*Сибирский математический журнал*
*Июль—август, 2002. Том 43, № 4*

*УДК 512*

# АБСТРАКТНЫЕ КЛОНЫ И ОПЕРАДЫ

**С. Н. Тронин**

**Аннотация:** Устанавливается связь между абстрактными клонами и операдами, которая состоит в том, что и клоны, и операды являются частными случаями более общего понятия, которое в данной работе называется $W$-операдой (ввиду большего внешнего сходства с операдами) и которое можно рассматривать как функтор на подкатегории $W$ категории конечных ординалов, обладающей несколькими достаточно естественными свойствами. Когда $W$ — категория, морфизмы которой — всевозможные биекции, многообразие $W$-операд рационально эквивалентно многообразию операд в традиционном смысле. Основной результат работы: если $W$ совпадает с категорией всех конечных ординалов, то многообразие $W$-операд рационально эквивалентно многообразию абстрактных клонов.

**Ключевые слова:** операда, абстрактный клон, многообразие, рациональная эквивалентность

В данной работе устанавливается связь между абстрактными клонами, давно и хорошо известными алгебраистам [1, с. 317], и операдами, более распространенными пока в топологии [2, 3]. Коротко эту связь можно выразить так: и клоны, и операды являются частными случаями некоторого более общего понятия, которое в данной работе будет называться *$W$-операдой* (ввиду бо́льшего внешнего сходства с операдами) и которое можно рассматривать как функтор на подкатегории $W$ категории конечных ординалов, обладающей несколькими достаточно естественными свойствами. Когда $W$ — категория, морфизмы которой — всевозможные биекции, то $W$-операды — это операды в традиционном смысле. Если же $W$ совпадает с категорией всех конечных ординалов, то $W$-операды, по сути, то же самое, что и абстрактные клоны (точнее, рационально эквивалентны им). Существуют и другие категории $W$, для которых определены $W$-операды, но их роль еще предстоит выяснить. Основной результат данной работы был анонсирован в [4]. Заметим, что наличие тесной связи между клонами и операдами чувствовалось давно и само понятие операды (в линейном случае), по-видимому, впервые появилось под названием «клона полилинейных операций» [5]. Термин «операда» появился в работе [2] спустя три года. О современном состоянии теории операд можно судить, например, по работам [6–9]. К настоящему моменту большая часть того, что сделано в теории операд, относится так или иначе к топологии или к ее приложениям. В 2001 г. вышла монография [10], посвященная в основном операдам в категориях топологических пространств и цепных комплексов. Имеется также ряд статей, в которых операды изучаются в связи с их применениями в теории категорий, а также физике. Эти темы не имеют прямого отношения к данной работе, и мы

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00469).

ограничимся только упоминанием о них. Несмотря на то, что понятие операды является, по сути, алгебраическим, именно с этой стороны оно пока изучено недостаточно. Цель данной работы — выявить одну из точек соприкосновения между теорией операд и классической алгеброй.

Напомним определение абстрактного клона (далее просто клона) в удобной для нас форме. *Клоном* называется семейство множеств $R = \{R(n) \mid n \geq 0\}$, причем в каждом $R(n)$, $n \geq 1$, выделено множество элементов (проекций) $p_{1,n}, \dots, p_{n,n}$ и для любой пары целых чисел $m > 0$, $n \geq 0$ определены операции суперпозиции $R(m) \times R(n)^m \to R(n)$, действие которых в данной работе будет обозначаться так: $(x, y_1, \dots, y_m) \mapsto [xy_1 \dots y_m]$. Строки $y_1 \dots y_m$ часто будут записываться как $\bar{y}$. Должны быть выполнены следующие свойства:

1) (ассоциативность) $[x[y_1\bar{z}] \dots [y_m\bar{z}]] = [[xy_1 \dots y_m]\bar{z}]$ для всех $x \in R(m)$, $y_i \in R(n)$, $\bar{z} = z_1 \dots z_n$, $z_j \in R(k)$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq k$;

2) $[p_{i,m}y_1 \dots y_m] = y_i$, $[xp_{1,m} \dots p_{m,m}] = x$ при любых таких же $x, y_1, \dots, y_m$.

Гомоморфизм $f$ клона $R$ в клон $K$ — это семейство $f = \{f_n \mid n \geq 0\}$ отображений $f_n : R(n) \to K(n)$ такое, что должны быть выполнены свойства: $f_n([xy_1 \dots y_m]) = [f_m(x)f_n(y_1) \dots f_n(y_m)]$ и $f_n(p_{i,n}) = p_{i,n}$ для всех возможных значений $n$, $m$ и для всех возможных значений аргументов функций.

Хорошо известно, что каждый клон $R$ можно описать как семейство свободных алгебр некоторого многообразия универсальных алгебр с базисами из $n$ элементов ($n = 0, 1, 2, \dots$). Базисными элементами являются проекции, а операция суперпозиции, по сути, есть подстановка вместо переменных свободной алгебры $R(m)$ с базисом из $m$ элементов $p_{1,m}, \dots, p_{m,m}$ элементов из свободной алгебры $R(n)$, результат которой принадлежит $R(n)$.

Чтобы дать определение операды, необходимо предварительно ввести ряд понятий и обозначений. Пусть $n \geq 0$ — натуральное число. Всюду в дальнейшем $[n]$ означает множество $\{0, 1, \dots, n\}$. Обозначим через $\mathrm{F\,Set}$ подкатегорию категории множеств с объектами $[n]$, $n \geq 0$, морфизмами которой являются такие отображения $f : [n] \to [m]$, что $f(0) = 0$ и $f^{-1}(0) = \{0\}$. Заметим, что категория $\mathrm{F\,Set}$ изоморфна категории $\mathrm{Fin\,Ord}$ всех конечных ординалов, т. е. категории с объектами — множествами $\{1, \dots, n\}$, $n \geq 1$, морфизмами которой служат всевозможные отображения. Функтор, устанавливающий изоморфизм, сопоставляет объекту $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$ объект $\{1, \dots, n\}$, а отображению $f : [n] \to [m]$ — его ограничение на подмножество $\{1, \dots, n\}$ множества $[n]$, образ которого принадлежит подмножеству $\{1, \dots, m\}$ множества $[m]$. Обратный функтор строится очевидным образом.

Категория $\mathrm{F\,Set}$ обладает конечными копроизведениями, которые описываются следующим образом. Естественный изоморфизм $[n] \sqcup [m] \to [n + m]$ отображает $i \in [n]$ в $i \in [n + m]$, $j \in [m]$, $j > 0$ в $n + j \in [n + m]$. Поэтому если даны $f : [n] \to [m]$, $g : [p] \to [q]$, то $f \sqcup g : [n + p] \to [m + q]$ действует следующим образом: $(f \sqcup g)(i) = f(i)$ при $0 \leq i \leq n$, $(f \sqcup g)(j) = m + g(j)$ при $1 \leq j \leq p$.

