Сибирский математический журнал
Июль—август, 2002. Том 43, № 4

УДК 517.988

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА. I

А. А. Толстоногов

Аннотация: Рассматривается управляемая система, описываемая нелинейным эволюционным уравнением второго порядка, определенным на эволюционной тройке банаховых пространств (тройка Гельфанда) со смешанным многозначным ограничением на управление, значениями которого являются невыпуклые замкнутые множества. Наряду с исходной системой рассматривается система со следующими ограничениями на управление: ограничение, значениями которого являются замкнутая выпуклая оболочка значений исходного ограничения; ограничение, значениями которого являются экстремальные точки овыпукленного ограничения, одновременно принадлежащие и исходному ограничению. Под решением системы понимается допустимая пара «траектория-управление». В данной части работы изучаются вопросы существования решений управляемой системы с различными видами ограничений и плотность множества решений с невыпуклыми ограничениями в множестве решений с овыпукленными ограничениями.

Ключевые слова: многозначные отображения, управляемая система, невыпуклые ограничения, теорема существования, теорема плотности, «bang-bang»-принцип

Введение

На протяжении последних двадцати лет дифференциальные и эволюционные включения с невыпуклой замкнутой правой частью являются предметом пристального внимания многих исследователей. Многочисленные публикации по этой тематике в основном посвящены вопросам существования и плотности множества решений включения с невыпуклой правой частью $F(t,x)$ в множестве решений включения с овыпукленной правой частью $\overline{\mathrm{co}}F(t,x)$, где $\overline{\mathrm{co}}F(t,x)$ означает замкнутую выпуклую оболочку множества $F(t,x)$. В последнее время большое число публикаций (см., например, работы [1–10] и др.) посвящено вопросам существования и плотности множества решений различных классов включений с правой частью $\mathrm{ext}\,\overline{\mathrm{co}}F(t,x)$ в множестве решений включения с овыпукленной правой частью, где $\mathrm{ext}\,\overline{\mathrm{co}}F(t,x)$ — совокупность всех экстремальных (крайних) точек множества $\overline{\mathrm{co}}F(t,x)$. Последнее свойство обычно называют «бэнг-бэнг»-принципом для траекторий [1, 4]. Во всех этих публикациях, за исключением [3], в основу доказательств положены ранние результаты автора [1, 2] по непрерывным экстремальным селекторам многозначных отображений. Как нам кажется, при рассмотрении включений с невыпуклой правой частью $F(t,x)$ более естественным является изучение включений с правой частью $F(t,x)\cap\mathrm{ext}\,\overline{\mathrm{co}}F(t,x)$, так как множество $\mathrm{ext}\,\overline{\mathrm{co}}F(t,x)$ определяется множеством

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00216).

$\overline{\mathrm{co}}F(t,x)$ и множество $F(t,x)$, по существу, является невостребованным. Более того, в общем случае $\operatorname{ext}\overline{\mathrm{co}}F(t,x) \not\subset F(t,x)$. Изучение включений с правой частью $F(t,x) \cap \operatorname{ext}\overline{\mathrm{co}}F(t,x)$ может быть осуществлено путем использования результатов работ [11–13] о существовании и топологических свойствах непрерывных экстремальных селекторов многозначных отображений. Эта задача для эволюционных включений первого порядка рассматривалась в работе [14].

Что же касается управляемых систем со смешанными невыпуклыми ограничениями на управление, то свойства множества допустимых пар «траектория-управление» остались в стороне от внимания исследователей. По-видимому, это объясняется тем, что управляемую систему можно свести к включению. Но при таком подходе можно изучить только свойства множества траекторий управляемой системы, а не свойства множества допустимых пар «траектория-управление». Однако во многих приложениях, в частности в задачах оптимального управления, принципиальную роль играют свойства множества допустимых пар «траектория-управление».

Целью данной работы является устранение существующих пробелов в этом направлении.

Мы изучаем топологические свойства множества допустимых пар «траектория-управление» следующей управляемой системы.

Пусть $T=[0,1]$, H — сепарабельное гильбертово пространство, V — сепарабельное рефлексивное банахово пространство, которое плотно, непрерывно и компактно вложено в H.

Отождествляя H с его топологически сопряженным, мы имеем вложения $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$, где V^* — топологически сопряженное к V. При этом все вложения являются непрерывными, плотными и компактными. Такая тройка пространств обычно называется *эволюционной* или *тройкой Гельфанда*.

Пусть Y — сепарабельное рефлексивное банахово пространство, моделирующее пространство управлений. Рассмотрим следующую управляемую систему, описываемую нелинейным эволюционным уравнением второго порядка:

$$\begin{gathered} \ddot{x}(t) + A(t,\dot{x}(t)) + Bx(t) = f(t,x(t),\dot{x}(t))u(t) \quad \text{п. в.}, \\ x(0)=x_0 \in V, \quad \dot{x}(0)=y_0 \in H, \end{gathered} \tag{0.1}$$

со смешанными ограничениями на управление:

$$u(t) \in U(t,x(t),\dot{x}(t)) \quad \text{п. в.}, \tag{0.2}$$

где $A: T\times V \to V^*$ — нелинейный оператор, $B: V\to V^*$ — линейный оператор, $U: T\times H\times H \to Y$ — многозначное отображение с невыпуклыми замкнутыми значениями, $f: T\times H\times H \to \mathscr{L}(Y,H)$ — нелинейное отображение, а $\mathscr{L}(Y,H)$ — пространство непрерывных линейных операторов из Y в H. Наряду с ограничениями (0.2) мы рассмотрим ограничения

$$u(t) \in \overline{\mathrm{co}}U(t,x(t),\dot{x}(t)) \quad \text{п. в.}, \tag{0.3}$$

$$u(t) \in U(t,x(t),\dot{x}(t)) \cap \operatorname{ext}\overline{\mathrm{co}}U(t,x(t),\dot{x}(t)) \quad \text{п. в.} \tag{0.4}$$

Под решением управляемой системы мы понимаем допустимую пару $\{(x,\dot{x}),u\}$ — траектория-управление.

Работа состоит из двух частей.

В первой части рассматриваются следующие вопросы:

а) существование решений;

б) компактность множества решений системы (0.1), (0.3);

в) плотность множества решений системы (0.1), (0.4) в множестве решений системы (0.1), (0.3).

Во второй части работы изучаются следующие вопросы:

а) граничность множества решений систем (0.1), (0.2) и (0.1), (0.4) в множестве решений системы (0.1), (0.3);

б) необходимые и достаточные условия замкнутости множества решений системы (0.1), (0.2).

На примере управляемой гиперболической системы дана детализация полученных абстрактных результатов. В качестве приложения рассмотрена задача минимизации интегрального функционала на решениях системы (0.1), (0.4).

§ 1. Основные обозначения и определения

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — сепарабельное банахово пространство, $T = [0,1]$ — отрезок числовой прямой с мерой Лебега μ и σ-алгеброй Σ μ-измеримых подмножеств из T. Всюду в дальнейшем мы используем следующие обозначения: cX — семейство всех непустых замкнутых подмножеств из X, cbX — семейство всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств из X и, наконец, $ccbX$ — семейство всех непустых замкнутых ограниченных выпуклых подмножеств из X. Для множества $A \subset X$ через $\operatorname{co} A$ обозначается выпуклая оболочка A, а через $\overline{\operatorname{co}} A$ — замкнутая выпуклая оболочка и через $\operatorname{ext} \overline{\operatorname{co}} A$ — множество экстремальных (крайних) точек $\overline{\operatorname{co}} A$. На множестве cbX определим метрику Хаусдорфа

$$D(A,B) = \max\{\sup_{x\in A} d(x,B), \sup_{y\in B} d(y,A)\},$$

где $d(x,B)$ — расстояние от точки x до множества B.

