Сибирский математический журнал
Июль—август, 2002. Том 43, № 4

УДК 515.17:517.545

ПЕРИОДЫ ГАРМОНИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ ПРИМА НА КОМПАКТНОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. В. Чуешев

Аннотация: Изучаются классы периодов замкнутых, гармонических и голоморфных дифференциалов Прима на компактной римановой поверхности любого рода $g \geq 2$ и для любых характеров ее фундаментальной группы. Доказывается, что гармоническое векторное расслоение Прима из гармонических дифференциалов Прима и когомологическое расслоение Ганнинга будут вещественно-аналитически изоморфны над базой из нетривиальных нормированных характеров для любой компактной римановой поверхности рода $g \geq 2$.

Ключевые слова: компактная риманова поверхность, гармонические дифференциалы Прима

Введение

Периоды многозначных гармонических дифференциалов Прима на компактной римановой поверхности рода $g \geq 2$ являются важными трансцендентными инвариантами, связанными с римановой поверхностью. Ф. Прим, Р. Рост [1] начали построение теории гармонических и голоморфных интегралов Прима только для нормированных характеров фундаментальной группы компактной римановой поверхности. Дж. Кемпф [2] и Э. Джеблоу [3] получили ряд свойств периодов голоморфных дифференциалов Прима для нормированных характеров и для характеров, которые на половине образующих фундаментальной группы равны единице. В 1980 г. Р. Ганнинг [4, 5] начал изучение голоморфных дифференциалов Прима для произвольных характеров.

В работе изучаются классы периодов замкнутых, гармонических и голоморфных дифференциалов Прима на компактной римановой поверхности любого рода $g \geq 2$ и для любых характеров ее фундаментальной группы. Выводятся общие формулы, связывающие периоды для любых двух замкнутых дифференциалов Прима относительно двух произвольных характеров. Из них получаются аналоги билинейных соотношений Римана на случай гармонических и голоморфных дифференциалов Прима. Для гармонических дифференциалов Прима относительно нормированных характеров доказываются аналоги теорем Ходжа и де Рама, строятся канонические базисы из гармонических дифференциалов Прима, которые локально вещественно-аналитически зависят от характеров. Показывается, что гармоническое векторное расслоение Прима (из гармонических дифференциалов Прима) и когомологическое расслоение Ганнинга будут вещественно-аналитически изоморфны над базой из нетривиальных нормированных характеров для любой компактной римановой поверхности рода $g \geq 2$. Находятся «препятствия» коциклического типа к взаимной однозначности отображения периодов для гармонических дифференциалов Прима относительно ненормированных характеров.

Устанавливается, что для существенных характеров голоморфные дифференциалы Прима однозначно определяются «половиной» своих базисных периодов. Строятся канонические базисы из голоморфных дифференциалов Прима, локально голоморфно зависящие от существенных характеров.

§ 1. Предварительные сведения

Пусть $\left[F, \{a_k, b_k\}_{k=1}^g\right]$ — (фиксированная) отмеченная компактная риманова поверхность рода $g \geq 2$; Γ — отмеченная фуксова группа первого рода, инвариантно действующая на единичном диске $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, такая, что U — универсальная накрывающая для F и Γ — группа преобразований наложения для естественной проекции $\pi : U \to U/\Gamma = F$. Выбор образующих в фундаментальной группе

$$\pi_1(F, O) = \left\langle a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g : \prod_{j=1}^{g} [a_j, b_j] = 1 \right\rangle$$

определяет специальный выбор образующих в группе

$$\Gamma = \left\langle A_1, \ldots, A_g, B_1, \ldots, B_g : \prod_{j=1}^{g} C_j = 1 \right\rangle,$$

где O — фиксированная базисная точка на F, а $C_j = [A_j, B_j] = A_j B_j A_j^{-1} B_j^{-1}$, $j = 1, \ldots, g$.

Обозначим через $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ группу всех одномерных представлений ρ из Γ в $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \backslash \{0\}$ с естественной операцией умножения. Она является $2g$-мерной комплексно-аналитической группой Ли и биголоморфно изоморфна группе $[\mathbb{C}^*]^{2g}$ с операцией покоординатного умножения. Группа $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ допускает также другое описание. Для любой точки $(x, y) = (x_1, \ldots, x_g; y_1, \ldots, y_g) \in \mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^g$ определено представление $\rho_{x,y} \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ такое, что

$$\rho_{x,y}(A_j) = \exp 2\pi i x_j, \quad \rho_{x,y}(B_j) = \exp 2\pi i y_j, \quad j = 1, \ldots, g.$$

Отображение $\rho : (x, y) \to \rho_{x,y}$ задает изоморфизм групп $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ и $\mathbb{C}^{2g}/\mathbb{Z}^{2g}$. Обозначим $L_g = \rho(L_0)$, где $L_0 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^{2g} : y = \Omega x\}$ — g-мерное векторное подпространство в $\mathbb{C}^{2g}$, а $\Omega = (\Omega_{jk})$ — матрица из B-периодов для канонического базиса $\varsigma_1, \ldots, \varsigma_g$ голоморфных абелевых дифференциалов на F, двойственного с $\{a_k, b_k\}_{k=1}^g$ (т. е. $\int\limits_{a_k} \varsigma_j = \delta_{jk}$, $\int\limits_{b_k} \varsigma_j = \Omega_{jk}$, $j, k = 1, \ldots, g$) [6]. Подгруппа L_g в $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ совпадает с множеством так называемых несущественных характеров $\rho_{x,y}$ для Γ, где $x_j = c_j$, $y_j = \sum\limits_{k=1}^{g} \Omega_{jk} c_k$, $j = 1, \ldots, g$, и $(c_1, \ldots, c_g)$ — любая точка из $\mathbb{C}^g$. В [7] показано, что ρ — голоморфная биекция из L_0 на L_g. Если $\rho_{x,y} \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*) \backslash L_g$, то $x_j = c_j$, $y_j = \sum\limits_{k=1}^{g} \Omega_{jk} c_k + g_j$ и $g_j \notin \mathbb{Z}$ для некоторого $j = 1, \ldots, g$. Эти характеры называются существенными характерами для Γ [4, 6, 7].

Обозначим через $Z^1(\Gamma, \rho)$ для $\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ множество всех отображений $\phi : \Gamma \to \mathbb{C}$ таких, что

$$\phi(ST) = \phi(S) + \rho(S)\phi(T),$$

$S, T \in \Gamma$. Каждый элемент $\phi \in Z^1(\Gamma,\rho)$ единственным образом определяется упорядоченным набором комплексных чисел $\phi(A_1),\dots,\phi(A_g),\phi(B_1),\dots,\phi(B_g)$, удовлетворяющих уравнению

$$\sum_{j=1}^{g}\{\sigma(B_j)\phi(A_j)-\sigma(A_j)\phi(B_j)\}=0,$$

которое получается из соотношения $\prod\limits_{j=1}^{g} C_j = 1$ в Γ, где $\sigma(T)=1-\rho(T)$, $T\in\Gamma$. Тогда $Z^1(\Gamma,\rho)$ — комплексное векторное $(2g-1)$-мерное пространство для $\rho\neq 1$ (т. е. $\rho(S)\neq 1$ для некоторого $S\in\Gamma$) и $2g$-мерное пространство для $\rho=1$. Пусть $B^1(\Gamma,\rho)$ — одномерное подпространство в $Z^1(\Gamma,\rho)$, порожденное элементом σ. Тогда $H^1(\Gamma,\rho)=Z^1(\Gamma,\rho)/B^1(\Gamma,\rho)$ — комплексное векторное $(2g-2)$-мерное пространство для $\rho\neq 1$. Будем называть множество $G=\bigcup\limits_{\rho\neq 1}H^1(\Gamma,\rho)$ *когомологическим расслоением Ганнинга для римановой поверхности* F [4, 7, 8].