*Разбиением* натурального числа $n$ на $m$ частей в данной работе будем называть неубывающее отображение вида $\alpha : [n] \to [m]$, являющееся морфизмом $\mathrm{F\,Set}$. Через $P$ обозначим категорию с объектами $[n]$ и множествами морфизмов $P(n, m) = P([n], [m])$, состоящими из всевозможных разбиений $n$ на $m$ частей. Для $\alpha \in P(n, m)$ и для всех $1 \leq i \leq m$ положим $n_i = |\alpha^{-1}(i)|$. Тогда $\alpha$ можно отождествить с упорядоченной последовательностью $(n_1, \dots, n_m)$ целых неотрицательных чисел длины $m$ такой, что $n_1 + \dots + n_m = n$. Этим объясняется выбор термина. Если $\beta \in P(n, m)$, $\alpha \in P(m, k)$, $\alpha = (m_1, \dots, m_k)$, то $\beta$

можно записать в виде $(n_{1,1}, \dots, n_{1,m_1}, \dots, n_{k,1}, \dots, n_{k,m_k})$. Теперь композицию $\alpha\beta$ можно описать как последовательность $\left(\sum\limits_{i=1}^{m_1} n_{1,i}, \dots, \sum\limits_{i=1}^{m_k} n_{k,i}\right)$. В случае, когда $n_1 = \dots = n_m = k$, разбиение $\alpha$ будем обозначать через $\alpha = (k^m)$. Если $\alpha \in P(n,m)$, $\beta \in P(k,l)$ то $\alpha \sqcup \beta \in P(n+k, m+l)$ (хотя $[n+m]$ не является копроизведением $[n]$ и $[m]$ в $P$). Любое разбиение $\alpha : [n] \to [m]$, представленное в форме $(n_1, \dots, n_m)$, можно считать морфизмом $t_{n_1} \sqcup \dots \sqcup t_{n_m} : [n_1] \sqcup \dots \sqcup [n_m] \to [1] \sqcup \dots \sqcup [1] = [m]$, где $t_k$ обозначает единственный морфизм категории $\mathrm{F\,Set}$ из $[k]$ в $[1]$.

В категории $\mathrm{F\,Set}$, изоморфной топосу $\mathrm{Fin\,Ord}$, существуют также расслоенные произведения. Нам понадобится их явный вид в одном частном случае. Далее через $[p,q]$ при $p \le q$ будет обозначаться множество целых чисел $\{p, p+1, \dots, q-1, q\}$. Пусть $\alpha \in P(n,m)$, $f : [k] \to [m]$ — морфизм из $\mathrm{F\,Set}$. Рассмотрим расслоенное произведение (декартов квадрат) вида

$$\begin{array}{ccc} [n] \times_{[m]} [k] & \xrightarrow{\pi_2} & [k] \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & {\scriptstyle f}\downarrow \\ [n] & \xrightarrow{\alpha} & [m]. \end{array}$$

**Лемма 1.** *В категории* $\mathrm{F\,Set}$ *это расслоенное произведение устроено следующим образом. Пусть* $\alpha = (n_1, \dots, n_m)$. *В качестве* $[n] \times_{[m]} [k]$ *можно взять объект* $[n_{f(1)} + \dots + n_{f(k)}]$. *При этом* $\pi_2$ *становится неубывающей сюръекцией, которую можно записать в виде разбиения* $(n_{f(1)}, \dots, n_{f(k)})$. *Проекция* $\pi_1$ *описывается так: ее ограничение на каждый отрезок* $[n_{f(1)} + \dots + n_{f(j-1)} + 1, n_{f(1)} + \dots + n_{f(j)}]$ *— неубывающая биекция на отрезок* $[n_1 + \dots + n_{f(j)-1} + 1, n_1 + \dots + n_{f(j)}]$ *и* $\pi_1(0) = 0$.

Доказательство. Используем кроме изоморфизма между $\mathrm{F\,Set}$ и $\mathrm{Fin\,Ord}$ еще тот факт, что категория $\mathrm{Fin\,Ord}$ эквивалентна категории $FinSet$ всех конечных множеств и их отображений. Отображая с помощью этих двух эквивалентностей объект $[n] \times_{[m]} [k]$ в категорию $FinSet$, получаем множество $\mathrm{X} = \{(i,j) \mid 1 \le i \le n_{f(j)},\ 1 \le j \le k\}$, причем $\pi_1((i,j)) = n_1 + \dots + n_{f(j-1)} + i$, $\pi_2(i,j) = j$. При обратном переходе в $\mathrm{Fin\,Ord}$ множество $X$ отображается в объект, изоморфный объекту $\{1, 2, \dots, n_{f(1)} + \dots + n_{f(k)}\}$ этой категории, причем элементу $(i,j)$ соответствует число $n_{f(1)} + \dots + n_{f(j-1)} + i$. При последующем переходе в $\mathrm{F\,Set}$ к этому множеству добавляется 0, и оно превращается в $[n_{f(1)} + \dots + n_{f(k)}]$. Морфизмы $\pi_1$ и $\pi_2$, как нетрудно убедиться, приобретают при этом вид, указанный в формулировке леммы. $\square$

Проекцию $\pi_2 = (n_{f(1)}, \dots, n_{f(k)})$ будем обозначать через $\alpha f$. Преимущество такого обозначения в том, что если дано $g : [p] \to [k]$, то $\alpha(fg) = (\alpha f)g$. Проекцию $\pi_1$ обозначим через $f^*\alpha$. Следуя терминологии и обозначениям из [11], заметим, что $f^*\alpha$ есть не что иное, как подъем $\alpha$ вдоль $f$. Множество $[n_{f(1)} + \dots + n_{f(k)}]$ можно рассматривать как результат применения функтора замены базы, т. е. как $f^*[n]$.

Определение 1. Рассмотрим подкатегорию $W \subseteq \mathrm{F\,Set}$ со всеми теми же объектами $[n]$, морфизмы которой должны удовлетворять следующим условиям:

1) если $f, g \in \mathrm{Mor}(W)$, то $f \sqcup g \in \mathrm{Mor}(W)$;

2) если $f : [k] \to [m]$ — есть морфизм из $W$, то для любого $\alpha \in P(n,m)$ имеет место включение $f^*\alpha \in W(f^*[n],[n])$.

Категорию $W$ с указанными выше двумя свойствами будем называть *вербальной.*

Укажем несколько очевидных примеров вербальных подкатегорий.

1. Тривиальная категория Id, морфизмы которой — тождественные отображения вида $[n] \to [n]$ для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$.

2. Категория $\Sigma$, в которой $\Sigma(n,m)$ пусто при $n \neq m$, а $\Sigma(n,n) = \Sigma_n$, — группа подстановок $n$-й степени.

3. Категория $P$.

4. Категория Mon, морфизмами которой являются все мономорфизмы (т. е. инъекции) из F Set. То, что инъекции и мономорфизмы в F Set — это одно и то же, следует из эквивалентности категорий F Set и Fin Ord. Первое свойство из определения вербальной категории для Mon очевидно. Чтобы проверить второе, надо вспомнить, что в любом топосе из мономорфности $f$ следует мономорфность $f^*\alpha$ для любого $\alpha$.