Многозначное отображение $F : X \to cbX$ называется *D-непрерывным*, если оно является непрерывным в метрике Хаусдорфа $D(\cdot,\cdot)$.

Многозначное отображение $F : X \to cX$ называется *полунепрерывным снизу по Вьеторису*, если для любого открытого множества $E \subset X$ множество $F^{-1}(E) = \{x \in X; F(x) \cap E \neq \varnothing\}$ открыто.

Многозначное отображение $F : T \to cX$ называется *измеримым*, если $F^{-1}(E) \in \Sigma$ для любого замкнутого множества $E \subset X$. Если $F : T \times X \to cX$, то измеримость F означает, что $F^{-1}(E) \in \Sigma \otimes \mathscr{B}_X$, где $\Sigma \otimes \mathscr{B}_X$ — σ-алгебра подмножеств из $T \times X$, порожденная множествами $A \times B$, $A \in \Sigma$, $B \in \mathscr{B}_X$, и $\mathscr{B}_X$ — σ-алгебра борелевских множеств из X. Эти определения измеримости мы используем и для однозначных отображений.

Если $F : T \to cX$, то через S_F^p, $1 \leq p < \infty$, мы обозначаем множество всех элементов пространства $L^p(T,X)$, являющихся селекторами отображения $t \to F(t)$.

Множество $K \subset L^p(T,X)$ называется *равномерно p-интегрируемым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\int\limits_E \|f(t)\|^p \, d\mu < \varepsilon$$

для любого $E \in \Sigma$ с $\mu(E) < \delta(\varepsilon)$ и всех $f \in K$.

Пусть (V, H, V^*) — эволюционная тройка пространств. Через $\|\cdot\|$ (соответственно $|\cdot|$, $\|\cdot\|_*$) мы обозначаем норму в пространстве V (соответственно в H, V^*). Под $\langle x, x'\rangle$, $x \in V$, $x' \in V^*$, мы понимаем каноническую билинейную форму, устанавливающую двойственность между V и V^*, а $(\cdot,\cdot)$ означает скалярное произведение в H. Мы считаем, что форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и скалярное произведение согласованы, т. е. сужение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $V\times H$ совпадает с $(\cdot,\cdot)$.

Для p, $2\le p<\infty$, мы введем следующие пространства: $\mathscr{V}=L^p(T,V)$, $\mathscr{H}=L^p(T,H)$, $\mathscr{H}^*=L^q(T,H)$, $\mathscr{V}^*=L^q(T,V^*)$, $1/p+1/q=1$, и $\mathscr{W}=\{\nu\in\mathscr{V};\ \dot\nu\in\mathscr{V}^*\}$, где производная понимается в смысле векторных распределений. Пространство $\mathscr{W}$ с нормой $\|\nu\|=(\|\nu\|^2_{\mathscr{V}}+\|\dot\nu\|^2_{\mathscr{V}^*})^{1/2}$ является сепарабельным рефлексивным банаховым пространством, и $\mathscr{W}\hookrightarrow\mathscr{V}\hookrightarrow\mathscr{H}\hookrightarrow\mathscr{V}^*$. Известно, что любой элемент $\nu\in\mathscr{W}$ после изменения на множестве меры нуль можно отождествить с элементом пространства $C(T,H)$. При этом вложение $\mathscr{W}\hookrightarrow C(T,H)$ является непрерывным, а вложение $\mathscr{W}\hookrightarrow\mathscr{H}$ — компактным [15].

Билинейную форму, устанавливающую двойственность между $\mathscr{V}$ и $\mathscr{V}^*$ и между $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}^*$, мы обозначаем одинаково как

$$\int_T\langle f(t),v(t)\rangle d\mu,\quad f\in\mathscr{V},\ v\in\mathscr{V}^*.$$

Для любого банахова пространства X символ w-X означает, что пространство X наделено слабой $\sigma(X,X^*)$-топологией [16]. Такое же обозначение мы используем и для подмножеств из X. Во всех остальных случаях мы считаем, что пространство X и его подмножества наделены сильной (нормированной) топологией.

Решением управляемой системы (0.1), (0.2) мы называем пару $\{(x,\dot x),u\}$, состоящую из траектории $(x,\dot x)\in C(T,V)\times\mathscr{W}\hookrightarrow C(T,V)\times C(T,H)$ и управления $u\in L^q(T,Y)$, удовлетворяющих п. в. уравнению (0.1) и ограничению (0.2). Аналогично определяются решения управляемых систем (0.1), (0.3) и (0.1), (0.4). Так как пространство $\mathscr{W}$ вкладывается в $C(T,H)$ непрерывно, то начальное условие $\dot x(0)=y_0\in H$ имеет смысл.

Через $\mathscr{R}_U(x_0,y_0)\subset C(T,V)\times\mathscr{W}\times L^q(T,Y)\hookrightarrow C(T,V)\times C(T,H)\times L^q(T,Y)$ мы обозначаем множество всех решений управляемой системы (0.1), (0.2). Под $\mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(x_0,y_0)$ и $\mathscr{R}_{U\cap\operatorname{ext}\overline{\mathrm{co}}U}(x_0,y_0)$ мы понимаем множества решений управляемых систем (0.1), (0.3) и (0.1), (0.4).

§ 2. Априорные оценки

Введем следующие допущения.

Предположение $\Gamma(A)$. *$A:T\times V\to V^*$ является оператором таким, что*

(1) *отображение $t\to A(t,x)$ измеримо для каждого x;*

(2) *отображение $x\to A(t,x)$ монотонно и хеминепрерывно, т. е. $\langle x-y,A(t,x)-A(t,y)\rangle\ge 0$ для $x,y\in V$* (*монотонность*) *и для любых $x,y,z\in V$ отображение $\lambda\to\langle z,A(t,x+\lambda y)\rangle$ является непрерывным на отрезке $[0,1]$* (*хеминепрерывность*)*;*

(3) *$\langle x,A(t,x)\rangle\ge c_1\|x\|^p-d_1|x|^2$ п. в., $c_1>0$, $d_1>0$;*

(4) *$\|A(t,x)\|_*\le a(t)+b\|x\|^{p-1}$ п. в., $a(\cdot)\in L^q(T,R^+)$, $b>0$.*

Предположение $\Gamma(B)$. *$B:V\to V^*$ является линейным, непрерывным, симметрическим и коэрцитивным оператором, т. е. $B\in\mathscr{L}(V,V^*)$, $\langle y,Bx\rangle=\langle x,By\rangle$, $x,y\in V$* (*симметричность*) *и $\langle x,Bx\rangle\ge c_*\|x\|^2$, $c_*>0$* (*коэрцитивность*).

Предположение $\Gamma(f)$. *$f:T\times H\times H\to\mathscr{L}(Y,H)$ является отображением таким, что*

(1) *отображение $t\to f(t,x,y)u$ измеримо для любых $(x,y)\in H\times H$, $u\in Y$;*

(2) *отображение* $(x,y) \to f(t,x,y)^* h$ *непрерывно п. в. для любых* $h \in H$, *где* $f(t,x,y)^*$ *— оператор, сопряженный к* $f(t,x,y)$;

(3) $\|f(t,x,y)\|_{\mathscr{L}(Y,H)} \le m$ *п. в.,* $m > 0$.

