alpha_{k_{m,1}}, \alpha_{k_{m,2}} \in \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которых

$$|\alpha_{k_{m,1}}| \le |z_m| < |\alpha_{k_{m,2}}|.$$

Положим α_{k_m} равным $\alpha_{k_{m,1}}$. Получим

$$|\alpha_{k_m}| < (1+\delta)|\alpha_{k_{m,1}}| < (1+\delta)|z_m|.$$

Тогда с учетом условия, наложенного на последовательность $\{z_m\}$, легко вывести, что
$$(1+3\delta)|\alpha_{k_{m-1}}| < (1-3\delta)|\alpha_{k_m}|.$$
Значит, круги $B(\alpha_{k_{m-1}}, 3\delta|\alpha_{k_{m-1}}|)$ и $B(\alpha_{k_m}, 3\delta|\alpha_{k_m}|)$ не пересекаются.

Для каждого $m = 1, 2, \dots$ положим
$$\varphi_m^0(z) = F(z)\,[q_{3\delta}(z, \alpha_{k_m}, \Lambda) q_{3\delta}(z, \alpha_{k_m}, \Gamma)]^{-1},$$
$$\varphi_m^i(z) = f_i(z)\,[q_{3\delta}(z, \alpha_{k_m}, \Lambda) q_{3\delta}(z, \alpha_{k_m}, \Lambda_i)]^{-1}, \quad i = 1, \dots, N.$$
Очевидно, φ_m^0, φ_m^i, $i = 1, \dots, N$, являются целыми функциями, не имеющими нулей в круге $B(\alpha_{k_m}, 3\delta|\alpha_{k_m}|)$. Кроме того, в силу неравенства (15) получим
$$\ln\bigl|\varphi_m^0(\alpha_{k_m})\bigr| \geq -A|\alpha_{k_m}|^\rho, \quad m = 1, 2, \dots.$$
Из (2), (4), (15) и принципа максимума следует, что для всех $i = 0, \dots, N$ и $z \in B(\alpha_{k_m}, 3\delta|\alpha_{k_m}|)$ существуют $a > 0$ и $m_1 \geq 1$, для которых выполнены неравенства
$$\ln\bigl|\varphi_m^i(z)\bigr| \leq a|\alpha_{k_m}|^\rho, \quad m \geq m_1.$$
Из последних двух неравенств, как и в предложении из § 2, уже нетрудно получить оценку
$$\ln\left|\frac{\varphi_m^0(z)}{\varphi_m^0(\alpha_{k_m})}\right| \geq -b|z|^\rho, \quad z \in B(\alpha_{k_m}, 2\delta|\alpha_{k_m}|),\ m \geq m_1,$$
где b — некоторая положительная постоянная. Тогда для каждого $m \geq m_1$ имеем
$$\left|\frac{F\bigl(\lambda_{l_m}^{p_m}\bigr)}{q_{3\delta}\bigl(\lambda_{l_m}^{p_m}, \alpha_{k_m}, \Lambda\bigr)}\right| = \bigl|q_{3\delta}\bigl(\lambda_{l_m}^{p_m}, \alpha_{k_m}, \Gamma\bigr)\bigr| \left|\frac{\varphi_m^0\bigl(\lambda_{l_m}^{p_m}\bigr)}{\varphi_m^0(\alpha_{k_m})}\right| |\varphi_m^0(\alpha_{k_m})|$$
$$\geq \exp\bigl[-(bA/2)\bigl|\lambda_{l_m}^{p_m}\bigr|^\rho\bigr].$$

По условию теоремы $g_1, \dots, g_N \in [\rho, \infty)$, значит, существует $m_2 \geq m_1$ такое, что при $m \geq m_2$ справедливы неравенства
$$|g_i(z)| \leq \exp[\tilde{a}|z|^\rho], \quad z \in B(\alpha_{k_m}, 2\delta|\alpha_{k_m}|), \quad i = 1, \dots, N.$$

Теперь положим в равенстве (13) z равным $\lambda_{l_m}^{p_m}$ и поделим обе его части на $q_{3\delta}(\lambda_{l_m}^{p_m}, \alpha_{k_m}, \Lambda)$. Применяя ранее полученные оценки, имеем
$$N\exp[-(C_m - \tilde{a} - a(1-2\delta)^{-\rho})|\lambda_{l_m}^{p_m}|^\rho] > \sum_{i=1}^N |q_{3\delta}(\lambda_{l_m}^{p_m}, \alpha_{k_m}, \Lambda_i)|$$
$$\geq \exp[-(bA/2)|\lambda_{l_m}^{p_m}|^\rho], \quad m \geq m_2.$$
Очевидно, для всех m, больших некоторого m_3,
$$C_m - \tilde{a} - a(1-2\delta)^{-\rho} > (bA/2).$$
Получили противоречие. Таким образом, необходимым условием равенства (13) является слабая регулярность роста системы $(f_1, \dots, f_N)$ вдоль каждого луча $t\mu (\mu \in S)$. Теорема доказана.

Мы все подготовили для того, чтобы сформулировать основной результат данной работы.

Теорема 3. *Рассмотрим конечный набор функций $f_1, \dots, f_N \in [\rho, \infty)$, имеющих общее нулевое множество $\Lambda = \{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$. Идеал $I(f_1, \dots, f_N)$ совпадает с идеалом $[\rho, \infty)(\Lambda)$ в том и только в том случае, когда система $(f_1, \dots, f_N)$ имеет слабый регулярный рост вдоль каждого луча $t\mu$ $(\mu \in S)$.*

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 1, а необходимость — из теоремы 2. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p с приложением доказательства Волффа теоремы о короне. М.: Мир, 1984.

2. *Kellher J., Teylor B.* An application of the Corona theorem to some rings of entire functions // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73. P. 246–249.

3. *Напалков В. В.* Уравнения свертки в многомерных пространствах. М.: Наука, 1982.

4. *Hörmander L.* Generators for some rings of analytic functions // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73. P. 943–949.

5. *Кривошеев А. С.* Регулярность роста системы функций и системы неоднородных уравнений свертки в выпуклых областях комплексной плоскости // Изв. РАН. 2000. Т. 64, № 5. С. 69–132.

6. *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. М.: Наука, 1983.

7. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальный операторов с частными производными. I. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986.

8. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.

Статья поступила 17 июля 2001 г.

Кривошеев Александр Сергеевич, *Ганцев Сергей Николаевич*
Уфимский гос. авиационный технический университет,
кафедра специальных глав математики,
ул. К. Маркса, 12, Уфа 450000
gantsev@mail.rb.ru