5. Категория Epi, морфизмами которой являются все эпиморфизмы (т. е. сюръекции) из F Set. Как и выше, чтобы проверить это, проще всего использовать эквивалентность F Set и Fin Ord. Здесь надо использовать то, что в топосе Fin Ord из эпиморфности $f$ следует эпиморфность $f^*\alpha$.

6. Если $W_1$ и $W_2$ — две вербальные категории, то вербальной является и категория $W_1 \cap W_2$, класс морфизмов которой есть $\mathrm{Mor}(W_1) \cap \mathrm{Mor}(W_2)$. В частности, $\mathrm{Epi} \cap \mathrm{Mon} = \Sigma$, $P \cap \Sigma = \mathrm{Id}$.

7. Наконец, вся категория F Set также является вербальной.

Аналогично тому, как это сделано выше для расслоенных произведений, прямые произведения $[n] \times [k]$ в F Set можно описать следующим образом. Из обычного теоретико-множественного описания произведения как множества пар исключаются пары вида $(i, 0)$, $i > 0$, $(0, j)$, $j > 0$, после чего производится отождествление оставшегося подмножества с $[nk] \in \mathrm{Ob}(\mathrm{F\,Set})$, причем $(0, 0)$ соответствует элементу 0, а паре $(i, j)$, где $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq k$, соответствует $i + n(j-1) \in [nk]$. Проекция на второй сомножитель $\pi_2 : [nk] \to [k]$ при этом оказывается морфизмом $(n^k)$ из $P$. Первую проекцию $\pi_1 : [nk] \to [n]$ будем также обозначать через $\mu_{k,n}$. Она отображает в $i$, $1 \leq i \leq n$, элементы вида $i, i+n, i+2n, \ldots, i+(k-1)n$. При отождествлении $[nk]$ с $k$-кратным копроизведением $\sqcup[n]$ то же самое отображение получается по универсальному свойству копроизведений из семейства тождественных отображений $[n] \to [n]$ (коконуса), взятых по одному для каждого «слагаемого» в копроизведении. Если даны $f : [n] \to [m]$, $g : [k] \to [l]$, то $f \times g : [nm] \to [kl]$ определяется формулой $i + (j-1)n \mapsto f(i) + (g(j)-1)m$.

Докажем одно существенное свойство вербальных подкатегорий F Set.

**Лемма 2.** *Пусть $W$ — вербальная подкатегория категории* F Set*, $f \in W([n],[m])$, $g \in W([k],[l])$. Тогда $f \times g \in W([nk],[ml])$.*

Доказательство. Представим $f \times g$ в виде композиции $f \times 1_{[k]} : [nk] \to [mk]$ и $1_{[n]} \times g : [nk] \to [nl]$. Легко заметить, что отображение $f \times 1$, действующее по правилу $i + (j-1)n \mapsto f(i) + (j-1)m$, совпадает с отображением

$$f \sqcup \cdots \sqcup f : [nk] = [n] \sqcup \cdots \sqcup [n] \to [m] \sqcup \cdots \sqcup [m] = [mk].$$

Согласно определению вербальной категории отсюда следует, что $f \times 1 \in \mathrm{Mor}(W)$. Из этого, однако, не вытекает автоматически, что $1 \times g \in \mathrm{Mor}(W)$.

Воспользуемся таким фактом. В любой категории с прямыми произведениями квадрат

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "1\times g"] \arrow[d, "\pi_Y"'] & X \times Z \arrow[d, "\pi_Z"'] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

будет декартовым. Здесь $\pi_Y$, $\pi_Z$ обозначают проекции на соответствующие множители. Частным случаем этого является диаграмма

$$\begin{tikzcd} {[nk]} \arrow[r, "1\times g"] \arrow[d, "(n^k)"'] & {[nl]} \arrow[d, "(n^l)"'] \\ {[k]} \arrow[r, "g"] & {[l].} \end{tikzcd}$$

Отсюда согласно второму условию из определения вербальной категории следует, что $1 \times g \in \mathrm{Mor}(W)$. $\square$

Определение 2. Пусть $W$ — вербальная категория. $W$-*операдой* будем называть семейство множеств $R = \{R(n) \mid n \geq 0\}$ такое, что для любых упорядоченных последовательностей неотрицательных целых чисел $(n_1, \ldots, n_m)$, $m \geq 1$, определены операции композиции $R(m) \times R(n_1) \times \cdots \times R(n_m) \to R(n_1 + \cdots + n_m)$, действие которых будет обозначаться так: $(x, y_1, \ldots, y_m) \mapsto xy_1 \ldots y_m = x(y_1 \ldots y_m) = x\bar{y}$. Должен быть выделен также элемент $\varepsilon \in R(1)$ (единица операды). Список свойств, которыми по определению должна обладать операда, выглядит следующим образом.

1. (Ассоциативность) $x(y_1\bar{z}_1)\ldots(y_m\bar{z}_m) = (xy_1\ldots y_m)\bar{z}_1\ldots\bar{z}_m$ для любых $x \in R(m)$, $y_i \in R(n_i)$, $1 \leq i \leq m$, $\bar{z}_i = z_{i1}\ldots z_{in_i}$, $z_{i,j} \in R(k_{ij})$, $1 \leq j \leq n_i$.

2. Имеют место равенства $\varepsilon x = x = x\varepsilon \ldots \varepsilon$ для любого $x \in R(m)$, $m \geq 1$.

3. Соответствие $n \mapsto R(n)$ — ковариантный функтор, определенный на категории $W$, действие которого обозначается так: если $f \in W([n],[m])$, $x \in R(n)$, то $R(f)(x) = fx \in R(m)$. Отображение $R(f) : R(n) \to R(m)$ также будем иногда ради краткости обозначать через $f$.

4. Если $f_i : [n_i] \to [k_i]$, $1 \leq i \leq m$, — морфизмы категории $W$, $x \in R(m)$, $y_i \in R(n_i)$, то имеет место тождество $x(f_1y_1)\ldots(f_my_m) = (f_1 \sqcup \cdots \sqcup f_m)(xy_1\ldots y_m)$.

5. Если $f : [k] \to [m]$ является морфизмом $W$, $\alpha = (n_1, \ldots, n_m) \in P(n, m)$, $x \in R(k)$, $y_i \in R(n_i)$, $1 \leq i \leq m$, то имеет место тождество $(fx)y_1\ldots y_m = (f^*\alpha)(xy_{f(1)}\ldots y_{f(k)})$.

Тождества из пп. 4 и 5 можно найти (в несколько иной форме и в ином контексте) в книге [3].

Определение 3. *Гомоморфизмом* (или *морфизмом*) $W$-операды $R$ в $W$-операдy $K$ будем называть семейство отображений $h = \{h_n \mid h_n : R(n) \to K(n),\ n \geq 0\}$ такое, что $h_1(\varepsilon) = \varepsilon$ и

$$h_{n_1+\cdots+n_m}(xy_1\ldots y_m) = h_m(x)h_{n_1}(y_1)\ldots h_{n_m}(y_m)$$

во всех случаях, когда определены левая и правая части равенства. Кроме того, семейство $h$ должно быть естественным преобразованием функторов из категории $W$.

Прежде чем сформулировать основные результаты работы, напомним необходимый нам вариант определения рациональной эквивалентности [12, 13].