Предположение $\Gamma(U)$. $U : T \times H \times H \to cbY$ *— многозначное отображение такое, что*

(1) *отображение* $(t,x,y) \to U(t,x,y)$ *является* $\Sigma \otimes \mathscr{B}_{H\times H}$*-измеримым;*

(2) *отображение* $(x,y) \to \overline{\mathrm{co}}U(t,x,y)$ D*-непрерывно п. в.;*

(3) $\|U(t,x,y)\|_Y = \sup\{\|u\|_Y ; u \in U(t,x,y)\} \le a_1(t) + b_1(|x|^2 + |y|^2)^{1/q}$ *п. в.,* $a_1(\cdot) \in L^q(T, R^+)$, $b_1 > 0$.

Из предположения $\Gamma(U)$ следует, что для любых $(x,y) \in H \times H$ множество $\overline{\mathrm{co}}\Gamma(t,x,y)$ является выпуклым слабо компактным подмножеством пространства Y. Поэтому из теоремы Крейна — Мильмана следует, что $\mathrm{ext}\,\overline{\mathrm{co}}U(t,x,y) \ne \varnothing$. Однако $\mathrm{ext}\,\overline{\mathrm{co}}U(t,x,y) \not\subset U(t,x,y)$ в общем случае, так как $U(t,x,y)$ не является слабо замкнутым множеством. Тем не менее $\mathrm{ext}\,\overline{\mathrm{co}}U(t,x,y) \cap U(t,x,y) \ne \varnothing$. Например, строго выставленные точки множества $\overline{\mathrm{co}}U(t,x,y)$, которые являются экстремальными, принадлежат множеству $U(t,x,y)$ [12]. Следовательно, система (0.1), (0.4) определена корректно.

Всюду в дальнейшем, не оговаривая особо, мы считаем, что предположения $\Gamma(A)$, $\Gamma(B)$ имеют место.

Лемма 2.1. *Пусть выполняются предположения* $\Gamma(f)$, $\Gamma(U)$. *Тогда существуют* $M_i > 0$, $i = 1, \dots, 4$, *такие, что для любого решения* $\{(x,\dot{x}), u\}$ *системы* (0.1), (0.3) (*и, следовательно, систем* (0.1), (0.2) *и* (0.1), (0.4)) *справедливы оценки*

$$|x(t)| \le M_1, \quad |\dot{x}(t)| \le M_2, \quad t \in T, \tag{2.1}$$

$$\|\dot{x}\|_{\mathscr{V}} \le M_3, \quad \|\ddot{x}\|_{\mathscr{V}^*} \le M_4. \tag{2.2}$$

Доказательство. Пусть $\{(x,\dot{x}), u\}$ — решение управляемой системы (0.1), (0.3). Тогда

$$\langle \dot{x}(t), \ddot{x}(t)\rangle + \langle \dot{x}(t), A(t,\dot{x}(t))\rangle + \langle \dot{x}(t), Bx(t)\rangle = (\dot{x}(t), f(t,x(t),\dot{x}(t))u(t)) \quad \text{п. в.} \tag{2.3}$$

Так как $\dot{x} \in \mathscr{W}$, имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\dot{x}(t)|^2 = \langle \dot{x}(t), \ddot{x}(t)\rangle.$$

Из симметричности оператора $B \in \mathscr{L}(V, V^*)$ следует, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle x(t), Bx(t)\rangle = \langle \dot{x}(t), Bx(t)\rangle.$$

Поэтому воспользовавшись (2.3) и предположениями $\Gamma(A)(3)$, $\Gamma(B)$, получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\dot{x}(t)|^2 + c_1\|\dot{x}(t)\|^p + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle x(t), Bx(t)\rangle \le d_1|\dot{x}(t)|^2 + (\dot{x}(t), f(t,x(t),\dot{x}(t))u(t)) \quad \text{п. в.}$$

Из этого неравенства вытекает, что

$$\frac{1}{2}|\dot{x}(t)|^2 - \frac{1}{2}|y_0|^2 + c_1\int_0^t \|\dot{x}(s)\|^p\,ds + \frac{1}{2}\langle x(t), Bx(t)\rangle - \frac{1}{2}\langle x_0, Bx_0\rangle \le d_1\int_0^t |\dot{x}(s)|^2\,ds + \int_0^t (\dot{x}(s), f(s,x(s),\dot{x}(s))u(s))\,ds.$$

Учитывая коэрцитивность оператора B, мы приходим к неравенству

$$|\dot{x}(t)|^2 + 2c_1 \int_0^t \|\dot{x}(s)\|^p\, ds + c_* \|x(t)\|^2 \le |y_0|^2 + \|B\|_{\mathscr{L}(V,V^*)} \|x_0\|^2$$
$$+ 2d_1 \int_0^t |\dot{x}(s)|^2\, ds + \int_0^t (\dot{x}(s), f(s, x(s), \dot{x}(s))u(s))\, ds. \quad (2.4)$$

Воспользовавшись неравенством Коши

$$a \cdot b \le \frac{\varepsilon^p}{p}|a|^p + \frac{\varepsilon^{-q}}{q}|b|^q, \quad \varepsilon > 0,\ a, b \in \mathbb{R},\ 1/p + 1/q = 1,$$

и предположениями $\Gamma(f)(3)$, $\Gamma(U)(3)$, имеем

$$\int_0^t (\dot{x}(s), f(s, x(s), \dot{x}(s))u(s))\, ds \le \left(\int_0^t |\dot{x}(s)|^p\, ds\right)^{1/p}$$
$$\times \left(\int_0^t |f(s, x(s), \dot{x}(s))u(s)|^q\, ds\right)^{1/q} \le \beta\frac{\varepsilon^p}{p}\int_0^t \|\dot{x}(s)\|^p\, ds + \frac{\varepsilon^{-q}}{q} 2^q m^q \int_0^t a_1^q(s)\, ds$$
$$+ \frac{\varepsilon^{-q}}{q} 2^q m^q b_1^q \int_0^t (|x(s)|^2 + |\dot{x}(s)|^2)\, ds, \quad (2.5)$$

где $\beta > 0$ — константа вложения V в H.

Выберем $\varepsilon > 0$ такое, чтобы $c_1 > \beta\frac{\varepsilon^p}{p}$. Тогда, воспользовавшись (2.4), (2.5), получим

$$|\dot{x}(t)|^2 + c_2 \int_0^t \|\dot{x}(s)\|^p\, ds + c_* \|x(t)\|^2 \le c_3 + c_4 \int_0^t |\dot{x}(s)|^2 + c_5 \int_0^t |x(s)|^2\, ds, \quad (2.6)$$

где $c_i > 0$, $i = 2, \dots, 5$, — некоторые константы, которые мы не выписываем из-за их громоздкости.

Так как $(x, \dot{x}) \in C(T, V) \times \mathscr{W}$, согласно теоремам 2.1, 2.2 из [17, гл. I, § 2] в пространстве V имеет место равенство

$$x(s) = x_0 + \int_0^s \dot{x}(\tau)\, d\tau, \quad s \in T.$$

Это равенство сохраняет свою силу и в пространстве H. Поэтому

$$|x(s)|^2 \le 2|x_0|^2 + 2\left(\int_0^s |\dot{x}(\tau)|\, d\tau\right)^2 \le 2|x_0|^2 + 2\int_0^s |\dot{x}(\tau)|^2\, d\tau. \quad (2.7)$$

Воспользовавшись (2.6), (2.7), выводим

$$|\dot{x}(t)|^2 + c_2 \int_0^t \|\dot{x}(s)\|^p\, ds + c_* \|x(t)\|^2 \le c_6 + c_7 \int_0^t |\dot{x}(s)|^2\, ds, \quad (2.8)$$

где $c_6 > 0$, $c_7 > 0$ — некоторые константы.

