Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2002. Том 43, № 5

УДК 514.13

О НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ, СВЯЗАННЫХ С ВЫПУКЛЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО

В. К. Ионин

Аннотация: Замкнутой выпуклой поверхности Φ пространства Лобачевского сопоставляются четыре специальные поверхности: вписанная и описанная сферы, сфера, свободно перекатывающаяся по внутренней стороне поверхности Φ, и эквидистантная поверхность, по внутренней стороне которой свободно перекатывается Φ. Находится точная зависимость между этими четырьмя специальными поверхностями.

Ключевые слова: выпуклая поверхность, сфера, эквидистантная поверхность

Из четырех теорем, сформулированных в заметке [1], две доказаны в [2], а две будут доказаны здесь. Настоящую статью можно читать независимо от [1].

1. Пусть E_K — n-мерное ($n \geq 2$, $K < 0$) пространство Лобачевского кривизны $K < 0$. Замкнутое подмножество этого пространства назовем *телом*, если оно является n-мерным многообразием с непустым краем. Множество $\Phi \subset E_K$ будем называть *поверхностью*, если оно является краем некоторого тела, обозначаемого в дальнейшем символом $T(\Phi)$. Таким образом, каждая поверхность есть полное ориентированное $(n-1)$-мерное многообразие, обращенное своей внутренней стороной к своему телу.

Следуя В. Бляшке [3, с. 136], будем говорить, что поверхность Φ *свободно перекатывается по внутренней стороне поверхности* Ψ, если для любых двух точек $X \in \Phi$ и $Y \in \Psi$ найдутся такая поверхность Φ' и такое изометрическое преобразование пространства E_K, которое переводит тело $T(\Phi)$ в тело $T(\Phi')$ так, что точка X переходит в точку Y и $T(\Phi') \subset T(\Psi)$.

2. *Специальными поверхностями* здесь называются следующие поверхности: сферы, орисферы, эквидистантные поверхности и гиперплоскости, причем ориентируются они так, чтобы соответствующие им тела были выпуклыми множествами. *Радиусом эквидистантной поверхности* α называется число $r > 0$, удовлетворяющее условию: существует такая гиперплоскость $\beta \subset T(\alpha)$, что расстояние от любой точки $X \in \alpha$ до β равно r. Следующие утверждения очевидны.

(а) Любая выпуклая поверхность свободно перекатывается по внутренней стороне любой ориентированной гиперплоскости.

(б) Если выпуклая поверхность свободно перекатывается по внутренней стороне какой-нибудь орисферы, то она свободно перекатывается по внутренней стороне любой орисферы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00194).

(в) Если $0 < r_1 < r_2$, то любая эквидистантная поверхность радиуса r_2 и любая сфера радиуса r_1 свободно перекатываются соответственно по внутренней стороне любой эквидистантной поверхности радиуса r_1 и любой сферы радиуса r_2.

3. *Выпуклой поверхностью* будем называть такую поверхность, тело которой является выпуклым множеством. Ясно, что все специальные поверхности выпуклы. Обозначим через V множество всех выпуклых поверхностей, гомеоморфных $(n-1)$-мерной сфере. Разобьем это множество на четыре непересекающихся подмножества V_1, V_2, V_3 и V_4 следующим образом.

(а) Поверхность принадлежит V_1, если и только если она свободно перекатывается по внутренней стороне какой-нибудь сферы.

(б) Поверхность принадлежит V_2, если и только если она не входит в V_1 и свободно перекатывается по внутренней стороне любой орисферы.

(в) Поверхность принадлежит V_3, если и только если она не входит в объединение $V_1 \cup V_2$ и свободно перекатывается по внутренней стороне какой-нибудь эквидистантной поверхности.

(г) $V_4 = V \backslash (V_1 \cup V_2 \cup V_3)$.

Пусть $\Phi \in V$. Если для любого $r > 0$ нельзя сказать, что сфера радиуса r свободно перекатывается по внутренней стороне поверхности Φ, то положим, что $\lambda(\Phi) = 0$. В противном случае можно легко доказать существование наибольшего числа $\lambda = \lambda(\Phi) > 0$, для которого верно утверждение: сфера радиуса λ свободно перекатывается по внутренней стороне поверхности Φ. Нетрудно доказать существование наибольшей сферы (обозначим ее радиус через $\Lambda(\Phi)$), принадлежащей телу $T(\Phi)$, и существование наименьшей сферы (обозначим ее радиус через $M(\Phi)$), тело которой содержит поверхность Φ. Будем говорить, что $\Lambda(\Phi)$ — *радиус сферы, вписанной в* Φ, а $M(\Phi)$ — *радиус сферы, описанной около* Φ. В статье [2] находятся все допустимые тройки $(\lambda(\Phi), \Lambda(\Phi), M(\Phi))$, когда Φ пробегает множество $V_1 \cup V_2$.