§ 2. Замкнутые дифференциалы Прима

Определение 1. *Дифференциалом Прима $\phi(z)$ на F для $\rho\in\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{C}^*)$* называется дифференциальная 1-форма на U такая, что

$$\phi(Tz)=\rho(T)\phi(z),\quad z\in U,\ T\in\Gamma.$$

Лемма 1 [3, с. 330]. *Любой дифференциал Прима $\phi(z)$ на F класса C^∞ для ρ единственным образом разлагается в сумму дифференциала Прима $\phi_1(z)$ типа $(1,0)$ на F класса C^∞ для ρ и дифференциала Прима $\phi_2(z)$ типа $(0,1)$ на F класса C^∞ для ρ.*

Доказательство. На U дифференциал Прима $\phi(z)$ единственным образом разлагается в сумму дифференциала $\phi_1(z)$ типа $(1,0)$ и дифференциала $\phi_2(z)$ типа $(0,1)$: $\phi(z)=\phi_1(z)+\phi_2(z)$, $z\in U$. Покажем, что они также являются дифференциалами Прима для ρ. При фиксированном $T\in\Gamma$ имеем $\rho(T)\phi(z)=\phi(Tz)=\phi_1(Tz)+\phi_2(Tz)$ или $\phi(z)=\rho(T)^{-1}\phi_1(Tz)+\rho(T)^{-1}\phi_2(Tz)$. Отсюда получаем, что $\phi_1(z)=\rho(T)^{-1}\phi_1(Tz)$ и $\phi_2(z)=\rho(T)^{-1}\phi_2(Tz)$, $T\in\Gamma$. Лемма 1 доказана.

Пусть $\phi(z)$ — замкнутый дифференциал Прима на F класса C^∞ для ρ. Проинтегрировав равенство из определения 1 от фиксированной точки z_0, $\pi(z_0)=O$, до $z\in U$, получим, что $f(Tz)-f(Tz_0)=\rho(T)(f(z)-f(z_0))$, $\phi(z)=df(z)$, $z\in U$, где $f(z)$ — интеграл Прима на односвязном круге U для дифференциала Прима $\phi(z)$, который определяется с точностью до аддитивного слагаемого. Отсюда для $T\in\Gamma$ верно равенство $f(Tz)=\rho(T)f(z)+\phi_{f,z_0}(T)$, где $\phi_{f,z_0}(T)=f(Tz_0)-\rho(T)f(z_0)$. Таким образом, каждому $T\in\Gamma$ соответствует число $\phi_{f,z_0}(T)$, а значит, определено отображение $\phi_{f,z_0}:\Gamma\to\mathbb{C}$. Это отображение называется отображением периодов для $\phi(z)$. Оно зависит от выбора интеграла Прима $f(z)$ на U и базисной точки z_0. Если $f_1(z)=f(z)+c$ — другой интеграл Прима для того же дифференциала Прима $\phi(z)$, то $\phi_{f_1,z_0}(T)=f_1(Tz_0)-\rho(T)f_1(z_0)=\phi_{f,z_0}(T)+c\sigma(T)$, $T\in\Gamma$. Легко проверить, что оба отображения ϕ_{f,z_0} и ϕ_{f_1,z_0} удовлетворяют коциклическому соотношению $\phi(ST)=\phi(S)+\rho(S)\phi(T)$, $S,T\in\Gamma$. Это означает, что они принадлежат пространству $Z^1(\Gamma,\rho)$ и представляют один и тот же класс периодов $[\phi]$ из $H^1(\Gamma,\rho)$ для дифференциала Прима $\phi(z)$ на F [4, 7].

Для замкнутого дифференциала Прима $\phi(z)$ можно определить так называемые классические периоды. Для $T \in \Gamma$ соответствующим ему классическим периодом будет $\phi_{z_0}(T) = \int\limits_{z_0}^{Tz_0} \phi(z)$ и верно равенство

$$\int\limits_{z_0}^{Tz_0} \phi(z) = \int\limits_{z_0}^{Tz_0} df(z) = f(Tz_0) - f(z_0) = \phi_{f,z_0}(T) - f(z_0)\sigma(T).$$

Отсюда

$$\phi_{f_1,z_0}(T) - f_1(z_0)\sigma(T) = \int\limits_{z_0}^{Tz_0} \phi(z) = \phi_{f,z_0}(T) - f(z_0)\sigma(T).$$

Следовательно, классические периоды не зависят от выбора интеграла Прима $f(z)$ для дифференциала Прима $\phi(z)$ при фиксированной базисной точке z_0. Легко видеть, однако, что $\phi_{z_0}(T)$ зависит от выбора базисной точки z_0, так как

$$\int\limits_{z_1}^{Tz_1} \phi(z) = \int\limits_{z_0}^{Tz_0} \phi(z) - \sigma(T) \int\limits_{z_0}^{z_1} \phi(z).$$

Из последней формулы следует, что $\phi_{f,z_1}(T) = \phi_{f,z_0}(T)$, т. е. $\phi_{f,z_0}(T)$ не зависит от выбора z_0 при фиксированном интеграле Прима $f(z)$ для дифференциала Прима $\phi(z)$ на F. Затем приходим к равенству

$$\int\limits_{Sz_0}^{TSz_0} \phi(z) = \phi_{f,Sz_0}(T) - f(Sz_0)\sigma(T) = \int\limits_{z_0}^{Tz_0} \phi(z) - \sigma(T) \int\limits_{z_0}^{Sz_0} \phi(z),$$

переписывая которое, получим, что $\phi_{Sz_0}(T) = \phi_{z_0}(T) - \sigma(T)\phi_{z_0}(S)$, $S, T \in \Gamma$.

Следовательно, отображения вида $T \to \phi_{f,z_0}(T)$ (периоды по Ганнингу [4]) и вида $T \to \int\limits_{z_0}^{Tz_0} \phi(z) = \phi_{z_0}(T)$ (классические периоды [3]) определяют один и тот же класс периодов $[\phi] \in H^1(\Gamma, \rho)$ для дифференциала Прима $\phi(z)$ на F для ρ. Поэтому корректно определено $\mathbb{C}$-линейное отображение $p : \phi(z) \to [\phi]$ из векторного пространства замкнутых дифференциалов Прима $\phi(z)$ на F для ρ в векторное пространство $H^1(\Gamma, \rho)$.

Кроме того, выбирая $f(z_0) = 0$, получаем

$$\phi_{z_0}(T) = \int\limits_{z_0}^{Tz_0} \phi(z) = \phi_{f,z_0}(T),$$

т. е. что классические периоды совпадают с периодами по Ганнингу.

Наконец, для любых $A, B, C, D \in \Gamma$ имеем

$$\phi_{z_0}([A,B]) = \int\limits_{z_0}^{[A,B]z_0} \phi(z) = \phi_{f,z_0}([A,B]) - f(z_0)\sigma([A,B]) = \phi_{f,z_0}([A,B]) = \phi([A,B])$$

и $\phi([A,B][C,D]) = \phi([A,B]) + \phi([C,D])$, т. е. на коммутаторах классические периоды равны периодам по Ганнингу и не зависят ни от выбора z_0, ни от выбора интеграла Прима для дифференциала Прима. При этом $\phi : [\Gamma, \Gamma] \to \mathbb{C}$ (ограничение ϕ на коммутант $[\Gamma, \Gamma]$ группы Γ) является гомоморфизмом из группы $[\Gamma, \Gamma]$ в $(\mathbb{C}, +)$ и $\phi(T) = 0$ для $T \in [\Gamma', \Gamma']$, $\Gamma' = [\Gamma, \Gamma] < \Gamma$ [3, 4].

Назовем дифференциал Прима $\phi(z)$ на F класса C^∞ для ρ *мультипликативно точным* на F для ρ, если $\phi(z) = df(z)$ и $f(Tz) = \rho(T)f(z)$, $T \in \Gamma$, $z \in U$, т. е. f — мультипликативная функция на F класса C^∞ для ρ.

Лемма 2. *Если $\phi(z)$ — замкнутый дифференциал Прима на F класса C^∞ для ρ и $[\phi] = 0$ в $H^1(\Gamma, \rho)$, то $\phi(z)$ является мультипликативно точным на F для ρ.*

Доказательство. Так как $\phi(z)$ — замкнутый однозначный дифференциал на U, то он будет точным на U, т. е. $\phi(z) = df(z)$ на U, где $f \in C^\infty(U)$. Покажем, что интеграл Прима для дифференциала Прима $\phi(z)$ можно выбрать как мультипликативную функцию на U для ρ при условии $[\phi] = 0$ в $H^1(\Gamma, \rho)$. Действительно, по условию $f(Tz) = \rho(T)f(z) + c\sigma(T)$, $T \in \Gamma$, $z \in U$, или $f(Tz) - c = \rho(T)(f(z) - c)$. Интеграл $f_1(z) = f(z) - c$ является мультипликативной функцией на F для ρ. Лемма 2 доказана.