Определение 4. Пусть $\mathrm{Sets}^\omega$ — категория счетных семейств множеств, морфизмы которой определяются как счетные семейства отображений с «покомпонентной» композицией. Рассмотрим два многообразия (категории) $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ многоосновных алгебр со счетным семейством основ, и пусть $U_i : \mathbf{M}_i \to \mathrm{Sets}^\omega$, $i = 1, 2,$ — соответствующие забывающие функторы. Многообразия $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ будем называть *рационально эквивалентными*, если существует изоморфизм категорий (не просто эквивалентность!) $F : \mathbf{M}_1 \to \mathbf{M}_2$ такой, что выполнено строгое равенство $FU_1 = U_2$.

В [13] это свойство названо категорной эквивалентностью, но там же показано, что данное свойство равносильно рациональной эквивалентности, введенной и изученной А. И. Мальцевым в [12]. Доказательства для многоосновных алгебр, по сути, те же самые, что и для одноосновных. Неформально говоря, рациональная эквивалентность означает, что на одних и тех же множествах (в нашей ситуации на счетных семействах множеств) определены два набора операций и их можно выразить друг через друга взаимно обратным образом.

Категории абстрактных клонов и $W$-операд являются многообразиями многоосновных алгебр со счетным множеством основ, так как замкнуты относительно взятия произвольных прямых произведений, подобъектов (подклонов или подоперад) и гомоморфных образов. Обозначим их через Clones и $W$-Operads соответственно.

Отличия нашего определения $\Sigma$-операды от имеющихся в цитированной литературе, как показывает следующее утверждение, являются сугубо внешними.

**Предложение.** *Многообразие $\Sigma$-операд рационально эквивалентно многообразию собственно операд, т. е. таких операд, которые определяются в цитированной литературе.*

Доказательство. Сначала заметим, что $W$-операду $R$ можно рассматривать как контравариантный функтор на двойственной к $W$ категории $W^{op}$. При таком подходе естественно писать $xf$ вместо $fx$, а так как копроизведения в $W^{op}$ становятся прямыми произведениями, то тождество из п. 4 выглядит так:

$$x(y_1f_1)\dots(y_mf_m) = (xy_1\dots y_m)(f_1\times\dots\times f_m).$$

Пусть $W = \Sigma$. Очевидно, что морфизмы из $W^{op}$ можно мыслить как подстановки, обратные к подстановкам из $\Sigma$, так что их умножение производится по правилу $\sigma\cdot\tau = \tau^{-1}\sigma^{-1}$. Если $\alpha = (n_1, \dots, n_m)$, $f = \sigma \in \Sigma_m$ (предполагаем $k = m$ в приведенной выше диаграмме, из которой определяется $f^*\alpha$), то $\sigma^*\alpha$ — подстановка, обратную к которой можно описать следующим образом. Разобьем упорядоченную последовательность $1, 2, \dots, n_1+\dots+n_m$ на «блоки» — отрезки: $b_1 = [1, n_1]$, $b_2 = [n_1+1, n_1+n_2]$, ... , $b_m = [n_1+\dots+n_{m-1}+1, n_1+\dots+n_{m-1}+n_m]$. Тогда $(\sigma^*\alpha)^{-1} = \begin{pmatrix} b_1b_2\dots b_m \\ b_{\sigma(1)}b_{\sigma(2)}\dots b_{\sigma(m)}\end{pmatrix}$. Эту подстановку многие авторы записывают так: $\sigma(n_1, \dots, n_m)$. В этих обозначениях свойство 5 из нашего определения операды приобретает следующий вид:

$$(x\sigma)y_1\dots y_m = (xy_{\sigma(1)}\dots y_{\sigma(m)})\sigma(n_1, \dots, n_m).$$

Таким образом, действие функтора, сопоставляющего $\Sigma$-операде операду в том смысле, который используется в цитированной литературе, сводится, по сути, к изменению обозначений. $\square$

Напомним вкратце примеры операд, из которых будет видно сходство и отличие между операдами и клонами.

Пример 1. Пусть $X$, $Y$ — произвольные множества, и пусть $\mathrm{Map}(X, Y)$ — множество всех отображений из $X$ в $Y$. Положим $R(n) = \mathrm{Map}(X^n, X)$, и определим композицию следующим образом. Пусть $\bar{x}_i \in X^{n_i}$, $1 \le i \le m$, $n_i \ge 0$, тогда $\bar{x}_1 \dots \bar{x}_m \in X^{n_1+\dots+n_m}$. Пусть $f \in R(m)$, $F_i \in R(n_i)$. По определению имеем $ff_1 \dots f_m(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_m) = f(f_1(\bar{x}_1), \dots, f_m(\bar{x}_m))$. Другое название этой операции — бесповторная суперпозиция. Легко убедиться в ее ассоциативности, а также в том, что роль единицы $\varepsilon$ играет тождественное отображение $X \to X$. Если $\sigma : [n] \to [m]$ — морфизм категории $\mathrm{F\,Set}$, то для $f \in R(n)$, $\bar{x} = x_1 \dots x_m \in X^m$ положим $(\sigma f)(\bar{x}) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$. Свойства $\mathrm{F\,Set}$-операды проверяются непосредственно.

Пример 2. Положим $R(n) = \{\varepsilon_n\}$ при $n \ge 0$, и пусть при $m > 0$ композиция определяется так: $\varepsilon_m \varepsilon_{n_1} \dots \varepsilon_{n_m} = \varepsilon_{n_1+\dots+n_m}$. Нетрудно убедиться, что композиция ассоциативна и что $\varepsilon_1$ играет роль единицы. Для $\sigma : [n] \to [m]$ (морфизма категории $\mathrm{F\,Set}$) полагаем $\sigma\varepsilon_n = \varepsilon_m$. Выполнимость оставшихся свойств операды очевидна.

Пример 3. Положим $R(n) = \Sigma_n$ для $n \ge 1$, и пусть $R(0)$ — одноэлементное множество. Если $\sigma_m \in R(m)$, $m > 0$, $\sigma_{n_i} \in R(n_i)$, $\alpha = (n_1, \dots, n_m) \in P(n_1 + \dots + n_m, m)$, то полагаем $\sigma\sigma_1 \dots \sigma_m = (\sigma^*\alpha)(\sigma_1 \sqcup \dots \sqcup \sigma_m)$. Это произведение подстановок из $\Sigma_{n_1+\dots+n_m}$. В случае, когда какой-то $n_i$ равен 0, соответствующее «слагаемое» $\sigma_i$ пропускается. Чтобы получить $\Sigma$-операду, определяем действие $\Sigma_n$ на $R(n)$ слева как умножение подстановок. Это один из самых известных примеров операд.

Сформулируем основной результат работы.

**Теорема.** *Многообразие* $\mathrm{F\,Set}$*-операд рационально эквивалентно многообразию абстрактных клонов.*

Доказательство. Неформально говоря, будет показано, что структура абстрактного клона на $R$ определяет некоторую структуру $\mathrm{F\,Set}$-операды на том же семействе $R$, а структура $\mathrm{F\,Set}$-операды на $R$ определяет на $R$ структуру клона и эти соответствия взаимно обратны.