Пусть $\Phi \in V_1$ и $\Psi \in V_3$. Нетрудно доказать существование наименьшего числа $\mu = \mu(\Phi)$ и наибольшего числа $\nu = \nu(\Psi)$, для которых верно утверждение: поверхности Φ и Ψ свободно перекатываются по внутренней стороне соответственно сферы радиуса μ и эквидистантной поверхности радиуса ν. В статье [2] находятся все допустимые четверки $(\lambda(\Phi), \Lambda(\Phi), M(\Phi), \mu(\Phi))$, когда Φ пробегает множество V_1. Здесь будут доказаны следующие две теоремы.

Теорема 1. *Если $\Phi \in V_3$ и $\lambda = \lambda(\Phi)$, $\Lambda = \Lambda(\Phi)$, $M = M(\Phi)$, $\nu = \nu(\Phi)$, то при $0 < \nu \le \Lambda$*

$$0 \le \lambda \le \Lambda < M < +\infty, \quad 0 < \Lambda, \tag{1}$$

а при $\Lambda < \nu$

$$0 \le \lambda < \Lambda < M < +\infty, \tag{2}$$

$$\operatorname{sh} \sqrt{-K}(\nu - \lambda) \ge \operatorname{sh} \sqrt{-K}(\nu - \Lambda) \operatorname{ch} \sqrt{-K}(M - \lambda), \tag{3}$$

причем ни одно из этих неравенств не может быть усилено.

Теорема 2. *Если $\Phi \in V_4$ и $\lambda = \lambda(\Phi)$, $\Lambda = \Lambda(\Phi)$, $M = M(\Phi)$, то*

$$0 \le \lambda \le \Lambda < M < +\infty, \quad 0 < \Lambda,$$

причем ни одно из этих неравенств не может быть усилено.

Доказательство основной теоремы 1 приводится в пп. 4–8, а теорема 2 доказывается в п. 9.

4. Пусть $0 < \nu \leq \Lambda$. Так как в этом случае справедливость неравенств (1) не вызывает сомнений, будем доказывать только их точность, т. е. невозможность их усиления. Возможны только следующие три случая: (а) $\lambda = \Lambda = \nu$, (б) $\nu < \lambda = \Lambda$, (в) $\lambda < \Lambda$, $\nu \leq \Lambda$. Построение поверхности $\Phi \in V_3$, у которой $\nu = \nu(\Phi)$, а числа $\lambda = \lambda(\Phi)$, $\Lambda = \Lambda(\Phi)$ и $M = M(\Phi)$ удовлетворяют неравенствам (1), будем производить в каждом из этих трех случаев.

(а) Пусть S_1 и S_2 — две сферы радиуса Λ, у которых расстояние между центрами равняется $2(M - \Lambda)$. В качестве поверхности Φ можно взять границу пересечения тел всех эквидистантных поверхностей радиуса Λ, у которых тела содержат сферы S_1 и S_2.

(б) Проведем произвольно в пространстве E_K двумерную плоскость α и зафиксируем на ней две точки A и B на расстоянии $2(M - \Lambda)$ друг от друга. Проведем две окружности S_A и S_B радиуса Λ с центрами соответственно в точках A и B. Проведем прямые p и p_1 так, чтобы выполнялись условия: p проходит через точки A и B, p_1 проходит на расстоянии $\Lambda - \nu$ от каждой из точек A и B, прямые p и p_1 не имеют общих точек. Пусть A_1 и B_1 — точки прямой p_1, расстояние от которых соответственно до A и B равняется $\Lambda - \nu$. Отрезки $[A, A_1]$ и $[B, B_1]$ (здесь символом $[X, Y]$ обозначается отрезок с концами в точках X и Y), как легко видеть, перпендикулярны прямой p_1. Продолжим прямолинейно отрезок $[A, A_1]$ в обе стороны до пересечения с окружностью S_A в точках A_2 и A_3 так, чтобы $A_1 \in [A, A_2]$ и $A \in [A_1, A_3]$. Аналогично продолжим отрезок $[B, B_1]$ в обе стороны до пересечения с окружностью S_B в точках B_2 и B_3 так, чтобы $B_1 \in [B, B_2]$ и $B \in [B_1, B_3]$. Очевидно, что

$$\rho(A_1, A_2) = \rho(B_1, B_2) = \nu, \quad \rho(A_1, A_3) = \rho(B_1, B_3) = 2\Lambda - \nu,$$

где ρ — метрика пространства E_K.