Теорема 1. *Если $\phi(z), \psi(z)$ — замкнутые дифференциалы Прима на F класса C^∞ для ρ_1 и ρ_2 соответственно, то*

$$\int\!\!\int\limits_{\Delta} \phi(z) \wedge \psi(z) = \int\limits_{\partial\Delta} h(z)\psi(z)$$

$$= \sum_{j=1}^{g} \Bigg[(1 - \rho_1\rho_2(B_j)) \int\limits_{z \in \widetilde{a_j}} h(z)\psi(z) - (1 - \rho_1\rho_2(A_j)) \int\limits_{z \in \widetilde{b_j}} h(z)\psi(z)\Bigg]$$

$$+ \sum_{j=1}^{g} \{[\phi(C_1 \dots C_{j-1})(1 - \rho_2(B_j)) - \rho_2(B_j)(\phi(C_j) + \phi_h(B_j))] \int\limits_{z \in \widetilde{a_j}} \psi(z)$$

$$+ [(\rho_2(A_j) - 1)\phi(C_1 \dots C_{j-1}) + \rho_2(A_j)\phi_h(A_j) - \phi(C_j)] \int\limits_{z \in \widetilde{b_j}} \psi(z)\},$$

где Δ — фиксированная фундаментальная область для Γ в U; $\phi(z) = dh(z)$ на U, $h(Tz) = \rho(T)h(z) + \phi_h(T)$, $T \in \Gamma$;

$$\int\limits_{\widetilde{a_j}} \psi(z) = \int\limits_{z_0}^{A_j z_0} \psi(z); \quad \int\limits_{\widetilde{b_j}} \psi(z) = \int\limits_{z_0}^{B_j z_0} \psi(z),$$

причем это равенство инвариантно относительно выбора интеграла $h(z)$ для $\phi(z)$ с точностью до аддитивного слагаемого.

Доказательство. Граница фундаментальной области Δ имеет вид [8, с. 153; 9, с. 129] $\partial\Delta = a_1^+ b_1^+ a_1^- b_1^- \dots a_g^+ b_g^+ a_g^- b_g^-$, где

$$a_j^+ = C_1 \dots C_{j-1}\widetilde{a_j}, \quad a_j^- = C_1 \dots C_{j-1} A_j B_j A_j^{-1} \widetilde{a_j},$$

$$b_j^+ = C_1 \dots C_{j-1} A_j \widetilde{b_j}, \quad b_j^- = C_1 \dots C_j \widetilde{b_j},$$

причем $\widetilde{a_j}$ — поднятие a_j с началом в точке z_0 и концом в $A_j z_0$, $\widetilde{b_j}$ — поднятие b_j с началом в точке z_0 и концом в $B_j z_0$ на U. Тогда по теореме Стокса [6] с учетом соотношения для периодов [3, 4, 7] имеем

$$\int\int_{\Delta} \phi(z) \wedge \psi(z) = \int_{\partial\Delta} h(z)\psi(z) = \sum_{j=1}^{g} \int_{a_j^+ b_j^+ a_j^- b_j^-} h(z)\psi(z)$$

$$= \sum_{j=1}^{g} \int_{z\in\widetilde{a_j}} \big[h(C_1 \dots C_{j-1}z)\psi(C_1 \dots C_{j-1}z)$$

$$- h\big(C_1 \dots C_{j-1}A_jB_jA_j^{-1}z\big)\psi\big(C_1 \dots C_{j-1}A_jB_jA_j^{-1}z\big)\big]$$

$$+ \sum_{j=1}^{g} \int_{z\in\widetilde{b_j}} [h(C_1 \dots C_{j-1}A_jz)\psi(C_1 \dots C_{j-1}A_jz) - h(C_1 \dots C_jz)\psi(C_1 \dots C_jz)]$$

$$= \sum_{j=1}^{g} \int_{z\in\widetilde{a_j}} \big[\psi(z)(h(z) + \phi(C_1 \dots C_{j-1})) - \rho_2(B_j)\psi(z)\big(\rho_1(B_j)h(z)$$

$$+ \phi_h\big(C_1 \dots C_{j-1}A_jB_jA_j^{-1}\big)\big)\big] + \sum_{j=1}^{g} \int_{z\in\widetilde{b_j}} [(\rho_1(A_j)h(z)$$

$$+ \phi_h(C_1 \dots C_{j-1}A_j))\rho_2(A_j)\psi(z) - (h(z) + \phi(C_1 \dots C_j))\psi(z)]$$

$$= \sum_{j=1}^{g} \Bigg[(1 - \rho_1\rho_2(B_j)) \int_{z\in\widetilde{a_j}} h(z)\psi(z) - (1 - \rho_1\rho_2(A_j)) \int_{z\in\widetilde{b_j}} h(z)\psi(z)\Bigg]$$

$$+ \sum_{j=1}^{g} \Bigg\{\big[\phi(C_1 \dots C_{j-1}) - \rho_2(B_j)\phi_h(C_1 \dots C_{j-1}A_jB_jA_j^{-1})\big] \int_{z\in\widetilde{a_j}} \psi(z)$$

$$+ [\rho_2(A_j)\phi_h(C_1 \dots C_{j-1}A_j) - \phi(C_1 \dots C_j)] \int_{z\in\widetilde{b_j}} \psi(z)\Bigg\},$$

где $\phi_h\big(C_1 \dots C_{j-1}A_jB_jA_j^{-1}\big) = \phi(C_1 \dots C_{j-1}) + \phi_h(C_jB_j) = \phi(C_1 \dots C_{j-1}) + \phi(C_j) + \phi_h(B_j)$, $\phi_h(C_1 \dots C_{j-1}A_j) = \phi(C_1 \dots C_{j-1}) + \phi_h(A_j)$.

Если $h(z)$ заменить на $h(z) + c$, то левая сторона нашего равенства изменится на слагаемое $c \int_{\partial\Delta} \psi(z) = 0$ (из-за основного коциклического условия на периоды замкнутого дифференциала Прима $\psi(z)$). Правая сторона тоже изменится на слагаемое вида

$$\sum_{j=1}^{g} \Bigg[(1 - \rho_1\rho_2(B_j)) \int_{z\in\widetilde{a_j}} c\psi(z) - (1 - \rho_1\rho_2(A_j)) \int_{z\in\widetilde{b_j}} c\psi(z)\Bigg]$$

$$+ \sum_{j=1}^{g} (-\rho_2(B_j)c\sigma_1(B_j)) \int_{z\in\widetilde{a_j}} \psi(z) + \sum_{j=1}^{g} (\rho_2(A_j)c\sigma_1(A_j) \int_{z\in\widetilde{b_j}} \psi(z)$$

$$= c\sum_{j=1}^{g} \Bigg[(1 - \rho_2(B_j)) \int_{z\in\widetilde{a_j}} \psi(z) - (1 - \rho_2(A_j)) \int_{z\in\widetilde{b_j}} \psi(z)\Bigg]$$

$$
+\sum_{j=1}^{g}\Big[\rho_2(B_j)\sigma_1(B_j)c\int\limits_{z\in\widetilde{a_j}}\psi(z)-\rho_2(A_j)\sigma_1(A_j)c\int\limits_{z\in\widetilde{b_j}}\psi(z)\Big]
$$

$$
+\sum_{j=1}^{g}-\rho_2(B_j)c\sigma_1(B_j)\int\limits_{z\in\widetilde{a_j}}\psi(z)+\sum_{j=1}^{g}\rho_2(A_j)c\sigma_1(A_j)\int\limits_{z\in\widetilde{b_j}}\psi(z)=0,
$$

где $\sigma_1(T)=1-\rho_1(T)$, $T\in\Gamma$, так как первая сумма равна 0 из-за коциклического условия на периоды для $\psi(z)$, а последние три суммы взаимно сокращаются. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Для $\rho_2=\rho_1^{-1}$ из этой формулы получается билинейное спаривание Ганнинга [4].

§ 3. Периоды гармонических дифференциалов Прима

Определение 2. *Гармоническим дифференциалом Прима на F для $\rho\in\operatorname{Hom}(\Gamma,\mathbb{C}^*)$* называется гармоническая (однозначная) дифференциальная 1-форма $\phi(z)$ на U такая, что $\phi(Tz)=\rho(T)\phi(z)$, $T\in\Gamma$, $z\in U$.