Из (2.8) и неравенства Гронуолла вытекает, что существует $M_2 > 0$ такое, что

$$|\dot{x}(t)| \le M_2, \quad t \in T. \tag{2.9}$$

Теперь учитывая (2.8), (2.9), находим, что

$$|x(t)| \le \beta \|x(t)\| \le M_1, \quad t \in T, \tag{2.10}$$

$$\|\dot{x}\|_{\mathscr{V}} \le M_3 \tag{2.11}$$

при некоторых $M_1 > 0$, $M_3 > 0$.

Пусть $z \in \mathscr{V}$. Тогда

$$\int\limits_T \langle z(t), \ddot{x}(t)\rangle\, dt + \int\limits_T \langle z(t), A(t, \dot{x}(t))\rangle\, dt + \int\limits_T \langle z(t), Bx(t)\rangle\, dt = \int\limits_T (z(t), f(t, x(t), \dot{x}(t))u(t))\, dt. \tag{2.12}$$

Непосредственно из (2.12) вытекает, что

$$\int\limits_T \langle z(t), \ddot{x}(t)\rangle\, dt \le \left[\left(\int\limits_T \|A(t, \dot{x}(t)\|_*^q\, dt\right)^{1/q} + \left(\int\limits_T \|Bx(t)\|_*^q\, dt\right)^{1/q} + \left(\int\limits_T (\beta |f(t, x(t), \dot{x}(t))u(t)|)^q\, dt\right)^{1/q}\right] \|z\|_{\mathscr{V}}. \tag{2.13}$$

Воспользовавшись (2.13), предположениями $\Gamma(A)(4)$, $\Gamma(B)$, $\Gamma(f)(3)$, $\Gamma(U)(3)$ и неравенствами (2.9)–(2.11), приходим к неравенству

$$\int\limits_T \langle z(t), \ddot{x}(t)\rangle\, dt \le M_4 \|z\|_{\mathscr{V}}$$

с некоторым $M_4 > 0$. Из последнего неравенства непосредственно следует, что

$$\|\ddot{x}\|_{\mathscr{V}^*} \le M_4. \tag{2.14}$$

Теперь утверждения леммы вытекают из неравенств (2.9)–(2.11), (2.14). Лемма доказана.

§ 3. Вспомогательные результаты

Рассмотрим эволюционное уравнение

$$\begin{gathered} \ddot{x}(t) + A(t, \dot{x}(t)) + Bx(t) = \varphi(t) \quad \text{п. в.}, \\ x(0) = x_0 \in V, \quad \dot{x}(0) = y_0 \in H. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Под решением уравнения (3.1) при фиксированном $\varphi \in \mathscr{H}^*$ мы понимаем пару $(x, \dot{x}) \in C(T, V) \times \mathscr{W}$, п. в. удовлетворяющую (3.1). Известно [15], что при фиксированных $x_0 \in V$, $y_0 \in H$ уравнение (3.1) для каждого $\varphi \in \mathscr{H}^*$ имеет единственное решение $(x = x(\varphi), \dot{x} = \dot{x}(\varphi))$.

Пусть $\lambda(\cdot) \in L^q(T, R^+)$ и $S_\lambda = \{\varphi \in \mathscr{H}^*; |\varphi(t)| \le \lambda(t) \text{ п. в.}\}$. Рассмотрим отображение $\varphi \to (x(\varphi), \dot{x}(\varphi))$, которое каждому $\varphi \in S_\lambda$ ставит в соответствие единственное решение $(x = x(\varphi), \dot{x} = \dot{x}(\varphi))$ уравнения (3.1).

Утверждение 3.1. *Отображение* $\varphi \to (x(\varphi), \dot{x}(\varphi))$ *является непрерывным из* w-S_λ *в* $C(T,V) \times w$-$\mathscr{W}$ *и в* $C(T,V) \times C(T,H)$.

Доказательство. Повторяя рассуждения, использованные при доказательстве леммы 2.1, получим (см. (2.2)), что существует $M > 0$, для которого

$$\|\dot{x}(\varphi)\|_{\mathscr{W}} \le M \quad \text{при любом } \varphi \in S_\lambda. \tag{3.2}$$

Так как S_λ является метризуемым выпуклым компактом пространства w-$\mathscr{H}^*$, нам достаточно показать секвенциальную непрерывность отображения $\varphi \to (x(\varphi), \dot{x}(\varphi))$. Пусть $\varphi_n, \varphi \in S_\lambda$ таковы, что

$$\varphi_n \to \varphi \quad \text{в } w\text{-}\mathscr{H}^* \tag{3.3}$$

и ($x_n = x(\varphi_n)$, $\dot{x}_n = \dot{x}_n(\varphi_n)$) (соответственно ($x = x(\varphi)$, $\dot{x} = \dot{x}(\varphi)$) — решения уравнения (3.1). Используя (3.2) и рефлексивность пространства $\mathscr{W}$ и переходя к подпоследовательности, если необходимо, мы можем предположить, что

$$\dot{x}_n \to y \quad \text{в } w\text{-}\mathscr{W} \tag{3.4}$$

для некоторого $y \in \mathscr{W}$. Покажем, что $y = \dot{x}$. Воспользовавшись уравнением (3.1), получим

$$\langle \dot{x}_n(t) - \dot{x}(t), \ddot{x}_n - \ddot{x}(t)\rangle + \langle \dot{x}_n(t) - \dot{x}(t), A(t,\dot{x}_n(t)) - A(t,\dot{x}(t))\rangle$$
$$+ \langle \dot{x}_n(t) - \dot{x}(t), Bx_n(t) - Bx(t)\rangle = (\dot{x}_n(t) - \dot{x}(t), \varphi_n(t) - \varphi(t)) \quad \text{п. в.}$$

Из монотонности оператора $A(t,\cdot)$ и симметричности оператора B вытекает, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\dot{x}_n(t) - \dot{x}(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle x_n(t) - x(t), B(x_n(t) - x(t))\rangle$$
$$\le (\dot{x}_n(t) - \dot{x}(t), \varphi_n(t) - \varphi(t)) \quad \text{п. в.}$$

Интегрируя последнее неравенство и учитывая коэрцитивность оператора B, приходим к неравенству

$$\frac{1}{2}|\dot{x}_n(t) - \dot{x}(t)|^2 + \frac{c_*}{2}\|x_n(t) - x(t)\|^2 \le \int_0^t (\dot{x}_n(s) - \dot{x}(s), \varphi_n(s) - \varphi(s))\,ds. \tag{3.5}$$

Так как вложение $\mathscr{W} \hookrightarrow \mathscr{H}$ компактно, в соответствии с (3.4), получаем, что

$$\dot{x}_n \to y \quad \text{в } \mathscr{H}. \tag{3.6}$$

Поэтому, учитывая (3.3) и (3.6), имеем

$$\int_0^t (\dot{x}_n(s) - \dot{x}(s), \varphi_n(s) - \varphi(s))\,ds$$
$$= \int_0^t (\dot{x}_n(s) - y(s), \varphi_n(s) - \varphi(s))\,ds + \int_0^t (y(s) - \dot{x}(s), \varphi_n(s) - \varphi(s))\,ds \to 0.$$

Тогда в силу (3.5)

$$x_n(t) \to x(t) \quad \text{в } V, \quad t \in T. \tag{3.7}$$

Поскольку $(x_n, \dot{x}_n), (x, \dot{x}) \in C(T, V) \times \mathscr{W}$, воспользовавшись теоремами 2.1, 2.2 из [17, гл. 1, § 2], получаем, что в пространстве V имеют место равенства

$$x_n(t) = x_0 + \int\limits_0^t \dot{x}_n(s)\, ds,\ t \in T, \quad x(t) = x_0 + \int\limits_0^t \dot{x}(s)\, ds,\ t \in T. \tag{3.8}$$