Пусть p_2 — дуга с концами в точках A_2 и B_2 эквидистантны прямой p_1, а p_3 — дуга с концами в точках A_3 и B_3 эквидистанты той же прямой p_1. Ясно, что радиусы эквидистант p_2 и p_3 равны соответственно ν и $2\Lambda - \nu$, причем $\nu < 2\Lambda - \nu$. Определим точки A' и B' условиями $A' \in p \cap S_A$, $B' \in p \cap S_B$, $\rho(A', B') = 2M$. Пусть α' — дуга окружности S_A такая, что $A' \in \alpha'$, а точки A_2 и A_3 — ее концы; пусть β' — дуга окружности S_B такая, что $B' \in \beta'$, а точки B_2 и B_3 — ее концы. Очевидно, что прямая q, являющаяся общим перпендикуляром к прямым p и p_1, есть ось симметрии замкнутой выпуклой кривой $\gamma = \alpha' \cup p_2 \cup \beta' \cup p_3$. В качестве поверхности Φ можно взять поверхность, полученную вращением в пространстве E_K кривой γ вокруг прямой q.

(в) Зафиксируем произвольно число $\varepsilon \in (0, \Lambda - \lambda)$ и отметим в пространстве E_K на одной прямой три точки A, B и C так, чтобы B лежала между A и C и выполнялись равенства

$$\rho(A, B) = 2M - 2\Lambda - \varepsilon, \quad \rho(B, C) = \Lambda - \lambda + \varepsilon.$$

Проведем три сферы S_A, S_B и S_C так, чтобы их центры находились соответственно в точках A, B и C, а радиусы равнялись соответственно Λ, Λ и λ. Легко подсчитать, что число M — радиус наименьшего шара, содержащего множество $S_A \cup S_B \cup S_C$. Очевидно, что для достаточно малого ε в качестве поверхности Φ можно взять границу пересечения тел всех эквидистантных поверхностей радиуса ν, тела которых содержат множество $S_A \cup S_B \cup S_C$.

5. Начиная с этого пункта и до конца доказательства теоремы 1 имеет место неравенство $\Lambda < \nu$. Для простоты будем также предполагать (это, конечно, не ограничивает общности), что $K = -1$.

Пусть Φ — поверхность, удовлетворяющая условиям теоремы, A — центр сферы S, вписанной в Φ. Радиус этой сферы равен Λ. Пусть D — одна из самых далеких от A точек поверхности Φ. Проведем через D сферу s радиуса λ так, чтобы s принадлежала телу $T(\Phi)$. Ясно, что эта сфера определяется однозначно и ее центр находится в некоторой точке $B \in [A, D]$ на расстоянии λ от D. Ясно также, что если $\lambda = 0$, то сфера s вырождается в точку D, при этом $B = D$. Очевидно, что

$$M \leq M', \tag{4}$$

где $M' = \rho(A, D)$. Обозначим через Ψ границу пересечения тел всех эквидистантных поверхностей радиуса ν, тела которых содержат множество $s \cup S$. Ясно, что Ψ — поверхность вращения с осью симметрии, проходящей через точки A и B, и $T(\Psi) \subset T(\Phi)$.

6. Проведем произвольно через точки A и B двумерную плоскость α и введем обозначения $S_\alpha = \alpha \cap S$, $s_\alpha = \alpha \cap s$. Пересечение $\alpha \cap \Psi$ содержит две дуги эквидистант радиуса ν, одну из которых обозначим через α'. Пусть A' и B' — концы дуги α', причем $A' \in S_\alpha$, $B' \in s_\alpha$. Проведем прямую $a \subset \alpha$ так, чтобы расстояние от всех точек дуги α' до a равнялось ν. Прямые, проходящие через пары точек (A', A) и (B', B), пересекают прямую a соответственно в некоторых точках A'' и B''. Отрезки $[A', A'']$ и $[B', B'']$ перпендикулярны прямой a, так как они перпендикулярны эквидистанте α', причем $\rho(A', A'') = \rho(B', B'') = \nu$. Так как $\nu > \Lambda$, то A и B — внутренние точки отрезков $[A', A'']$ и $[B', B'']$ соответственно.