Гармонический дифференциал Прима $\phi(z)$ на U представляется в виде $\phi(z)=\phi_1(z)+\phi_2(z)$, где $\phi_1(z)=df_1(z)$, $\phi_2(z)=\overline{df_2(z)}$, $f_1(z),f_2(z)$ — голоморфные функции на U, которые определяются с точностью до аддитивных комплексных констант. Поэтому $\phi(z)=df(z)$ на U, где $f(z)=f_1(z)+\overline{f_2(z)}$ — комплекснозначная гармоническая функция на U (гармонический интеграл Прима для дифференциала $\phi(z)$ на F). Интегрируя от фиксированной точки z_0 до текущей z в U, получим соотношение $f(Tz)=\rho(T)f(z)+\phi(T)$, где $\phi(T)=f(Tz_0)-\rho(T)f(z_0)=\phi_1(T)+\phi_2(T)$, $\phi_1(T)=f_1(Tz_0)-\rho(T)f_1(z_0)$, $\phi_2(T)=\overline{f_2(Tz_0)}-\rho(T)\overline{f_2(z_0)}$, $\pi(z_0)=O$, $T\in\Gamma$.

Так же, как для замкнутых дифференциалов Прима, показывается, что $\mathbb{C}$-линейное отображение $p:\phi(z)\to[\phi]\in H^1(\Gamma,\rho)$, которое гармонический дифференциал Прима $\phi(z)$ для ρ переводит в его класс периодов $[\phi]$, корректно определено [7].

Для $\rho=1$ гармонический дифференциал Прима на F — однозначный гармонический дифференциал на F, который равен сумме голоморфного и антиголоморфного дифференциалов на F [6].

Множество всех гармонических дифференциалов Прима $\phi(z)$ на F для $\rho\in\operatorname{Hom}(\Gamma,\mathbb{C}^*)$ образует комплексное векторное пространство $\Gamma(F,\mathscr{H}^1(\rho))$ размерности $(2g-2)$ при $\rho\notin L_g\cup\overline{L_g}$, так как $\Gamma(F,\mathscr{H}^1(\rho))=\Gamma(F,O^{1,0}(\rho))\oplus\Gamma(F,O^{0,1}(\rho))$, где $\overline{L_g}$ — образ группы L_g при отображении $\rho\to\bar\rho$. Выберем, как в [4, 5], базис $\{\phi_j(\rho;z)\}_{j=1}^{g-1}$ для $\Gamma(F,O^{1,0}(\rho))$, голоморфно зависящий от ρ в каждой достаточно малой односвязной окрестности $U(\rho_0)\subset\operatorname{Hom}(\Gamma,\mathbb{C}^*)\backslash(L_g\cup\overline{L_g})$. Одновременно выберем базис $\{\phi_j(\bar\rho;z)\}_{j=1}^{g-1}$ в $\Gamma(F,O^{1,0}(\bar\rho))$, голоморфно зависящий от $\bar\rho$ в каждой окрестности $\overline{U(\rho_0)}$ (образ $U(\rho_0)$ при отображении $\rho\to\bar\rho$). Поэтому набор гармонических дифференциалов Прима

$$
\phi_1(\rho;z),\dots,\phi_{g-1}(\rho;z);\overline{\phi_1(\bar\rho;z)},\dots,\overline{\phi_{g-1}(\bar\rho;z)}
$$

образует базис, голоморфно зависящий от $\rho\in U(\rho_0)$. Таким образом, на комплексном векторном расслоении (это так называемое гармоническое расслоение Прима для фиксированной поверхности F)

$$
HP=\bigcup_{\rho\notin L_g\cup\overline{L_g}}\Gamma(F,\mathscr{H}^1(\rho))=P_{1,0}\oplus P_{0,1}
$$

ранга $2g-2$ над пространством $\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{C}^*)\backslash(L_g\cup\overline{L_g})$ определена структура голоморфного векторного расслоения.

Скалярное произведение в слое $\Gamma(F,\mathscr{H}^1(\rho))$ определено по формуле

$$(\phi_1(z),\phi_2(z))=\int\!\!\int\limits_{\Delta}\phi_1(z)\wedge *\overline{\phi_2(z)}=i\int\!\!\int\limits_{\Delta}(u_1\overline{u_2}+v_1\overline{v_2})dz\wedge\overline{dz},$$

где Δ — фиксированная фундаментальная область для Γ в U, граница $\partial\Delta$ — поднятие для коммутаторного пути $\prod\limits_{j=1}^{g}[a_j,b_j]$ из z_0 на U; $\phi_j(z)=u_j(z)dz+v_j(z)\overline{dz}$, $j=1,2$; $*$ — оператор Ходжа. В [7] доказано, что G (расслоение Ганнинга) есть голоморфное векторное расслоение ранга $2g-2$ над $\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{C}^*)\backslash 1$, а HP — эрмитово голоморфное векторное расслоение ранга $2g-2$ над $\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{C}^*)\backslash(L_g\cup\overline{L_g})$, являющееся прямой суммой ортогональных эрмитовых голоморфных $*$-инвариантных векторных подрасслоений $P_{1,0}$ и $P_{0,1}$ ранга $g-1$ для фиксированной поверхности F рода $g\geq 2$. Кроме того, показано, что отображение периодов p является голоморфным инъективным отображением расслоений $P_{1,0}$ и $P_{0,1}$ в G над $\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{C}^*)\backslash(L_g\cup\overline{L_g})$ для любого рода $g\geq 2$.

Теорема 2. *Пусть F — компактная риманова поверхность рода $g\geq 2$, $\phi(z)$ — гармонический дифференциал Прима для $\rho\in[S^1]^{2g}$, и $[\phi]=0$ в $H^1(\Gamma,\rho)$. Тогда $\phi(z)=0$ на F.*

Доказательство 1. По лемме 1 $\phi(z)=\varpi(z)+\overline{\varphi(z)}$, где $\varpi(z)$ и $\varphi(z)$ — голоморфные дифференциалы Прима для ρ и $\bar\rho$ соответственно на F. Из условия $[\phi]=0$ и леммы 2 следует существование мультипликативной функции f на F для ρ такой, что $\varpi(z)+\overline{\varphi(z)}=df(z)$ на U. Покажем, что $\varpi(z)=0=\varphi(z)$ на U. Проведем доказательство от противного. Предположим, что $\varphi(z)\neq 0$ на Δ (или на F). Тогда, положив $\varphi(z)=g(z)dz$ на Δ, имеем

$$\frac{i}{2}\int\!\!\int\limits_{\Delta}\varphi\wedge\overline{\varphi}=\int\!\!\int\limits_{\Delta}|g(z)|^2\,dx\wedge dy>0.$$

С другой стороны, $\varphi\wedge\overline{\varphi}=\varphi\wedge\varpi+\varphi\wedge\overline{\varphi}=\varphi\wedge df=-d(f\varphi)$. Отсюда

$$\int\!\!\int\limits_{\Delta}\varphi\wedge\overline{\varphi}=\int\!\!\int\limits_{\Delta}\varphi\wedge df=-\int\limits_{\partial\Delta}f\varphi=0$$

по теореме 1, так как $\rho_1=\rho$, $\rho_2=\bar\rho$, $\rho\bar\rho=1$ и для дифференциала df все A- и B-периоды равны 0. Получили противоречие.

Значит, $\phi(z)=\varpi(z)$. Повторяя предыдущие рассуждения с $\varpi(z)$, получим, что $\varpi(z)=0$ на U. Это же следует из [7, с. 469; 4].

Доказательство 2. Используя обозначения предыдущего доказательства, получим, что

$$0\leq(\phi(z),\phi(z))=\iint\limits_{\Delta}\phi(z)\wedge *\overline{\phi(z)}=\int\limits_{\partial\Delta}f(z)(*\overline{\phi(z)})=0.$$

Последнее равенство снова выводится по теореме 1. Отсюда $(\phi(z),\phi(z))=0$ на Δ и $\phi(z)=0$ на Δ. Следовательно, $\phi(z)=0$ на F. Теорема 2 доказана.

Из теорем 1, 2 вытекают некоторые следствия о периодах гармонических дифференциалов Прима и о гармоническом векторном расслоении Прима HP над $[S^1]^{2g}\backslash 1$.

Следствие 1. *Гармонический дифференциал Прима $\phi(z)$ на F для $\rho \in [S^1]^{2g}$ единственно определяется своим классом периодов $[\phi] \in H^1(\Gamma, \rho)$ и $\Gamma(F, \mathscr{H}^1(\rho)) \cong H^1(\Gamma, \rho)$.*

Доказательство. Так как отображение периодов p — $\mathbb{C}$-линейное инъективное отображение $(2g-2)$-мерного векторного пространства $\Gamma(F, \mathscr{H}^1(\rho))$ в $(2g-2)$-мерное векторное пространство $H^1(\Gamma, \rho)$, то $\Gamma(F, \mathscr{H}^1(\rho)) \cong H^1(\Gamma, \rho)$ для $\rho \in [S^1]^{2g}$. Следствие 1 доказано.