Возьмем произвольное $\xi \in V^*$. Тогда из (3.4), (3.7) вытекает, что

$$\langle x_n(t), \xi\rangle = \langle x_0, \xi\rangle + \int\limits_0^t \langle \dot{x}_n(s), \xi\rangle\, ds \to \langle x(t), \xi\rangle = \langle x_0, \xi\rangle + \int\limits_0^t \langle y(s), \xi\rangle\, ds, \quad t \in T. \tag{3.9}$$

Так как $\xi \in V^*$ — произвольный элемент, в соответствии с (3.8), (3.9) получаем, что $\dot{x}(t) = y(t)$ п. в. Следовательно, $\dot{x} = y$, и согласно (3.6)

$$\dot{x}_n \to \dot{x} \quad \text{в } \mathscr{H}. \tag{3.10}$$

Воспользовавшись (3.5), приходим к неравенству

$$\frac{1}{2}|\dot{x}_n(t) - \dot{x}(t)|^2 + \frac{c_*}{2}\|x_n(t) - x(t)\|^2 \le \|\dot{x}_n - \dot{x}\|_{\mathscr{H}} \|\varphi_n - \varphi\|_{\mathscr{H}^*}.$$

Поскольку $\varphi_n \in S_\lambda$, то $\|\varphi_n - \varphi\|_{\mathscr{H}^*} \le N$ для всех $n \ge 1$ при некотором $N > 0$. Поэтому из (3.10) вытекает, что

$$\frac{1}{2}|\dot{x}_n(t) - \dot{x}(t)|^2 + \frac{c_*}{2}\|x_n(t) - x(t)\|^2 \le \|\dot{x}_n - \dot{x}\|_{\mathscr{H}} \cdot N \to 0$$

при $n \to \infty$. Значит, $x_n \to x$ в $C(T, V)$ и $\dot{x}_n \to \dot{x}$ в $C(T, H)$.

Сходимость $\dot{x}_n \to \dot{x}$ в w-$\mathscr{W}$ следует из (3.4) и равенства $\dot{x} = y$.

Из единственности решения уравнения (3.1) заключаем, что и вся последовательность $(x_n, \dot{x}_n)$, $n \ge 1$, сходится к $(x, \dot{x})$ в $C(T, V) \times w$-$\mathscr{W}$ и в $C(T, V) \times C(T, H)$. Утверждение доказано.

Следствие 3.1. *Отображение $\varphi \to (x(\varphi), \dot{x}(\varphi))$ является непрерывным из w-S_λ в $C(T, H) \times w$-$\mathscr{W}$ и в $C(T, H) \times C(T, H)$.*

Следствие вытекает из утверждения 3.1 и непрерывности вложения $V \hookrightarrow H$.

Из предположения $\Gamma(f)$ следует, что для каждого $h \in H$ функция $(h, f(t, x, y)u) = (f(t, x, y)^* h, u)$ измерима по t и непрерывна по (x, y, u). Следовательно, для любых $x, y \in C(T, H)$, $u \in L^q(T, Y)$ функция $t \to f(t, x(t), y(t))u(t)$ скалярно измерима. Так как H — сепарабельное гильбертово пространство, функция $t \to f(t, x(t), y(t))u(t)$ измерима. Аналогично для любых $x, y \in C(T, H)$, $h \in \mathscr{H}$ функция $t \to f(t, x(t), y(t))^* h(t)$ измерима.

Воспользовавшись предположением $\Gamma(f)(3)$, мы можем рассмотреть оператор $F : C(T, H) \times C(T, H) \to \mathscr{L}(L^q(T, Y), \mathscr{H}^*)$, определенный по правилу

$$(F(x, y)u)(t) = f(t, x(t), y(t))u(t), \tag{3.11}$$

где $\mathscr{L}(L^q(T, Y), \mathscr{H}^*)$ — пространство непрерывных линейных операторов из $L^q(T, Y)$ в $\mathscr{H}^*$.

Лемма 3.1. *Оператор* $(x, y, u) \to F(x, y)u$ *секвенциально непрерывен из* $C(T, H) \times C(T, H) \times w\text{-}L^q(T, Y)$ *в* $w\text{-}\mathscr{H}^*$.

Лемма доказывается по аналогии с леммой 2.1 в [18].

Пусть Z — сепарабельное рефлексивное банахово пространство. На пространстве $L^q(T, Z)$, $1/p + 1/q = 1$, $2 \le p < \infty$, кроме стандартной нормы рассмотрим слабую норму

$$\|u\|_w = \sup_{0 \le t \le t' \le 1} \left\| \int_t^{t'} u(s)\, ds \right\|. \tag{3.12}$$

Пространство $L^q(T, Z)$ с нормой (3.12) будем обозначать через $L^q_w(T, Z)$. Для удобства изложения нам понадобится

Лемма 3.2 [18]. *Если последовательность* $\{u_n\}_{n=1} \subset L^q(T, Z)$ *ограничена и сходится к* u *в* $L^q_w(T, Z)$, *то* u_n, $n \ge 1$, *сходится к* u *в* $w\text{-}L^q(T, Z)$.

§ 4. Существование решений

В этом параграфе рассмотрим вопрос существования решений системы (0.1), (0.4).

Пусть $Q = \{h \in H; |h| \le M_1\}$, $Q_1 = \{h \in H; |h| \le M_2\}$ (см. (2.1)). Рассмотрим оператор проектирования $\mathrm{pr} : H \to Q$, который каждой точке $h \in H$ ставит в соответствие единственную точку $\mathrm{pr}\, h \in Q$ такую, что $|\mathrm{pr}\, h - h| = \min\{|y - h|; y \in Q\}$. Хорошо известно, что

$$|\mathrm{pr}\, u - \mathrm{pr}\, v| \le |u - v|, \quad u, v \in H. \tag{4.1}$$

Аналогично пусть pr_1 — оператор проектирования из H в Q_1.

Рассмотрим многозначное отображение $\widetilde{U} : T \times H \times H \to cbY$, определенное по правилу $\widetilde{U}(t, x, y) = U(t, \mathrm{pr}\, x, \mathrm{pr}_1\, y)$. Из (4.1) вытекает, что отображение $\widetilde{U}(t, x, y)$ наследует все свойства отображения U, перечисленные в предположениях $\Gamma(U)$. В частности,

$$\|\widetilde{U}(t, x, y)\|_Y \le a_1(t) + b_1\big(M_1^2 + M_2^2\big)^{1/q} \quad \text{п. в.}, \tag{4.2}$$

$$\|\widetilde{U}(t, x, y)\|_Y \le a_1(t) + b_1(|x|^2 + |y|^2)^{1/q} \quad \text{п. в.} \tag{4.3}$$

Если мы рассмотрим систему (0.1), (0.3) с $\widetilde{U}(t, x, y)$ вместо $U(t, x, y)$, то из (4.3) следует, что оценки (2.1), (2.2) останутся теми же самыми и для решений системы (0.1), (0.3) с $\widetilde{U}(t, x, y)$. Поэтому $\{(x, \dot{x}), u\}$ будет решением системы (0.1), (0.3) тогда и только тогда, когда $\{(x, \dot{x}), u\}$ является решением системы (0.1), (0.3) с $\widetilde{U}(t, x, y)$ вместо $U(t, x, y)$. То же самое справедливо и для решений систем (0.1), (0.2) и (0.1), (0.4). Следовательно, всюду в дальнейшем, не нарушая общности и не оговаривая специально, мы можем считать, что для отображения $U(t, x, y)$ при любых $x, y \in H$ имеет место неравенство (4.2).