Предложение. *Если φ — величина угла при вершине A четырехугольника $ABB''A''$, то*

$$\varphi \geq \frac{\pi}{2}.$$

Доказательство. Если допустить, что $\varphi < \frac{\pi}{2}$, то тогда появится возможность немного сдвинуть сферу S по направлению к точке B, а затем передвинутую сферу слегка увеличить и получить новую сферу, которая находится внутри тела $T(\Psi)$, тем более внутри тела $T(\Phi)$, хотя ее радиус больше Λ.

7. В этом пункте оценим снизу длину отрезка $[B, B'']$ через длины отрезков $[A, A'']$ и $[A, B]$.

Так как $\rho(A, D) = M'$, $\rho(B, D) = \lambda$, $B \in [A, D]$, то $\rho(A, B) = M' - \lambda$. Проведем окружность C радиуса $M' - \lambda$ с центром в точке A. Она пройдет через точку B. Отметим на окружности C две точки B_1 и B_2 так, чтобы отрезок $[B_1, B_2]$ проходил через точку A перпендикулярно отрезку $[A, A'']$. Отметим на прямой a две точки B_1'' и B_2'' так, чтобы отрезки $[B_1, B_1'']$ и $[B_2, B_2'']$ были перпендикулярны прямой a. Очевидно, что эти отрезки имеют равные длины. Проведем через точку B_1 эквидистанту β относительно прямой a. Она пройдет, как легко видеть, через точку B_2. Так как кривизна любой эквидистанты строго меньше кривизны любой окружности, то, как нетрудно показать, любая эквидистанта и любая окружность пересекаются не более чем в двух точках. Таким образом, эквидистанта β пересекает окружность C только в точках B_1 и B_2. Эквидистанта β разбивает плоскость α на две открытые области α' и α'', одна из которых (обозначим ее через α'') содержит прямую a. Так как $\varphi \geq \frac{\pi}{2}$, в силу предложения п. 6, то точка B принадлежит полуокружности $C \cap \alpha'$ или совпадает с B_1. А поскольку расстояние от любой точки области α' больше $\rho(B_1, B_1'')$, то

$$\rho(B_1, B_1'') \leq \rho(B, B''). \tag{5}$$

Таким образом, задача свелась к оценке снизу величины $\rho(B_1, B_1'')$. Введем обозначения: θ — величина угла при вершине A'' треугольника AB_1A'', $p = \rho(A, A'')$, $q = \rho(A, B_1)$, $x = \rho(B_1, B_1'')$, $y = \rho(A'', B_1'')$, $z = \rho(B_1, A'')$. В этих обозначениях задача настоящего пункта заключается в оценке снизу величины x через p и q. Применив теорему Пифагора и теорему косинусов [4, с. 190], получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{ch} z = \operatorname{ch} p \operatorname{ch} q, \\ \operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y, \\ \operatorname{ch} q = \operatorname{ch} p \operatorname{ch} z - \operatorname{sh} p \operatorname{sh} z \cos\theta, \\ \operatorname{ch} x = \operatorname{ch} z \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} z \operatorname{sh} y \sin\theta. \end{cases} \tag{6}$$

Заменив $\operatorname{ch} z$ в двух последних уравнениях системы (6) соответственно на $\operatorname{ch} p \operatorname{ch} q$ и $\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y$, после элементарных преобразований получим

$$\operatorname{th} z \cos\theta = \operatorname{th} p, \quad \operatorname{th} z \sin\theta = \operatorname{th} y.$$

Сумма квадратов последних двух равенств приводит к уравнению

$$\operatorname{th}^2 z = \operatorname{th}^2 p + \operatorname{th}^2 y.$$

Из этого уравнения, так как

$$th^2 z = \frac{\operatorname{ch}^2 z - 1}{\operatorname{ch}^2 z} = \frac{\operatorname{ch}^2 p \operatorname{ch}^2 q - 1}{\operatorname{ch}^2 p \operatorname{ch}^2 q},$$

вытекает, что

$$\operatorname{th}^2 y = \frac{\operatorname{sh}^2 q}{\operatorname{ch}^2 p \operatorname{ch}^2 q}.$$

Далее, имеем

$$\operatorname{ch}^2 y = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2 y} = \frac{\operatorname{ch}^2 p \operatorname{ch}^2 q}{\operatorname{ch}^2 p \operatorname{ch}^2 q - \operatorname{sh}^2 q}.$$

Подставляя это значение $\operatorname{ch}^2 y$ в уравнение

$$\operatorname{ch}^2 p \operatorname{ch}^2 q = \operatorname{ch}^2 x \operatorname{ch}^2 y,$$

которое следует из первых двух уравнений системы (6), после элементарных преобразований, получим

$$\operatorname{sh} x = \operatorname{sh} p \operatorname{ch} q. \tag{7}$$

Итак, нам удалось найти точную зависимость x от p и q.