Дадим теперь точное определение функтора $F$ из категории $\mathrm{F\,Set}$-операд в категорию Clones. Пусть дана операда $R$. Превратим ее в клон следующим образом. В качестве операции суперпозиции в клоне возьмем композицию отображений $R(m) \times R(n)^m \longrightarrow R(nm) \xrightarrow{\mu_{m,n}} R(n)$. Левая стрелка здесь обозначает композицию в операде $R$. Иными словами, $[xy_1 \dots y_m] = \mu_{m,n}(xy_1 \dots y_m)$. Пусть $p_i^n : [1] \to [n]$ — морфизм $\mathrm{F\,Set}$, отображающий 1 в $i \in [n]$, $1 \le i \le n$. Рассмотрим соответствующие отображения $p_i^n : R(1) \to R(n)$. В качестве проекций берутся элементы $p_{i,n} = p_i^n\varepsilon \in R(n)$. Проверим выполнение свойств из определения клона. Начнем с ассоциативности. Смысл обозначений тот же, что и в данном в начале работы определении клона. При проведении преобразований используются свойства 3, 4 и 1 из определения операды:

$$
\begin{aligned}
[x[y_1\bar{z}] \dots [y_1\bar{z}]] = \mu_{m,k}(x[y_1\bar{z}] \dots [y_m\bar{z}]) &= \mu_{m,k}(x(\mu_{n,k}(y_1\bar{z}) \dots (\mu_{n,k}(y_m\bar{z}))) \\
&= \mu_{m,k}(\mu_{n,k} \sqcup \dots \sqcup \mu_{n,k})(x(y_1\bar{z}) \dots (y_m\bar{z})) \\
&= \mu_{m,k}(\mu_{n,k} \sqcup \dots \sqcup \mu_{n,k})((xy_1 \dots y_m)\bar{z} \dots \bar{z}).
\end{aligned}
$$

В последнем выражении $\mu_{n,k}$ и $\bar{z} = z_1 \dots z_n$ повторяются по $m$ раз. С другой стороны,

$$[[xy_1\dots y_m]\bar z] = [(\mu_{m,n}(xy_1\dots y_m))\bar z] = \mu_{n,k}((\mu_{m,n}(xy_1\dots y_m))\bar z)$$
$$= \mu_{n,k}((\mu_{m,n})^*\alpha)((xy_1\dots y_m)\bar z\dots \bar z).$$

Здесь $\alpha = (k^n) \in P(nk, k)$ и последнее выражение получено в результате применения свойства 5 из определения операды, в котором роль $f$ играет $\mu_{m,n} : [nm] \to [n]$. Строка $z_{f(1)} \dots z_{f(nm)}$, согласно определению $\mu_{m,n}$ является сцеплением $\bar z$ с самой собой $m$ раз. Необходимое нам равенство получится, если будет доказано, что имеет место равенство морфизмов из $\mathrm{F\,Set}$:

$$\mu_{m,k}(\mu_{n,k} \sqcup \dots \sqcup \mu_{n,k}) = \mu_{n,k}((\mu_{m,n})^*\alpha).$$

Заметим сначала, что в любой категории с прямыми произведениями диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \times Y \times Z \arrow[r, "\pi_{2,3}"] \arrow[d, "\pi_{1,2}"'] & Y \times Z \arrow[d, "\pi_1"'] \\ X \times Y \arrow[r, "\pi_2"] & Y \end{tikzcd}$$

будет декартовым квадратом. Здесь буквой $\pi$ обозначены соответствующие проекции, например, «поэлементно» $\pi_{2,3}(x, y, z) = (y, z)$, $\pi_1(y, z) = y$ и т. п. Рассмотрим категорию $\mathrm{F\,Set}$ и положим $X = [k]$, $Y = [n]$, $Z = [m]$. Тогда для приведенной выше диаграммы $X \times Y \times Z = [knm]$, $X \times Y = [kn]$, $Y \times Z = [nm]$, $\pi_1 = \mu_{m,n}$, $\pi_2 = (k^n) = \alpha$, $\pi_{2,3} = (k^{nm})$, $\pi_{1,2} = \mu_{m,kn}$. Но так как $\pi_{2,3} = (k^{nm})$ — неубывающее отображение, то из декартовости квадрата и определения $(\mu_{m,n})^*\alpha$ следует, что $(\mu_{m,n})^*(k^n) = \mu_{m,kn}$. Таким образом, требуется установить равенство

$$\mu_{m,k}(\mu_{n,k} \sqcup \dots \sqcup \mu_{n,k}) = \mu_{n,k}\mu_{m,nk}.$$

Чтобы убедиться в его справедливости, будем представлять $[knm]$ как копроизведение $mn$ экземпляров $[k]$, $[mk]$ — как копроизведение $m$ экземпляров $[k]$, $[nk]$ — как копроизведение $n$ экземпляров $[k]$ и рассмотрим ограничение отображений в левой и правой частях на какое-либо «прямое слагаемое» $[k]$ в $[knm]$. Сначала представим $[knm]$ как копроизведение $m$ экземпляров $[kn]$. По определению $\mu_{n,k}$ отображение $\mu_{n,k} \sqcup \dots \sqcup \mu_{n,k}$ переводит каждый экземпляр $[k]$ из $j$-го экземпляра $[kn]$, входящего в $[kmn]$, тождественно на $j$-й экземпляр $[k]$ из $[km]$. Затем $\mu_{m,k}$ отображает этот $j$-й экземпляр тождественно на $[k]$. С другой стороны, $\mu_{m,nk}$ отображает каждый экземпляр $[nk]$ из $[kmn]$ (здесь $[kmn]$ рассматривается как копроизведение $m$ экземпляров $[nk]$) тождественно на $[nk]$. Следовательно, каждый экземпляр $[k]$ из $[kmn]$ тождественно отображается на соответствующий экземпляр «прямого слагаемого» $[k]$ из $[nk]$. Затем $\mu_{n,k}$ вновь переводит этот экземпляр $[k]$ тождественно на $[k]$. Таким образом, ограничение отображений в левой и правой частях доказываемого равенства на каждое «прямое слагаемое» $[k]$ из $[knm]$ — тождественное отображение, и равенство (а вместе с ним и ассоциативность суперпозиции в абстрактном клоне) установлено.