Первая группа $H^1_{DR}(F, \rho)$ когомологий де Рама на F для ρ определяется как фактор-пространство пространства $\Lambda^1(F, \rho)$ (всех замкнутых дифференциалов Прима на F класса C^∞ для ρ) по подпространству $dC^\infty(F, \rho)$ (образ пространства $C^\infty(F, \rho)$, состоящего из всех мультипликативных функций на F класса C^∞ для ρ, по оператору дифференцирования d). По лемме 2 для любого ρ отображение периодов $p : \Lambda^1(F, \rho)/dC^\infty(F, \rho) \to H^1(F, \rho)$ корректно определено и инъективно. В силу доказательства теоремы 2 для $\rho \in [S^1]^{2g}$ естественное отображение $\Gamma(F, \mathscr{H}^1(\rho)) \to H^1_{DR}(F, \rho)$, которое сопоставляет гармоническому дифференциалу Прима $\phi(z)$ для ρ его класс когомологий $[\phi(z)] = \{\phi(z) + dC^\infty(F, \rho)\}$, будет инъективным. Составим цепь инъективных $\mathbb{C}$-линейных отображений

$$\Gamma(F, \mathscr{H}^1(\rho)) \to H^1_{DR}(F, \rho) \xrightarrow{p} H^1(\Gamma, \rho).$$

Для $\rho \in [S^1]^{2g}$ комплексные векторные пространства на концах этой цепи имеют одинаковые размерности. Отсюда непосредственно получаем

Следствие 2 (аналоги теорем де Рама и Ходжа). *Для $\rho \in [S^1]^{2g}$ верны соотношения $\Gamma(F, \mathscr{H}^1(\rho)) \cong H^1_{DR}(F, \rho) \cong H^1(F, \rho)$, и для любого замкнутого дифференциала Прима $\phi(z)$ на F класса C^∞ для ρ существует единственное разложение Ходжа $\phi(z) = \phi_0(z) + df(z)$, где $\phi_0(z) \in \Gamma(F, \mathscr{H}^1(\rho))$, $f(z) \in C^\infty(F, \rho)$, а также для любого класса периодов $[\psi] \in H^1(\Gamma, \rho)$ существует замкнутый дифференциал Прима $\phi(z)$ на F класса C^∞ для ρ такой, что $[\phi] = [\psi]$ в $H^1(\Gamma, \rho)$.*

Аналог теоремы Ходжа получен в [3] с использованием сложной техники аналитических линейных расслоений на римановых поверхностях, аналог теоремы де Рама — в [8] с использованием когомологий с коэффициентами в пучках на F. Наше доказательство не требует такой сложной техники.

Теорема 3. *Векторные расслоения Ганнинга G и Прима HP над $[S^1]^{2g} \backslash 1$ будут вещественно-аналитично изоморфными, и расслоение Ганнинга G над $[S^1]^{2g} \backslash 1$ равно прямой сумме двух вещественно-аналитических комплексных векторных подрасслоений ранга $g-1$ для любой компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$.*

Доказательство. Зададим конечное покрытие для $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*) \backslash 1$ открытыми окрестностями $U_j = \{\rho : \rho(A_j) \neq 1\}$, $U_{g+j} = \{\rho : \rho(B_j) \neq 1\}$, $j = 1, \dots, g$ [7]. Имеем

$$[S^1]^{2g} \backslash 1 \subset \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*) \backslash (L_g \cup \overline{L_g}) \subset \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*) \backslash 1,$$

что сразу следует из теоремы Фаркаша — Кра [6, с. 130], по которой любой нормированный несущественный характер будет тривиальным. На $[S^1]^{2g} \backslash 1$ есть естественная вещественно-аналитическая структура, согласованная с комплексно-аналитической структурой на $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*) \backslash (L_g \cup \overline{L_g})$. Поэтому голоморфные векторные расслоения G и HP над $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*) \backslash (L_g \cup \overline{L_g})$, ограниченные на

$[S^1]^{2g}\backslash 1$, будут вещественно-аналитическими комплексными векторными расслоениями [10], а послойный $\mathbb{C}$-линейный изоморфизм p вещественно-аналитическим изоморфизмом расслоений G и HP над $[S^1]^{2g}\backslash 1$.

Второе утверждение следует из теорем 1, 2 в [7] и теоремы 2. Теорема 3 доказана.

Замечание 2. Из теоремы 1 вытекает, что условие

$$\sum_{j=1}^{g}\left[(1-\rho\bar{\rho}(B_j))\int\limits_{z\in\widetilde{a_j}} f(z)*\overline{df(z)}-(1-\rho\bar{\rho}(A_j))\int\limits_{z\in\widetilde{b_j}} f(z)*\overline{df(z)}\right]\neq 0$$

является некоторым коциклическим «препятствием» к взаимной однозначности отображения периодов $p:\Gamma(F,\mathscr{H}^1(\rho))\to H^1(\Gamma,\rho)$ для $\rho\in[\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{C}^*)\backslash(L_g\cup\overline{L_g})]\backslash[S^1]^{2g}$, где $\phi(z)=df(z)\in d(C^\infty(F,\rho))\cap\Gamma(F,\mathscr{H}^1(\rho))$.

Из теоремы 1 получаются аналоги билинейных соотношений Римана для случая дифференциалов Прима.

Следствие 3. 1. *Если либо ρ_1 и ρ_2 взаимно обратны, т. е. $\rho_2=\frac{1}{\rho_1}$, либо $\rho_2=\overline{\rho_1}$, $\rho_1\overline{\rho_1}=1$, то для любых двух голоморфных дифференциалов Прима $\phi(z)$ и $\psi(z)$ для ρ_1 и ρ_2 соответственно при $\phi(z)=dh(z)$, $\psi(z)=dg(z)$, $g(z_0)=0=h(z_0)$ на U верно равенство Прима*

$$\sum_{j=1}^{g}\{[\phi(C_1\dots C_{j-1})(1-\rho_2(B_j))-\rho_2(B_j)(\phi(C_j)+\phi(B_j))]\psi(A_j)$$
$$+[(\rho_2(A_j)-1)\phi(C_1\dots C_{j-1})+\rho_2(A_j)\phi(A_j)-\phi(C_j)]\psi(B_j)\}=0;$$

2. *Для любого гармонического дифференциала Прима $\phi(z)=\phi_1(z)+\overline{\phi_2(z)}$, $\phi(z)=df(z)$, $f(z_0)=0$, $*\phi(z)=df_1(z)$, $f_1(z_0)=0$, при ρ, $|\rho|=1$, верно неравенство Прима*

$$i\sum_{j=1}^{g}\{[\phi(C_1\dots C_{j-1})(1-\overline{\rho(B_j)})-\overline{\rho(B_j)}(\phi(C_j)+\phi(B_j)](\overline{\phi_1(A_j)}-\phi_2(A_j))$$
$$+[(\overline{\rho(A_j)}-1)\phi(C_1\dots C_{j-1})+\overline{\rho(A_j)}\phi(A_j)-\phi(C_j)](\overline{\phi_1(B_j)}-\phi_2(B_j))\}\geq 0.$$

Замечание 3. Если брать ρ_1 и ρ_2 произвольно, то равенство и неравенство Прима получаются в общем виде из теоремы 1.

Замечание 4. Из неравенства Прима для случая голоморфных дифференциалов Прима $\phi(z)$ при условии, что $\phi(A_j)=0, j=1,\dots,g$, для ρ, $|\rho|=1$, выводим неравенство

$$0\leq(\phi(z),\phi(z))$$
$$=i\sum_{j=1}^{g}[\overline{\sigma(A_j)}(\sigma(A_1)\phi(B_1)+\dots+\sigma(A_{j-1})\phi(B_{j-1}))+\sigma(A_j)\phi(B_j)]\overline{\phi(B_j)}.$$

Если дополнительно взять $\rho(A_1)=\dots=\rho(A_g)=1$, то будет $\phi(z)=0$. Этот специальный случай получен в [3], где голоморфный дифференциал Прима $\phi(z)$ для ρ, $|\rho|=1$, единственно определяется по $\phi(A_1),\dots,\phi(A_g)$, удовлетворяющим условию $\sum\limits_{j=1}^{g}\sigma(B_j)\phi(A_j)=0$.