Всюду в этом параграфе мы считаем выполненными предположения $\Gamma(U)$ и $\Gamma(f)$.

Теорема 4.1. *Существует пара* $\{(x, \dot{x}), u\} \in C(T, V) \times \mathscr{W} \times L^q(T, Y) \hookrightarrow C(T, V) \times C(T, H) \times L^q(T, Y)$ *такая, что*

$$\{(x, \dot{x}), u\} \in \mathscr{R}_{U \cap \mathrm{ext}\, \overline{\mathrm{co}} U}(x_0, y_0) \subset \mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}} U}(x_0, y_0).$$

Более того, $\mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(x_0, y_0)$ является компактным подмножеством пространств $C(T,V)\times w\text{-}\mathscr{W}\times w\text{-}L^q(T,Y)$, $C(T,V)\times C(T,H)\times w\text{-}L^q(T,Y)$ и замкнутым подмножеством пространств $C(T,V)\times w\text{-}\mathscr{W}\times L^q_w(T,Y)$ и $C(T,V)\times C(T,H)\times L^q_w(T,Y)$.

Доказательство. Рассмотрим множество

$$S_\lambda = \{\varphi \in \mathscr{H}^*; |\varphi(t)| \le \lambda(t) \text{ п. в.}\}, \tag{4.4}$$

где $\lambda(t) = m\big(a_1(t) + b_1\big(M_1^2 + M_2^2\big)^{1/q}\big)$, и отображение $P = (P_1, P_2)$, $P : S_\lambda \to C(T,V)\times\mathscr{W} \hookrightarrow C(T,V)\times C(T,H) \hookrightarrow C(T,H)\times C(T,H)$, определенное по правилу $P(\varphi) = (P_1(\varphi), P_2(\varphi))$, $P_1(\varphi) = x$, $P_2(\varphi) = \dot{x}$, где $(x,\dot{x})$ — единственное решение уравнения (3.1) с $\varphi \in S_\lambda$.

Пусть $\mathscr{R}(x_0,y_0) = \{P\varphi; \varphi \in S_\lambda\}$. Тогда согласно следствию 3.1 $\mathscr{R}(x_0,y_0)$ является компактным подмножеством пространства $C(T,H)\times C(T,H)$. Из предположения $\Gamma(U)(1)$ следует, что отображение $t \to U(t,x,y)$ измеримо для любых $x, y \in H$. Следовательно, таковым является и отображение $t \to \overline{\mathrm{co}}U(t,x,y)$. Тогда из предположения $\Gamma(U)$ (2) получаем, что отображение $\overline{\mathrm{co}}U(t,x,y)$ является отображением типа Каратеодори. Воспользовавшись утверждением 8.2 в [12], находим, что существует непрерывная функция $g : \mathscr{R}(x_0,y_0) \hookrightarrow C(T,H)\times C(T,H) \to L^q(T,Y)$ такая, что

$$g(x,\dot{x})(t) \in U(t,x(t),\dot{x}(t)) \cap \operatorname{ext}\overline{\mathrm{co}}U(t,x(t),\dot{x}(t)) \quad \text{п. в.} \tag{4.5}$$

Пусть $\mathscr{A} : S_\lambda \to \mathscr{H}^*$ — оператор, определенный по правилу $\mathscr{A}(\varphi) = F(P\varphi)\cdot g(P\varphi)$, где F — оператор (3.11). Из следствия 3.1 и леммы 3.1 следует, что оператор $\mathscr{A}$ является непрерывным из $w\text{-}S_\lambda$ в $w\text{-}\mathscr{H}^*$. Из предположения $\Gamma(f)(3)$ и (4.2), вытекает, что $\mathscr{A}(\varphi) \in S_\lambda$, $\varphi \in S_\lambda$. Тогда из теоремы Шаудера о неподвижной точке следует существование элемента $\varphi_* \in S_\lambda$ такого, что

$$\varphi_* = \mathscr{A}(\varphi_*) = F(P\varphi_*)g(P\varphi_*).$$

Значит, для $(x_*,\dot{x}_*) = P\varphi_*$ согласно (4.5)

$$u_*(t) = g(x_*,\dot{x}_*)(t) \in U(t,x_*(t),\dot{x}_*(t)) \cap \operatorname{ext}\overline{\mathrm{co}}U(t,x_*(t),\dot{x}_*(t)) \quad \text{п. в.} \tag{4.6}$$

и $(x_*,\dot{x}_*)$ является решением уравнения (3.1) с $\varphi_*(t) = f(t,x_*(t),\dot{x}_*(t))u_*(t)$. Принимая во внимание (4.6), получаем, что $\{(x_*,\dot{x}_*),u_*\} \in \mathscr{R}_{U\cap\operatorname{ext}\overline{\mathrm{co}}U}(x_0,y_0)$. Тем самым существование решений управляемых систем (0.1), (0.2), (0.1), (0.3) и (0.1), (0.4) доказано.

Покажем, что $\mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(x_0,y_0)$ является компактным подмножеством пространств $C(T,V)\times w\text{-}\mathscr{W}\times w\text{-}L^q(T,Y)$ и $C(T,V)\times C(T,H)\times w\text{-}L^q(T,Y)$.

Пусть

$$S^U_\mu = \{\varphi \in L^q(T,Y);\ \|\varphi(t)\|_Y \le \mu(t) \text{ п. в.}\}, \tag{4.7}$$

где $\mu(t) = a_1(t) + b_1\big(M_1^2 + M_2^2\big)^{1/q}$. Из (4.7), (2.1) следует, что $\mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(x_0,y_0) \subset \mathscr{R}(x_0,y_0)\times S^U_\mu$. Тем самым $\mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(x_0,y_0)$ является относительно компактным подмножеством пространств $C(T,V)\times w\text{-}\mathscr{W}\times w\text{-}L^q(T,Y)$ и $C(T,V)\times C(T,H)\times w\text{-}L^q(T,Y)$ соответственно.

Пусть $\{(x_n,\dot{x}_n),u_n\} \to \{(x,\dot{x}),u\}$ в $C(T,V)\times w\text{-}\mathscr{W}\times w\text{-}L^q(T,Y)$. Тогда $(x_n,\dot{x}_n) \to (x,\dot{x})$ в $C(T,H)\times C(T,H)$. Из леммы 3.1 следует, что $\varphi_n, \varphi_n(t) = f(t,x_n(t),\dot{x}_n(t))u_n(t)$, $n \ge 1$, сходится в пространстве $w\text{-}\mathscr{H}^*$ к φ_0, $\varphi_0(t) = f(t,x(t),\dot{x}(t))u(t)$. Так как $(x_n,\dot{x}_n)$ является решением уравнения (3.1) с $\varphi = \varphi_n$, согласно утверждению 3.1 $(x,\dot{x})$ будет решением уравнения 3.1 с $\varphi = \varphi_0$.