Осталось проверить свойства $p_{i,n} = p_i^n\varepsilon$. Пусть $x \in R(n)$. Тогда

$$[xp_{1,n}\dots p_{n,n}] = \mu_{n,n}x((p_1^n\varepsilon)\dots(p_n^n\varepsilon))$$
$$= \mu_{n,n}(p_1^n \sqcup \dots \sqcup p_n^n)(x\varepsilon\dots\varepsilon) = \mu_{n,n}(p_1^n \sqcup \dots \sqcup p_n^n)x.$$

Отсюда следует, что необходимое равенство может быть получено из тождества $\mu_{n,n}(p_1^n \sqcup \dots \sqcup p_n^n) = 1_{[n]}$, которое легко вытекает из определений. Далее, пусть $\alpha = (n^m)$, $x_1, \dots, x_m \in R(n)$. Тогда, используя свойство 5 из определения операды, получим

$$[p_{i,m}x_1 \dots x_m] = \mu_{m,n}(p_i^m \varepsilon)(x_1 \dots x_m) = \mu_{m,n}((p_i^m)^*\alpha)(\varepsilon x_i) = \mu_{m,n}((p_i^m)^*\alpha)x_i.$$

Необходимое нам равенство получится, если будет доказано тождество $\mu_{m,n}((p_i^m)^*(n^m)) = 1_{[n]}$. Прямо из конструкции расслоенного произведения следует, что $(p_i^m)^*(n^m)$ — сохраняющая порядок биекция $[n]$ на $i$-е «прямое слагаемое» $[n]$ в $nm$. Осталось еще раз использовать тот факт, что ограничение $\mu_{m,n}$ на каждое такое «прямое слагаемое» является тождественным отображением. Это завершает построение клона. По определению если $R$ — операда, то $F(R)$ — это только что построенный абстрактный клон. Легко убедиться, что гомоморфизм операд $h : R \to K$ таким же образом превращается в гомоморфизм клонов $F(h) : F(R) \to F(K)$. Это завершает построение функтора $F : \mathrm{F\,Set\text{-}Operads} \to \mathrm{Clones}$. Из самого построения видно, что если $U_O : \mathrm{F\,Set\text{-}Operads} \to \mathrm{Sets}^\omega$, $U_C : \mathrm{Clones} \to \mathrm{Sets}^\omega$ — забывающие функторы, то $U_C F = U_O$.

Построим обратный к $F$ функтор $G$. Пусть $K$ — абстрактный клон. Превратим соответствие $[n] \mapsto K(n)$ в функтор, определенный на категории $\mathrm{F\,Set}$, полагая для $f : [n] \to [m]$ и $x \in K(n)$ значение $K(f)(x) = fx$ равным $[xp_{f(1),m} \dots p_{f(n),m}]$. Пусть дан еще один морфизм $g : [m] \to [k]$ категории $\mathrm{F\,Set}$. Проверим, что $g(fx) = (gf)x$

$$\begin{aligned} g(fx) &= [[xp_{f(1),m} \dots p_{f(n),m}]p_{g(1),k} \dots p_{g(m),k}] \\ &= [x[p_{f(1),m}(p_{g(1),k} \dots p_{g(m),k})] \dots [p_{f(n),m}(p_{g(1),k} \dots p_{g(m),k})]]. \end{aligned}$$

Так как $[p_{f(i),m}(p_{g(1),k} \dots p_{g(m),k})] = p_{g(f(i)),k}$, последнее выражение есть $(gf)x$. Из определения клона также сразу следует $1_{[n]}x = [xp_{1,n} \dots p_{n,n}] = x$. Это завершает проверку функториальности.

Установим некоторые необходимые для дальнейшего соотношения. Пусть $x \in K(m)$, $x_i \in K(n)$, $1 \le i \le m$, $f : [n] \to [k]$ — морфизм $\mathrm{F\,Set}$. Тогда

$$[x(fx_1) \dots (fx_m)] = f[xx_1 \dots x_m]. \tag{$*$}$$

В самом деле, если $\bar{p} = p_{f(1),k} \dots p_{f(n),k}$, то

$$[x(fx_1) \dots (fx_m)] = [x[x_1\bar{p}] \dots [x_m\bar{p}]] = [[xx_1 \dots x_m]\bar{p}] = f[xx_1 \dots x_m].$$

Пусть $\alpha = (n_1, \dots, n_m) \in P(n,m)$. Определим отображения $r_i = r_i(\alpha) : [n_i] \to [n_1 + \dots n_m] = [n]$, $1 \le i \le m$, полагая $r_i(0) = 0$, $r_i(j) = n_1 + \dots + n_{i-1} + j$ при $1 \le j \le n_i$ (подразумевается, что $n_0 = 0$). Эти морфизмы образуют коконус, соответствующий разложению $[n_1 + \dots n_m] = [n_1] \sqcup \dots \sqcup [n_m]$. Если для всех $i$ заданы $f_i : [n_i] \to [k_i]$ из $\mathrm{F\,Set}$ и $\beta = (k_1, \dots, k_m)$, то имеют место коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} [n_i] & \xrightarrow{r_i(\alpha)} & [n_1 + \dots + n_m] \\ {\scriptstyle f_i}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \sqcup_{j=1}^m f_j} \\ [k_i] & \xrightarrow{r_i(\beta)} & [k_1 + \dots + k_i]. \end{array} \tag{$**$}$$

Определим композицию операды следующим образом:

$$\begin{aligned} xx_1 \dots x_m &= [x(r_1x_1) \dots (r_mx_m)] \\ &= [x[x_1p_{1,n} \dots p_{n_1,n}][x_2p_{n_1+1,n} \dots p_{n_1+n_2,n}] \dots [x_mp_{n_1+\dots+n_{m-1}+1,n} \dots p_{n,n}]]. \end{aligned}$$

Здесь $x \in K(m)$, $x_1 \in K(n_1)$, $\dots$, $x_m \in K(n_m)$, $n = n_1 + \dots + n_{m-1} + n_m$. Проверим сначала аксиомы $\mathrm{F\,Set}$-операды, связанные с действием морфизмов $\mathrm{F\,Set}$:

$$\begin{aligned} x(f_1x_1)\dots(f_mx_m) &= [x(r_1(\beta)f_1x_1)\dots(r_m(\beta)f_mx_1)] \\ &= [x((\sqcup f_i)r_1(\alpha)x_1)\dots((\sqcup f_i)r_m(\alpha)x_m)] \\ &= (\sqcup f_i)[x(r_1(\alpha)x_1)\dots(r_m(\alpha)x_m)] = (f_1 \sqcup \dots \sqcup f_m)(xx_1\dots x_m). \end{aligned}$$

Пусть теперь $x \in K(k)$, $x_i \in K(n_i)$, $1 \le i \le m$, и задан морфизм $f : [k] \to [m]$ категории $\mathrm{F\,Set}$. Положим $\alpha = (n_1, \dots, n_m)$, $r_i = r_i(\alpha)$ и $\bar z = (r_1x_1)\dots(r_mx_m)$. Тогда

$$\begin{aligned} (fx)(x_1\dots x_m) &= [(fx)\bar z] = [[xp_{f(1),m}\dots p_{f(1),m}]\bar z] \\ &= [x[p_{f(1),m}\bar z]\dots[p_{f(k),m}\bar z]] = [x(r_{f(1)}x_{f(1)})\dots(r_{f(k)}x_{f(k)})]. \end{aligned}$$

Вспоминая, что $\alpha f = (n_{f(1)}, \dots, n_{f(k)})$, и пользуясь легко проверяемым равенством $r_{f(i)}(\alpha) = (f^*\alpha)r_i(\alpha f)$, получим следующую цепочку преобразований:

$$\begin{aligned} [x(r_{f(1)}x_{f(1)})\dots(r_{f(k)}x_{f(k)})] &= [x((f^*\alpha)r_1(\alpha f)x_{f(1)})\dots((f^*\alpha)r_k(\alpha f)x_{f(k)})] \\ &= (f^*\alpha)[x(r_1(\alpha f)x_{f(1)})\dots(r_k(\alpha f)x_{f(k)})] = (f^*\alpha)(xx_{f(1)}\dots x_{f(k)}). \end{aligned}$$