Так как $p = \nu - \Lambda$, $q = M' - \lambda$, $\rho(B, B'') = \nu - \lambda$, то, учитывая неравенства (4) и (5) и равенство (7), приходим к выводу, что неравенство (3) верно.

8. Осталось доказать, что для любой четверки чисел $(\lambda, \Lambda, M, \nu)$, удовлетворяющей неравенствам (2) и (3) (при условии, что $\Lambda < \nu$), существует поверхность $\Phi \in V_3$ такая, что $\lambda = \lambda(\Phi)$, $\Lambda = \Lambda(\Phi)$, $M = M(\Phi)$ и $\nu = \nu(\Phi)$.

В пространстве E_K фиксируем три точки A, B и C так, чтобы точка B была серединой отрезка $[A, C]$ длины $2(M - \lambda)$, и проведем три сферы S_A, S_B и S_C с центрами соответственно в точках A, B и C и радиусами λ, Λ и λ. Нетрудно показать, что в качестве поверхности Φ можно взять границу пересечения тел всех эквидистантных поверхностей радиуса ν, содержащих множество $S_A \cup S_B \cup S_C$. Теорема 1 доказана.

9. Доказательство теоремы 2. Так как неравенства теоремы очевидны, достаточно доказать только их точность, т. е. для произвольной тройки чисел, удовлетворяющей этим неравенствам, привести пример поверхности $\Phi \in V_4$, для которой $\lambda = \lambda(\Phi)$, $\Lambda = \Lambda(\Phi)$ и $M = M(\Phi)$.

В пространстве E_K зафиксируем произвольно две различные точки A, B и проведем через них произвольную двумерную плоскость α. Обозначим через t длину отрезка $[A, B]$. На плоскости α проведем две окружности S_A и S_B радиуса Λ с центрами соответственно в точках A и B. Проведем прямую $p \subset \alpha$ так, чтобы она касалась окружностей S_A и S_B (соответственно в точках A' и B') и чтобы точки A и B находились по одну сторону от прямой p. Зафиксируем точки $A'' \in S_A$ и $B'' \in S_B$ так, чтобы $A \in [A', A'']$ и $B \in [B', B'']$. Очевидно, что эти точки определяются однозначно. Соединим A'' и B'' дугой γ так, чтобы расстояние от каждой точки γ до прямой p равнялось 2Λ. Соединим A' с A'' и B' с B'' соответственно дугами $\gamma_A \subset S_A$ и $\gamma_B \subset S_B$ так, чтобы кривая $\gamma' = [A', B'] \cup \gamma_B \cup \gamma \cup \gamma_A$ была замкнутой выпуклой кривой. Проведем через середину отрезка $[A', B']$ перпендикулярно к p прямую q. Обозначим через Φ_t поверхность, полученную в результате вращения кривой γ' в пространстве E_K вокруг прямой q. Ясно, что $\Phi_t \in V_4$. Если $\lambda = \Lambda$, то, как легко видеть, в качестве поверхности Φ можно взять Φ_t при $t = 2(M - \Lambda)$.

Рассмотрим случай, когда $\lambda < \Lambda$. Положим, что $t = 2(M - \Lambda) - \varepsilon$, где $\varepsilon \in (0, 2(M - \Lambda))$. Подберем сферу S радиуса λ (если $\lambda = 0$, то S — одноточечное множество) так, чтобы радиус наименьшего шара, содержащего множество $S \cup \Phi_t$, равнялся M и чтобы центр сферы S находился в гиперплоскости, проходящей через точки A и B перпендикулярно прямой q. Ясно, что в качестве поверхности Φ можно взять границу выпуклой оболочки множества $S \cup \Phi_t$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ионин В. К.* О некоторых специальных поверхностях, связанных с выпуклыми поверхностями пространств постоянной кривизны // Докл. РАН. 2001. Т. 379, № 1. С. 22–23.
2. *Ионин В. К.* Неравенства между радиусами сфер, связанных с выпуклой поверхностью пространства постоянной кривизны // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 3. С. 561–566.
3. *Бляшке В.* Круг и шар. М.: Наука, 1967.
4. *Ефимов Н. В.* Высшая геометрия. М.: Наука, 1971.

Статья поступила 20 февраля 2002 г.

Ионин Владимир Кузьмич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
Vladimir_ionin@mtu-net.ru