Теперь, чтобы завершить доказательство, нам достаточно показать, что $u(t) \in \overline{\mathrm{co}}U(t, x(t), \dot{x}(t))$ п. в. Так как $u_n \to u$ в w-$L^q(T, Y)$, то в силу теоремы Мазура

$$u(t) \in \bigcap_n \overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} u_k(t)\right) \quad \text{п. в.} \tag{4.8}$$

С другой стороны, воспользовавшись предположением $\Gamma(U)(2)$, получаем

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \overline{\mathrm{co}}U(t, x_k(t), \dot{x}_k(t)) \subset \overline{\mathrm{co}}U(t, x(t), \dot{x}(t)\right) \quad \text{п. в.} \tag{4.9}$$

Теперь из включения (4.8), (4.9) имеем $u(t) \in \overline{\mathrm{co}}U(t, x(t), \dot{x}(t))$ п. в. Поэтому $\{(x, \dot{x}), u\} \in \mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(x_0, y_0)$. Тем самым множество $\mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(x_0, y_0)$ является компактом в $C(T, V) \times w$-$\mathscr{W} \times w$-$L^q(T, Y)$ и в $C(T, V) \times C(T, H) \times w$-$L^q(T, Y)$. Замкнутость же множества $\mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(x_0, y_0)$ в $C(T, V) \times w$-$\mathscr{W} \times L^q_w(T, Y)$ и в $C(T, V) \times C(T, H) \times L^q_w(T, Y)$ следует из леммы 3.2. Теорема доказана.

§ 5. Плотность

В этом параграфе рассмотрим вопросы аппроксимации элементов из $\mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(x_0, y_0)$ элементами множества $\mathscr{R}_{U \cap \mathrm{ext}\, \overline{\mathrm{co}}U}(x_0, y_0)$ («бэнг-бэнг»-принцип для управляемых систем).

Пусть $\{(x_*, \dot{x}_*), u\} \in \mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(x_0, u_0)$. Тогда $(x_*, \dot{x}_*) \in \mathscr{R}(x_0, y_0)$ и

$$(x_*, \dot{x}_*) = P\varphi_*^*, \quad \varphi_*(t) = f(t, x_*(t), \dot{x}_*(t))u_*(t), \tag{5.1}$$

$$u_*(t) \in \overline{\mathrm{co}}U(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)) \quad \text{п. в.,} \tag{5.2}$$

где P — оператор, который каждому $\varphi \in \mathscr{H}^*$ ставит в соответствие единственное решение уравнения (3.1). Рассмотрим многозначное отображение $S^q_{\overline{\mathrm{co}}U} : \mathscr{R}(x_0, y_0) \hookrightarrow C(T, H) \times C(T, H) \to ccbL^q(T, Y)$, определенное по правилу

$$S^q_{\overline{\mathrm{co}}U}(x, \dot{x}) = \{u \in L^q(T, Y);\ u(t) \in \overline{\mathrm{co}}U(t, x(t), \dot{x}(t)) \text{ п. в.}\}. \tag{5.3}$$

Тогда, воспользовавшись гипотезами $\Gamma(U)$ и утверждением 4.2 из [12], получаем, что отображение $S^q_{\overline{\mathrm{co}}U}$ непрерывно в метрике Хаусдорфа на пространстве $ccbL^q(T, Y)$. Согласно утверждению 2.2 из [12] существует непрерывное отображение $g : \mathscr{R}(x_0, y_0) \to L^q(T, Y)$ такое, что $g(x, \dot{x}) \in S^q_{\overline{\mathrm{co}}U}(x, \dot{x})$ и $g(x_*, \dot{x}_*) = u_*$, т. е.

$$g(x, \dot{x})(t) \in \overline{\mathrm{co}}U(t, x(t), \dot{x}(t)) \quad \text{п. в.,} \tag{5.4}$$

$$g(x_*, \dot{x}_*)(t) = u_*(t) \quad \text{п. в.} \tag{5.5}$$

Пусть $\mathscr{A}g : S_\lambda \to \mathscr{H}^*$ — оператор, определенный по правилу $\mathscr{A}g(\varphi) = F(P\varphi)g(P\varphi)$, где F — оператор (3.11). Как и при доказательстве теоремы 4.1, находим, что оператор $\mathscr{A}g$ непрерывен из w-S_λ в w-S_λ. Поэтому он имеет неподвижные точки. Пусть $\mathrm{Fix}\,\mathscr{A}g$ — совокупность всех неподвижных точек оператора $\mathscr{A}g$. Из (5.1), (5.2), (5.5) следует, что $\varphi_* \in \mathrm{Fix}\,\mathscr{A}g$.

Положим

$$\mathscr{R}g(x_0, y_0) = (\{(x, \dot{x}), u\};\ (x, \dot{x}) = P\varphi,\ u = g(x, \dot{x}),\ \varphi \in \mathrm{Fix}\,\mathscr{A}g).$$

Ввиду (5.3)

$$\{(x_*, \dot{x}_*), u_*\} \in \mathscr{R}g(x_0, u_0) \subset \mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(x_0, y_0).$$

Обозначим через $W_{V,\mathscr{W},L_w}(\mathscr{R}g(x_0, y_0))$, $W_{V,H,L_w}(\mathscr{R}g(x_0, y_0))$ произвольные окрестности множества $\mathscr{R}g(x_0, y_0)$ в пространстве $C(T, V) \times w$-$\mathscr{W} \times L^q_w(T, Y)$ и соответственно в пространстве $C(T, V) \times C(T, H) \times L^q_w(T, Y)$.

Теорема 5.1. *Пусть выполняются предположения* $\Gamma(f)$, $\Gamma(U)$. *Тогда*

$$\mathscr{R}_{U\cap\operatorname{ext}\overline{\operatorname{co}}U}(x_0,y_0)\cap W_{V,\mathscr{W},L_w}(\mathscr{R}g(x_0,y_0))\neq\varnothing,$$

$$\mathscr{R}_{U\cap\operatorname{ext}\overline{\operatorname{co}}U}(x_0,y_0)\cap W_{V,H,L_w}(\mathscr{R}g(x_0,y_0))\neq\varnothing.$$

Доказательство. Согласно следствию 6.2 из [13] существует непрерывная функция $g_n:\mathscr{R}(x_0,y_0)\hookrightarrow C(T,H)\times C(T,H)\to L^q(T,Y)$ такая, что

$$g_n(x,\dot x)(t)\in U(t,x(t),\dot x(t))\cap\operatorname{ext}\overline{\operatorname{co}}U(t,x(t),\dot x(t))\quad\text{п. в.}\tag{5.6}$$

и

$$\|g(x,\dot x)-g_n(x,\dot x)\|_w<1/n,\quad n\geq 1,\quad (x,\dot x)\in\mathscr{R}(x_0,y_0).\tag{5.7}$$

Рассмотрим оператор $\mathscr{A}g_n:S_\lambda\to\mathscr{H}^*$, $\mathscr{A}g_n(\varphi)=F(P\varphi)g_n(P\varphi)$. По аналогии с оператором $\mathscr{A}g$ мы можем показать, что оператор $\mathscr{A}g_n$ имеет неподвижные точки. Пусть $\varphi_n\in\operatorname{Fix}\mathscr{A}g_n$. Положим $(x_n,\dot x_n)=P\varphi_n$, $u_n=g_n(x_n,\dot x_n)=g_n(P\varphi_n)$. Тогда согласно (5.6) $\{(x_n,\dot x_n),u_n\}\in\mathscr{R}_{U\cap\operatorname{ext}\overline{\operatorname{co}}U}(x_0,y_0)$. Так как $\varphi_n\in S_\lambda$, $n\geq 1$, переходя, если необходимо, к подпоследовательности, получим, что

$$\varphi_n\to\varphi\quad\text{в}\quad w\text{-}\mathscr{H}^*\quad\text{для некоторого}\quad\varphi\in S_\lambda.\tag{5.8}$$

Тогда в силу утверждения 3.1

$$(x_n,\dot x_n)=P\varphi_n\to(x,\dot x)=P\varphi\tag{5.9}$$

в $C(T,V)\times w\text{-}\mathscr{W}$ и в $C(T,V)\times C(T,H)$.