Кроме того, при $x \in K(k)$, $x_1, \dots, x_m \in K(n)$, $f \in \mathrm{F\,Set}([k],[m])$ в клоне $K$ имеет место тождество

$$[(fx)x_1\dots x_m] = [xx_{f(1)}\dots x_{f(k)}]. \qquad (***)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} [(fx)x_1\dots x_m] &= [[xp_{f(1),m}\dots p_{f(k)}]x_1\dots x_m] \\ &= [x[p_{f(1),m}x_1\dots x_m]\dots[p_{f(k),m}x_1\dots x_m]] = [xx_{f(1)}\dots x_{f(k)}]. \end{aligned}$$

Единица строящейся операды — элемент $\varepsilon = p_{1,1} \in K(1)$. Проверим определение. Пусть $x \in K(n)$. Тогда $\varepsilon x = [p_{1,1}x] = x$ по определению $p_{1,1}$. С другой стороны,

$$x\varepsilon\dots\varepsilon = [x[p_{1,1}p_{1,n}][p_{1,1}p_{2,n}]\dots[p_{1,1}p_{n,n}]] = [xp_{1,n}p_{2,n}\dots p_{n,n}] = x.$$

Завершая построение операды, покажем ассоциативность композиции.

Пусть $x \in K(m)$, $y_i \in K(n_i)$, $1 \le i \le m$, $\bar z_i = (z_{i1}\dots z_{in_i})$, $z_{ij} \in K(k_{ij})$, $1 \le j \le n_i$. Положим $k_i = k_{i1} + \dots + k_{in_i}$, $1 \le i \le m$, $\beta = (k_1, \dots, k_m)$, $r_i = r_i(\beta) : [k_i] \to [k_1 + \dots + k_m]$, $\beta_i = (k_{i1}, \dots, k_{in_i})$, $r_{ij} = r_{ij}(\beta_i) : [k_{ij}] \to [k_i]$, $\alpha = (n_1, \dots n_m)$, $\tilde{r_i} = r_i(\alpha) : [n_i] \to [n_1 + \dots + n_m]$, $\gamma = (k_{11}, \dots, k_{1n_1}, \dots, k_{m,1}, \dots, k_{mn_m})$, $r'_{ij} = r_{ij}(\gamma) : [k_{ij}] \to \bigl[\sum\limits_{i,j} k_{ij}\bigr]$. Легко проверяется, что $r'_{ij} = r_ir_{ij}$. Будем писать $\bar r'_i\bar z_i$ вместо $(r'_{i1}z_{i1})\dots(r'_{in_i}z_{in_i})$ и $\bar z$ вместо $(\bar r'_1\bar z_1)\dots(\bar r'_m\bar z_m)$. Напомним также правило действия отображения $f : [p] \to [q]$ на строку вида $\bar a = a_1\dots a_q$: $\bar a f = a_{f(1)}\dots a_{f(p)}$. Мы будем применять его для сокращения записи. При этих обозначениях имеет место соотношение $\bar z r'_i = \bar r'_i\bar z_i$ В нижеследующих преобразованиях используются установленные ранее тождества, причем $(***)$ можно записать в форме $[(fa)\overline{b}] = [a(\overline{b}f)]$:

$$\begin{aligned} x(y_1\bar z_1)\dots(y_m\bar z_m) &= [x(r_1(y_1\bar z_1))\dots(r_m(y_m\bar z_m))] \\ &= [x(r_1[y_1(r_{11}z_{11})\dots(r_{1n_1}z_{1n_1})])\dots(r_m[y_m(r_{m1}z_{m1})\dots(r_{mn_m}z_{mn_m})])] \\ &= [x[y_1(r_1r_{11})z_{11}\dots(r_1r_{1n_1})z_{1n_1}]\dots[y_m(r_mr_{m1})z_{m1}\dots(r_mr_{mn_m})z_{mn_m}]] \\ &= [x[y_1(r'_{11}z_{11})\dots(r'_{1n_1}z_{1n_1})]\dots[y_m(r'_{m1}z_{m1})\dots(r'_{mn_m}z_{mn_m})]]. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}(xy_1\dots y_m)(\bar z_1\dots\bar z_m) &= [[x(r'_1y_1)\dots(r'_my_m)](\bar r'_1\bar z_1\dots(\bar r'_m\bar z_m]\\ &= [[x(r'_1y_1)\dots(r'_my_m)]\bar z] = [x[(r'_1y_1)\bar z]\dots[(r'_my_m)\bar z]]\\ &= [x[y_1(\bar z r'_1)]\dots[y_m(\bar z r'_m]] = [x[y_1(\bar r'_1\bar z)]\dots[y_m(\bar r'_m\bar z]].\end{aligned}$$

Таким образом, ассоциативность доказана. Построенную операду обозначим через $G(K)$. Из приведенных выше соотношений легко следует, что для любого гомоморфизма клонов $f:K\to H$ то же самое семейство отображений $\{f_n\mid n=0,1,\dots\}$ становится гомоморфизмом операд $G(K)\to G(H)$. Рассматривая его в этом качестве, обозначим через $G(f)$. Таким образом, построен функтор $G:\mathrm{Clones}\to\mathrm{F\,Set\text{-}Operads}$.

Осталось проверить взаимную обратность функторов $F$ и $G$, т. е. взаимную обратность построенных переходов от операды к клону и от клона к операде. Пусть дана операда $R$ с композицией $xx_1\dots x_m$, и пусть построен клон с суперпозицией $[xx_1\dots x_m]$. Рассмотрим операду, строящуюся по этому клону так, как это было сделано выше. Прежде всего необходимо убедиться, что для любого морфизма из $\mathrm{F\,Set}$ вида $f:[n]\to[m]$ и любого $x\in R(n)$ имеет место равенство $fx=[xp_{f(1),m}\dots p_{f(n),m}]$. В самом деле,

$$\begin{aligned}[xp_{f(1),m}\dots p_{f(n),m}] &= \mu_{m,n}\big(x\big(p^m_{f(1)}\varepsilon\big)\dots\big(p^m_{f(n)}\varepsilon\big)\big)\\ &= \mu_{m,n}\big(p^m_{f(1)}\sqcup\dots\sqcup p^m_{f(n)}\big)(x\varepsilon\dots\varepsilon).\end{aligned}$$

Следовательно, вопрос сводится к тождеству $\mu_{m,n}\big(p^m_{f(1)}\sqcup\dots\sqcup p^m_{f(n)}\big)=1_{[n]}$, которое непосредственно вытекает из определений. Таким образом, обе операды, исходная и построенная по клону, совпадают как функторы. Установим совпадение композиций. Пусть $x\in R(m)$, $\alpha=(n_1,\dots,n_m)$, $n=n_1+\dots+n_m$, $r_i=r_i(\alpha):[n_i]\to[n]$, $x_i\in R(n_i)$, $1\le i\le m$. Тогда

$$[x(r_1x_1)\dots(r_mx_m)]=\mu_{m,n}(r_1\sqcup\dots\sqcup r_m)(xx_1\dots x_m).$$

Необходимое нам равенство следует из легко проверяемого тождества $\mu_{m,n}(r_1\sqcup\dots\sqcup r_m)=1_{[n]}$.