Следствие 4. *Для любого $\rho_0 \in [S^1]^{2g}\backslash 1$ существует окрестность $U(\rho_0) \subset [S^1]^{2g}\backslash 1$ такая, что для $\rho \in U(\rho_0) \cap U_1$ в $\Gamma(F, \mathscr{H}^1(\rho))$ существует базис гармонических дифференциалов Прима $\phi_1(\rho; z), \dots, \phi_{2g-2}(\rho; z)$, вещественно-аналитически зависящий от ρ и имеющий матрицу периодов относительно $A_2, \dots, A_g$, $B_2, \dots, B_g$ вида I_{2g-2} (единичной матрицы порядка $2g-2$).*

Доказательство. Над $U(\rho_0)$ выберем базис гармонических дифференциалов Прима

$$\widetilde{\phi}_1(\rho; z), \dots, \widetilde{\phi}_{g-1}(\rho; z), \overline{\widetilde{\phi}_1(\bar{\rho}; z)}, \dots, \overline{\widetilde{\phi}_{g-1}(\bar{\rho}; z)}$$

на F для ρ, вещественно-аналитически зависящий от ρ (теорема 3). Составим блочную матрицу $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ классических периодов относительно $A_2, \dots, A_g$, $B_1, B_2, \dots, B_g$ для этого базиса, где $A = (a_{mk})$, $B = (b_{ml})$, $C = (c_{mk})$, $D = (d_{ml})$, $m = 1, \dots, g-1$, $k = 2, 3, \dots, g$, $l = 1, 2, \dots, g$, так как для $\rho \in U_1$ можно выбрать представитель в классе периодов такой, что период на A_1 будет равен 0. Если существует линейная зависимость над $\mathbb{C}$ для $2g-2$ строк, т. е. гармонический дифференциал Прима с нулевыми базисными периодами, который по теореме 2 тождественно равен 0, а это невозможно из-за выбора базиса в $\Gamma(F, \mathscr{H}^1(\rho))$. Таким образом, матрица $\begin{pmatrix} a_{mk} & b_{mk} \\ c_{mk} & d_{mk} \end{pmatrix} = M$, где $m = 1, \dots, g-1$, $k = 2, 3, \dots, g$, имеет $2g-2$ линейно независимых над $\mathbb{C}$ строк, и ее определитель не равен 0. Сделав невырожденное линейное преобразование в $\Gamma(F, \mathscr{H}^1(\rho))$ с матрицей M^{-1}, получим требуемый базис гармонических дифференциалов Прима. Следствие 4 доказано.

Следствие 5. *Гармоническое расслоение Прима HP будет вещественно-аналитически изоморфно тривиальному векторному расслоению над $[S^1]^{2g} \cap U_j$ для любого $j = 1, \dots, 2g$.*

Доказательство 1. Достаточно доказать утверждение для $\rho \in U_1 = \{\rho : \rho(A_1) \neq 1\}$. Имеем отображения

$$\phi(z) \xrightarrow{p} [\phi] \to (\phi(A_2), \dots, \phi(A_g), \phi(B_2), \dots, \phi(B_g)).$$

Первое отображение p инъективно по теореме 2 над $[S^1]^{2g}$, второе — ввиду $\phi(A_1) = 0$ и

$$\phi(B_1) = \frac{1}{\sigma(A_1)} \sum_{j=2}^{g} [\sigma(B_j)\phi(A_j) - \sigma(A_j)\phi(B_j)]$$

над U_1. Причем оба отображения вещественно-аналитически зависят от $\rho \in [S^1]^{2g} \cap U_1$. Таким образом, $HP \cong ([S^1]^{2g} \cap U_1) \times \mathbb{C}^{2g-2}$.

Доказательство 2. По теореме 3 HP вещественно-аналитически изоморфно G над $[S^1]^{2g}\backslash 1$, а по теореме 1 из [7] G над U_1 комплексно-аналитически изоморфно $U_1 \times \mathbb{C}^{2g-2}$. Следствие 5 доказано.

Следствие 6. *Пусть ρ удовлетворяет условиям $\rho^2 = 1$, $\rho(A_1) = -1$. Тогда столбцы в матрице периодов $\{(a_{ij}); (b_{ij})\}_{i=1,\dots,(g-1); j=2,\dots,g}$ из следствия 4 $\mathbb{R}$-линейно независимы.*

Доказательство проводим от противного. Предположим, что эта матрица, представленная как набор столбцов $(\pi_1, \dots, \pi_{2g-2})$, имеет $\mathbb{R}$-линейно зависимые столбцы, т. е. существуют не все нулевые $x_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, 2g-2$, и $x_1\pi_1 + \dots + x_{2g-2}\pi_{2g-2} = 0$, где $\pi_j = \pi_j(\rho)$. Из-за выбора специального базиса в $\Gamma(F,\mathscr{H}^1(\rho))$ имеем $x_1\overline{\pi_1(\bar\rho)}+\dots+x_{2g-2}\overline{\pi_{2g-2}(\bar\rho)}=0$. Образуем квадратную матрицу

$$\begin{pmatrix}\pi_1(\rho) & \dots & \pi_{2g-2}(\rho)\\ \overline{\pi_1(\bar\rho)} & \dots & \overline{\pi_{2g-2}(\bar\rho)}\end{pmatrix}=M$$

порядка $2g-2$. Из предыдущих двух равенств следует, что существует линейная комбинация $2g-2$ столбцов с вещественными коэффициентами x_j, $j=1,\dots,2g-2$, которая равна 0. Следовательно, ранг M меньше, чем $2g-2$. Поэтому найдутся комплексные числа $z_1,\dots,z_{g-1},w_1,\dots,w_{g-1}$ (не все нули) такие, что существует линейная комбинация $2g-2$ строк с этими коэффициентами равная 0, т. е.

$$\int\limits_{N_i}\left(\sum_{j=1}^{g-1}z_j\phi_j(\rho,z)+\sum_{j=1}^{g-1}w_j\overline{\phi_j(\bar\rho,z)}\right)=0,\quad i=1,\dots,2g.$$

Положив

$$\varphi(z)=\sum_{j=1}^{g-1}z_j\phi_j(\rho,z),\quad \psi(z)=\sum_{j=1}^{g-1}\overline{w_j}\phi_j(\bar\rho,z),$$

получаем равенства

$$\int\limits_{N_i}\varphi(z)+\overline{\psi(z)}=0,\quad i=1,\dots,2g.$$

Поэтому из леммы 2 следует, что $\varphi(z)+\overline{\psi(z)}=df$, $f\in C^\infty(F,\rho)$. По теореме 2 имеем $\varphi(z)=0=\psi(z)$ на F. Но это противоречит либо $\mathbb{C}$-линейной независимости $\phi_1(\rho,z),\dots,\phi_{g-1}(\rho,z)$, либо $\mathbb{C}$-линейной независимости $\overline{\phi_1(\bar\rho,z)},\dots,\overline{\phi_{g-1}(\bar\rho,z)}$. Следствие 6 доказано.

Из этого следствия для ρ, связанных со спинорными структурами (см. также пример [6, с. 133, 350]), получается, что столбцы $\pi_1,\dots,\pi_{2g-2}$ задают целочисленную решетку $\widetilde L$ периодов в $\mathbb{C}^{g-1}$ и $\mathbb{C}^{g-1}/\widetilde L$ — комплексный компактный тор размерности $g-1$. Его естественно называть многообразием Якоби — Прима для F.

§ 4. Периоды голоморфных дифференциалов Прима

Известно [4, 7], что голоморфный дифференциал Прима $\phi(z)$ для существенного характера ρ единственно определяется своим классом периодов $[\phi]$. В [7] показано, что класс $[\phi]$ при $\rho\in U_1$ задается единственным образом через свои базисные периоды $\phi(A_1)=0,\phi(A_2),\dots,\phi(A_g),\phi(B_1),\dots,\phi(B_g)$. Выясним, какое минимальное число базисных периодов надо задать, чтобы полностью определить дифференциал Прима $\phi(z)$.

Пусть $\phi(z)$ — голоморфный дифференциал Прима для существенного характера ρ, $\rho\in U_1$. Выберем базис голоморфных дифференциалов Прима $\phi_1(z)$, $\dots,\phi_{g-1}(z)$ для характера $\rho^{-1}\in U_1$. Тогда базисные классические периоды $\phi_{z_0}(A_1),\dots,\phi_{z_0}(A_g)$, $\phi_{z_0}(B_1),\dots,\phi_{z_0}(B_g)$ связаны системой уравнений

$$0=\int\int\limits_{\Delta}\phi_m(z)\wedge\phi(z),\quad m=1,\dots,g-1,$$

$$\sum_{j=1}^{g}[\sigma(B_j)\phi_{z_0}(A_j)-\sigma(A_j)\phi_{z_0}(B_j)]=0.$$

По теореме 1 первые $g-1$ уравнений можно записать в виде системы $g-1$ линейных уравнений с $2g$ неизвестными $\phi_{z_0}(A_1),\dots,\phi_{z_0}(A_g)$, $\phi_{z_0}(B_1),\dots,\phi_{z_0}(B_g)$:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{g}\{&[\phi_m(C_1\dots C_{j-1})(1-\rho(B_j))-\rho(B_j)(\phi_m(C_j)+\phi_m(B_j))]\phi_{z_0}(A_j)\\&+[(\rho(A_j)-1)\phi_m(C_1\dots C_{j-1})+\rho(A_j)\phi_m(A_j)-\phi_m(C_j)]\phi_{z_0}(B_j)\}=0,\qquad (*)\end{aligned}$$

$m=1,\dots,g-1$.

Если $\phi_{z_0}(A_1)\neq 0$, то выберем другую базисную точку z_1 с условием $\phi_{z_1}(A_1)=0$, где $\frac{1}{\sigma(A_1)}\phi_{z_0}(A_1)+f(z_0)=f(z_1)$, $\phi(z)=df(z)$ на U. Зафиксировав z_1 для каждого $m=1,\dots,g-1$, отдельно выберем интеграл Прима $f_m(z)$ для $\phi_m(z)$ с условием $(\phi_m)_{f_m,z_1}(A_1)=0$. Так, если $(\phi_m)_{f_m,z_1}(A_1)\neq 0$, то заменим $f_m(z)$ на $f_m(z)+c_m$ с условием $c_m=-\frac{1}{\sigma(A_1)}(\phi_m)_{f_m,z_1}(A_1)$. В дальнейшем для краткости записи будем опускать индексы f_m и z_1 у периодов.

После этого выбора предыдущая система $(*)$ будет иметь матрицу вида $(a_{mk};b_{ml})$, где

$$a_{mk}=[\phi_m(C_1\dots C_{k-1})(1-\rho(B_k))-\rho(B_k)(\phi_m(C_k)+\phi_m(B_k))];$$
$$b_{ml}=[\phi_m(C_1\dots C_{l-1})(\rho(A_l)-1)+\rho(A_l)\phi_m(A_l)-\phi_m(C_l)],$$

$k=2,\dots,g,l=1,\dots,g,m=1,\dots,g-1$. Покажем, что ранг этой матрицы равен $g-1$. Действительно, пусть ранг строго меньше, чем $g-1$. Тогда существует линейная комбинация из строк этой матрицы, равная 0, и получаем систему уравнений (для голоморфного дифференциала Прима $\widetilde{\phi(z)}$ для ρ^{-1} с классом периодов $[\widetilde{\phi}]$):

$$\begin{aligned}\widetilde{\phi}(C_1)\sigma(B_2)-\rho(B_2)(\widetilde{\phi}(C_2)+\widetilde{\phi}(B_2))&=0,\\ \widetilde{\phi}(C_1C_2)\sigma(B_3)-\rho(B_3)(\widetilde{\phi}(C_3)+\widetilde{\phi}(B_3))&=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots&\dots\\ \widetilde{\phi}(C_1\dots C_{g-1})\sigma(B_g)-\rho(B_g)(\widetilde{\phi}(C_g)+\widetilde{\phi}(B_g))&=0,\\ -\widetilde{\phi}(1)\sigma(A_1)+\rho(A_1)\widetilde{\phi}(A_1)-\widetilde{\phi}(C_1)&=0,\\ -\widetilde{\phi}(C_1)\sigma(A_2)+\rho(A_2)\widetilde{\phi}(A_2)-\widetilde{\phi}(C_2)&=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots&\dots\\ -\widetilde{\phi}(C_1\dots C_{g-1})\sigma(A_g)+\rho(A_g)\widetilde{\phi}(A_g)-\widetilde{\phi}(C_g)&=0.\end{aligned}$$

Учитывая, что $\widetilde{\phi}(1)=0$, $\sigma(A_1)\neq 0$, $\widetilde{\phi}(A_1)=0$, из g-го уравнения получим $\widetilde{\phi}(C_1)=0$ и $\widetilde{\phi}(B_1)=0$. Из первого и $(g+1)$-го уравнений выводится, что

$$-\frac{\sigma(B_2)}{\rho(B_2)}\widetilde{\phi}(A_2)+\widetilde{\phi}(B_2)\frac{1}{\rho(A_2)}=0,\quad \left(\rho(A_2)+\frac{\sigma(B_2)}{\rho(B_2)}\right)\widetilde{\phi}(A_2)-\frac{\sigma(A_2)}{\rho(A_2)}\widetilde{\phi}(B_2)=0,$$

а значит, $\widetilde{\phi}(A_2)=0=\widetilde{\phi}(B_2)$. Затем из $(m-1)$-го и $(g+m-1)$-го уравнений получаем систему

$$\widetilde{\phi}(C_m)=-\widetilde{\phi}(B_m),\quad \rho(A_m)\widetilde{\phi}(A_m)-\widetilde{\phi}(C_m)=0$$

или систему

$$-\frac{\sigma(B_m)}{\rho(B_m)}\widetilde{\phi}(A_m)+\widetilde{\phi}(B_m)\left(1+\frac{\sigma(A_m)}{\rho(A_m)}\right)=0,\quad \rho(A_m)\widetilde{\phi}(A_m)+\widetilde{\phi}(B_m)=0,$$

а значит, $\widetilde{\phi}(A_m)=0=\widetilde{\phi}(B_m)$ для $m=3,4,\dots,g$. Таким образом, голоморфный дифференциал Прима $\widetilde{\phi}(z)$ для ρ^{-1} будет иметь класс периодов $[\widetilde{\phi}]=0$. Поэтому $\widetilde{\phi}(z)=0$ на Δ, но это противоречит линейной независимости дифференциалов Прима $\phi_1(z),\dots,\phi_{g-1}(z)$ для ρ^{-1}.

Следовательно, по теореме о ранге матрицы будет существовать точно $g-1$ линейно независимых столбцов матрицы системы $(*)$. Выполняя элементарные преобразования над столбцами, приходим к тому, что эта матрица эквивалентна матрице Прима из базисных периодов для базиса $\phi_1(z),\dots,\phi_{g-1}(z)$: $(\phi_m(A_k);\phi_m(B_l))$, где $m=1,\dots,g-1$, $k=2,\dots,g$, $l=1,\dots,g$. В матрице Прима можно убрать столбец $(\phi_1(B_1),\dots,\phi_{g-1}(B_1))'$, так как он является линейной комбинацией остальных столбцов. Введем обозначения

$$\{N_1,\dots,N_g,N_{g+1},\dots,N_{2g}\}=\{A_1,A_2,\dots,A_g,B_1,B_2,\dots,B_g\}$$

(это равенство упорядоченных наборов). Существует ровно $g-1$ индексов $i_1,\dots,i_{g-1}$ из $\{2,3,\dots,g,g+2,g+3,\dots,2g\}$, которые соответствуют линейно независимым столбцам последней матрицы. Тогда, положив $\phi(N_j)=0$ для всех $j\notin\{i_1,\dots,i_{g-1}\}$, $j\in\{2,3,\dots,g,g+1,g+2,\dots,2g\}$, из системы $(*)$ получим однородную систему из $g-1$ уравнений с $\phi(N_{i_1}),\dots,\phi(N_{i_{g-1}})$ неизвестными и определителем, не равным 0. Отсюда следует, что все $\phi(N_{i_1}),\dots,\phi(N_{i_{g-1}})$ тоже равны 0. Поэтому $[\phi]=0$ и $\phi(z)$ для ρ тоже тождественно равен 0.

Теорема 4. *Дифференциал Прима $\phi(z)\in\Gamma(F,O^{1,0}(\rho))$ для существенного характера ρ, $\rho\in U_1$, определяется единственным образом «половиной» своих базисных периодов $\phi(N_{j_1}),\dots,\phi(N_{j_{g-1}})$, где*

$$\phi(A_1)=0,\quad \{N_1,\dots,N_g,N_{g+1},\dots,N_{2g}\}=\{A_1,A_2,\dots,A_g,B_1,B_2,\dots,B_g\}$$

и $\{j_1,\dots,j_{g-1}\}$ — $(g-1)$-элементное подмножество в $\{2,3,\dots,g,g+2,g+3,\dots,2g\}$, зависящее от выбора базиса в $\Gamma(F,O^{1,0}(\rho^{-1}))$.