Обратно, пусть дан клон $K$ с суперпозицией $[xx_1\dots x_m]$. Построим, как было сделано выше, операду с композицией $xx_1\dots x_m$ и по ней — новую суперпозицию. Убедимся, что она совпадает с исходной. Пусть $x\in K(m)$, $x_i\in K(n)$, $1\le i\le m$, $\alpha=(n^m)$, $r_i=r_i(\alpha):[n]\to[nm]$, $1\le i\le m$. Тогда, используя $(*)$, получим

$$\mu_{m,n}(xx_1\dots x_m)=\mu_{m,n}[x(r_1x_1)\dots(r_mx_m)]=[x(\mu_{m,n}r_1x_1)\dots(\mu_{m,n}r_mx_m)].$$

Остается несложная проверка того, что $\mu_{m,n}r_i=1_{[n]}$ для всех $i$. Очевидно также, что элементы $p_{i,n}$ одни и те же и в исходном клоне, и в построенном по операде. $\square$

Более детальный анализ определений клона и операды показывает, что можно дать их переформулировку для произвольной категории с конечными прямыми произведениями и терминальным объектом $I$. При этом «выделенные элементы» становятся морфизмами с областью определения $I$. Например, аналоги элементов $p_{i,n}\in R(n)$ (для клона) — морфизмы вида $I\to R(n)$. Аналогами тождеств из определений клона и операды являются коммутативные диаграммы. Доказательство приведенной выше теоремы полностью переносится на этот категорный случай, так как все проделанные в нем выкладки сводятся к проверкам коммутативности некоторых диаграмм. Само доказательство в принципе остается точно таким же.

Значительно интереснее дело обстоит в многоосновном случае, так как здесь существенно меняется точка зрения на смысл понятия операды, которое становится естественным многомерным обобщением понятия категории. А именно, «стрелки» могут иметь не одно начало и один конец, как в категориях, а несколько начал (входов) и один конец. Вместо категорий $\mathrm{F\,Set}$ и $P$ также приходится брать их нетривиальные обобщения, причем многоосновный аналог $P$ вообще не является подкатегорией многоосновного аналога $\mathrm{F\,Set}$. Изложение всего этого занимает достаточно много места и будет предметом другой публикации.

Наконец, имеются основания предполагать, что вербальные подкатегории категории $\mathrm{F\,Set}$ являются естественными инвариантами, позволяющими некоторым образом классифицировать тождества. Например, для многообразий линейных (мультиоператорных) алгебр автором было показано, что такие многообразие определяется полилинейными тождествами тогда и только тогда, если оно является (с точностью до рациональной эквивалентности) многообразием всех алгебр над некоторой линейной $\Sigma$-операдой [14–17]. Можно сформулировать и доказать и нелинейный аналог этого результата. Недавно удалось показать, что аналогичный факт имеет место и для многообразий супералгебр [18]. В [19] начато построение теории эквивалентности Мориты для линейных $\Sigma$-операд.

Автор выражает благодарность рецензенту за замечания, способствовавшие улучшению качества текста работы.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Общая алгебра* / В. А. Артамонов, В. Н. Салий, Л. А. Скорняков и др. Под общ. ред. Л. А. Скорнякова. М.: Наука, 1991. Т. 2
2. *May J. P.* The geometry of iterated loop spaces. Berlin: Springer-Verl., 1972. (Lecture Notes in Math.; 271).
3. *Бордман Дж., Фогт Р.* Гомотопически инвариантные алгебраические структуры на топологических пространствах. М.: Мир, 1977.
4. *Тронин С. Н.* Абстрактные клоны и операды // Логика и приложения: Тез. междунар. конфер., посвящ. 60-летию со дня рожд. акад. Ю. Л. Ершова. Новосибирск, 4–6 мая 2000 г. Новосибирск, 2000. С. 100.
5. *Артамонов В. А.* Клоны полилинейных операций // Успехи мат. наук. 1969. Т. 24, № 1. С. 47–59.
6. *Ginzburg V., Kapranov M.* Koszul duality for operads // Duke Math. J. 1994. V. 76, N 1. P. 203–272.
7. *Ginzburg V., Kapranov M.* Erratum to «Koszul duality for operads» // Duke Math. J. 1995. V. 80, N 1. P. 293.
8. *Operads*: Proc. of Renaissance Conferences / J.-L. Loday, J. D. Stasheff, A. A. Voronov (Eds.) Contemp. Math. 1996. V. 202.
9. *Kapranov M.* Operads and Algebraic Geometry // Proc. Intern congr. math. Berlin, Aug. 18–27, 1998. V. II. Invited Lectures. Berlin, 1998. P. 277–286. (Documenta Math. Extra Volume ICM. II).
10. *Smirnov V. A.* Simplicial and Operad Methods in Algebraic Topology. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 2001. (Translations of Math. Monographs; 198).
11. *Джонстон П.* Теория топосов. М.: Мир, 1986.
12. *Мальцев А. И.* Структурная характеристика некоторых классов алгебр // Докл. АН СССР. 1958. Т. 120, № 1. С. 29–32.
13. *Пинус А. Г.* Инварианты отношения рациональной эквивалентности // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 2. С. 430–436.

**14.** *Тронин С. Н.* О многообразиях, задаваемых полилинейными тождествами // Тез. сообщ. XIX Всесоюзн. алгебр. конференции, 9–11 сент. 1987. Ч 2. Львов, 1987. С. 280.

**15.** *Тронин С. Н.* О некоторых свойствах финитарных алгебраических теорий // Тез. сообщ. V Сибирской школы по многообразиям алгебраических систем, 1–5 июля 1988. Барнаул, 1988. С. 68–70.

**16.** *Тронин С. Н.* О некоторых свойствах алгебраических теорий многообразий линейных алгебр. I. Многообразия, задаваемые полилинейными тождествами / Казанский гос. ун-т.. Казань, 1988. 31 Деп. в ВИНИТИ 11.08.88, № 6511-В88.

**17.** *Тронин С. Н.* О ретракциях свободных алгебр и модулей: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Кишинев, 1989.

**18.** *Тронин С. Н.* Многообразия супералгебр и линейные операды // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: Материалы школы-конференции, посвящ. 130-летию со дня рожд. Д. Ф. Егорова, Казань, 13–18 сент. 1999. Казань: Казанское мат. общество, 1999. С. 224–227.

**19.** *Тронин С. Н., Копп О. А.* Матричные линейные операды // Изв. вузов. Математика. 2000. Т. 6. С. 52–63.

*Статья поступила 3 апреля 2001 г., окончательный вариант — 27 февраля 2002 г.*

*Тронин Сергей Николаевич*
*Казанский гос. университет, механико-математический факультет,*
*кафедра алгебры, Казань 420008*
Serge.Tronin@ksu.ru