Доказательство. Рассмотрим систему с расширенной матрицей

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1g} & b_{11} & \dots & b_{1g}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{g-1,1} & a_{g-1,2} & \dots & a_{g-1,g} & b_{g-1,1} & \dots & b_{g-1,g}\\ \sigma(B_1) & \sigma(B_2) & \dots & \sigma(B_g) & -\sigma(A_1) & \dots & -\sigma(A_g)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi(A_1)\\ \dots\\ \phi(A_g)\\ \phi(B_1)\\ \dots\\ \phi(B_g)\end{pmatrix}=0.$$

Взяв подходящую линейную комбинацию первого и $(g+1)$-го столбцов, получим вместо $(g+1)$-го столбца новый столбец, у которого все элементы равны 0, кроме последнего. Этот последний элемент будет иметь вид

$$\left\{[\sigma(B_1)+\rho(B_1)\sigma(A_1)]\frac{-\sigma(A_1)}{\rho(B_1A_1)}\right\}-\sigma(A_1)=\frac{-\sigma(A_1)}{\rho(A_1B_1)}=m_1\neq 0$$

при $\rho\in U_1$. Уже доказано, что ранг матрицы $(a_{mk};b_{ml})$, где $m=1,\dots,(g-1)$, $k=2,3,\dots,g$, $l=1,2,\dots,g$, равен $g-1$, а значит, она имеет ровно $g-1$

линейно независимых столбцов. Перестановкой столбцов расширенной матрицы поставим эти линейно независимые столбцы с номерами $i_1, \dots, i_{g-1} \subset \{2, 3, \dots, g, g+2, g+3, \dots, 2g\}$ на место $2, 3, \dots, g$. Тогда матрица

$$\begin{pmatrix} n_{1,i_1} & \dots & n_{1,i_{g-1}} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ n_{g-1,i_1} & \dots & n_{g-1,i_{g-1}} & 0 \\ * & * & * & m_1 \end{pmatrix},$$

где, например, $(a_{11} \ \dots \ a_{1g} \ b_{11} \ \dots \ b_{1g}) = (n_{11} \ \dots \ n_{1,2g})$, имеет ненулевой определитель. Поскольку $\phi(A_1) = 0$, то, взяв $\phi(N_j) = 0$, $j \in \{2, 3, \dots, g, g+2, g+3, \dots, 2g\}$, $j \notin \{i_1, \dots, i_{g-1}\}$, получим, что $\phi(N_{i_k}) = 0$, $k = 1, \dots, g-1$. Поэтому $[\phi] = 0$ и $\phi(z) = 0$ на Δ. Теорема 4 доказана.

Замечание 5. Формулировка теоремы 4 и другое ее доказательство в неявной форме содержатся в теореме 1 из [7]. Приведенное здесь доказательство более просто и показывает явную связь с матрицей Прима из базисных периодов для базиса голоморфных дифференциалов Прима для обратного характера.

Напомним, что в [7] для базиса $\phi_1(z), \dots, \phi_{g-1}(z)$ в $\Gamma(F, O^{1,0}(\rho))$ для $\rho \in U_1 \backslash L_g$ исследовалась матрица из коммутаторных периодов

$$(\phi_m([A_k, A_1]); \phi_m([B_k, A_1])) = \sigma(A_1)(\phi_m(A_k); \phi_m(B_k)),$$

$\sigma(A_1) \neq 0$, где $m = 1, 2, \dots, g-1, k = 2, 3, \dots, g$. Последняя матрица имеет ранг $g-1$, и, переставляя линейно независимые столбцы с номерами $i_1, \dots, i_{g-1}$ на левую половину этой матрицы, получим эквивалентную матрицу $(\phi_m(N_{i_k}))$, $m = 1, 2, \dots, g-1$, $k = 1, 2, \dots, 2g-2$. Здесь $i_1, \dots, i_{2g-2}$ — перестановка символов $2, 3, \dots, g, g+2, g+3, \dots, 2g$. Обозначим эту матрицу через (M_1, M_2), $\det M_1 \neq 0$. Взяв новый базис

$$(\widetilde{\phi}_1(z), \dots, \widetilde{\phi}_{g-1}(z))' = (\phi_1(z), \dots, \phi_{g-1}(z)) M_1',$$

где $'$ означает транспонирование матрицы, получим так называемый канонический базис дифференциалов Прима, который имеет матрицу периодов вида $(I_{g-1}, M_2 M_1^{-1})$, относительно некоторой перестановки для $a_2, \dots, a_g, b_2, \dots, b_g$ на F. Отсюда вытекает

Следствие 7. *Для любого $\rho_0 \notin L_g$ существует такая окрестность $U(\rho_0) \subset \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*) \backslash L_g$, что для $\rho \in U(\rho_0)$ существует канонический базис голоморфных дифференциалов Прима на F, голоморфно зависящий от $\rho \in U(\rho_0)$, при любом $g \geq 2$.*

Доказательство. С учетом предыдущего рассуждения это следует из доказательства теоремы 1 в [7] и построения базиса голоморфных дифференциалов Прима, голоморфно зависящих от характера ρ, в [11].

Заметим, что этот результат (следствие 7) получен Р. Ганнингом [5], но его доказательство требует построения базиса голоморфных дифференциалов Прима через сложный аппарат обобщенных тэта-функций и базис голоморфно зависит только от характеров. Наше доказательство использует другой базис голоморфных дифференциалов Прима, который зависит голоморфно не только от характеров, но и от модулей компактных римановых поверхностей.

Следствие 8. *Векторное расслоение Прима* P_{10} (*и* P_{01}) *ранга* $g-1$ *будет вещественно-аналитично изоморфно тривиальному векторному расслоению над* $((1,\dots,1)\times[S^1]^g)\cap U_{g+j}$ *при любом* $j=1,\dots,g$.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение при $j=1$. Из предложения 3 в [3] или из замечания 4 при $|\rho|=1$, $\rho(A_j)=1, j=1,\dots,g$, следует, что голоморфный дифференциал Прима $\phi(z)$ для ρ единственным образом определяется набором своих A-периодов $\phi(A_1),\dots,\phi(A_g)$ с условием

$$\phi(A_1)=\frac{-1}{\sigma(B_1)}\sum_{j=2}^{g}\sigma(B_j)\phi(A_j).$$

Отсюда P_{10} вещественно-аналитически изоморфно тривиальному векторному расслоению $\{[(1,\dots,1)\times[S^1]^g]\cap U_{g+1}\}\times\mathbb{C}^{g-1}$. Следствие 8 доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Prym F., Rost G.* Theorie der Prymschen Funktionen erster Ordnung im Anschluss an die Schoepfungen Riemann's. Leipzig: Teubner, 1911.
2. *Kempf G.* A property of the periods of a Prym differential // Proc. Amer. Math. Soc. 1976. V. 54. P. 181–184.
3. *Jablow E.* An analogue of the Rauch variational formula for Prym differentials // Israel J. Math. 1989. V. 65, N3. P. 323–355.
4. *Gunning R. C.* On the period classes of Prym differentials // J. Reine Angew. Math. 1980. V. 319. P. 153–171.
5. *Gunning R. C.* Riemann surfaces and generalized theta functions. Berlin, 1976. (Ergeb. Math.; N 91).
6. *Farkas H. M., Kra I.* Riemann surfaces. New York: Springer-Verl., 1992. (Grad. Text's Math.; N 71).
7. *Чуешев В. В.* Гармонические и голоморфные дифференциалы Прима на компактной римановой поверхности // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 2. С. 465–475.
8. *Gunning R. C.* Lectures on vector bundles over Riemann surfaces. Princeton: Princeton Univ. Press, 1972. (Math. Notes; N 6).
9. *Чуешев В. В., Чуешева Н. А.* Справочное пособие по теории функций комплексного переменного. Кемерово: Кемеровский гос. ун-т, 1993. Т. 3.
10. *Гриффитс Ф., Харрис Дж.* Принципы алгебраической геометрии. М.: Мир, 1982. Т. 1.
11. *Чуешев В. В.* Векторные расслоение Прима и расслоение Ганнинга над пространством Тейхмюллера // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 4. С. 935–949.

Статья поступила 11 апреля 2001 г.

Чуешев Виктор Васильевич
Кемеровский гос. университет, ул. Красная, 6, Кемерово 650043
chueshev@lanserv1.kemsu.ru