Так как отображение g является непрерывным из $\mathscr{R}(x_0,y_0)$ в $L^q(T,Y)$, то оно непрерывно из $\mathscr{R}(x_0,y_0)$ в $L^q_w(T,Y)$. Поэтому из (5.7) и неравенства

$$\|g(x,\dot x)-g_n(x_n,\dot x_n)\|_w\leq\|g(x,\dot x)-g(x_n,\dot x_n)\|_w+\|g(x_n,\dot x_n)-g_n(x_n,\dot x_n)\|_w$$

следует, что

$$u_n=g_n(x_n,\dot x_n)\to u=g(x,\dot x)\quad\text{в}\quad L^q_w(T,Y).\tag{5.10}$$

Поскольку $u_n\in S^U_\mu$ (см. (4.7)), воспользовавшись леммой 3.2, получаем, что

$$u_n=g_n(P\varphi_n)\to u=g(P\varphi)\quad\text{в}\quad w\text{-}L^q(T,Y).\tag{5.11}$$

Тогда из (5.9), (5.11) и леммы 3.1 вытекает, что

$$\varphi_n=F(P\varphi_n)g_n(P\varphi_n)\to F(P\varphi)g(P\varphi)\quad\text{в}\quad w\text{-}\mathscr{H}^*.\tag{5.12}$$

Применяя (5.8), имеем

$$\varphi=F(P\varphi)g(P\varphi)=Ag(\varphi).$$

Следовательно, φ является неподвижной точкой оператора $\mathscr{A}g$. Тогда $\{(x,\dot x),u)\}\in\mathscr{R}g(x_0,u_0)$, где

$$(x,\dot x)=P\varphi,u=g(P\varphi).\tag{5.13}$$

Учитывая (5.9), (5.10), (5.13), приходим к существованию последовательности $\{(x_n,\dot x_n),u_n\}\in\mathscr{R}_{U\cap\operatorname{ext}\overline{\operatorname{co}}U}(x_0,y_0)$, сходящейся к $\{(x,\dot x),u\}\in\mathscr{R}_g(x_0,u_0)$ в топологиях пространств в $C(T,V)\times w\text{-}\mathscr{W}\times L^q_w(T,Y)$ и $C(T,V)\times C(T,H)\times L^q_w(T,Y)$ соответственно. Теорема доказана.

Обозначим через $W_{V,\mathscr{W},w}(\mathscr{R}g(x_0,y_0))$, $W_{V,H,w}(\mathscr{R}g(x_0,y_0))$ произвольные окрестности множества $\mathscr{R}g(x_0,y_0)$ в пространстве $C(T,V)\times w\text{-}\mathscr{W}\times w\text{-}L^q(T,Y)$ и соответственно в $C(T,V)\times C(T,H)\times w\text{-}L^q(T,Y)$.

Следствие 5.1. *Пусть выполняются предположения* $\Gamma(f)$, $\Gamma(U)$. *Тогда*

$$\mathscr{R}_{U\cap \operatorname{ext}\overline{\mathrm{co}}U}(x_0,y_0)\cap W_{V,\mathscr{W},w}(\mathscr{R}g(x_0,y_0))\neq\varnothing,$$

$$\mathscr{R}_{U\cap \operatorname{ext}\overline{\mathrm{co}}U}(x_0,y_0)\cap W_{V,H,w}(\mathscr{R}g(x_0,y_0))\neq\varnothing.$$

Следствие вытекает непосредственно из доказательства теоремы 5.1, если учесть (5.11).

Теорема 5.1 может быть уточнена, если мы воспользуемся следующими допущениями.

Предположение $\Gamma_1(U)$. *Справедливо неравенство*

$$D(\overline{\mathrm{co}}U(t,x,y),\overline{\mathrm{co}}U(t,x_1,y_1))\le k(t)(|x-x_1|+|y-y_1|)\quad \text{п. в.},\quad k(\cdot)\in L^1(T,R^+).$$

Предположение $\Gamma_1(f)$. *Для любых* $x,y,x_1,y_1\in C(T,H)$, $u\in L^q(T,Y)$, $u(t)\in\overline{\mathrm{co}}U(t,x(t),y(t))$ *п. в. существует* $k_1(u)\in L^1(T,R^+)$ *такое, что*

$$|(f(t,x(t),y(t))-f(t,x_1(t),y_1(t)))u(t)|$$
$$\le k_1(u)(t)(|x(t)-x_1(t)|+|y(t)-y_1(t)|\quad \text{п. в.}$$

Всюду в дальнейшем в этом параграфе мы предполагаем, что предположения $\Gamma(f)$, $\Gamma_1(f)$ и $\Gamma(U)(1)$, (3), $\Gamma_1(U)$ имеют место.

Теорема 5.2. *Для каждого* $\{(x,\dot x),u\}\in\mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(x_0,y_0)$ *существует последовательность* $\{(x_n,\dot x_n),u_n\}\in\mathscr{R}_{U\cap\operatorname{ext}\overline{\mathrm{co}}U}(x_0,y_0)$, *сходящаяся к* $\{(x,\dot x),u\}$ *в пространствах* $C(T,V)\times w\text{-}\mathscr{W}\times L^q_w(T,Y)$ *и* $C(T,V)\times C(T,H)\times L^q_w(T,Y)$.

Доказательство. Пусть $\{(x_*,\dot x_*),u_*\}\in\mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(x_0,y_0)$ и $n\ge1$. Рассмотрим отображение $S^q_{\overline{\mathrm{co}}U}:\mathscr{R}(x_0,y_0)\hookrightarrow C(T,H)\times C(T,H)\to ccbL^q(T,Y)$, определенное по правилу (5.3), которое непрерывно в метрике Хаусдорфа на пространстве $ccbL^q(T,Y)$. Тогда $(x_*,\dot x_*)=P\varphi_*$,

$$\varphi_*(t)=f(t,x_*(t),\dot x_*(t))u_*(t),\quad u_*\in S^q_{\overline{\mathrm{co}}U}(x_*,\dot x_*).\tag{5.14}$$

Воспользовавшись предположением $\Gamma_1(U)$, утверждением 2.3 и теоремой 3.1 из [19], находим непрерывную функцию $v_n:\mathscr{R}(x_0,y_0)\hookrightarrow C(T,H)\times C(T,H)\to L^1(T,Y)$ такую, что для каждого $(x,\dot x)\in\mathscr{R}(x_0,y_0)$

$$v_n(x,\dot x)(t)\in\overline{\mathrm{co}}U(t,x(t),\dot x(t))\quad \text{п. в.},$$

$$\|u_*(t)-v_n(x,\dot x)(t)\|_Y\le 1/n+k(t)(|x_*(t)-x(t)|+|\dot x_*(t)-\dot x(t)|)\quad \text{п. в.}\tag{5.15}$$

Так как $v_n(x,\dot x)\in S^U_\mu$ (см. (4.7)), то $\|v_n(x,\dot x)(t)\|_Y\le\mu(t)$ п. в., $\mu\in L^q(T,R^+)$. Поэтому множество $\{v_n(x,\dot x);(x,\dot x)\in\mathscr{R}(x_0,y_0)\}$ равномерно q-интегрируемо. Из утверждения 2.4 в [12] получаем, что функция $v_n(x,\dot x)$ является непрерывной из $\mathscr{R}(x_0,y_0)$ в $L^q(T,Y)$. Согласно теореме 0.2 в [13] существует непрерывная функция $g_n:\mathscr{R}(x_0,y_0)\hookrightarrow C(T,H)\times C(T,Y)\to L^q(T,Y)$ такая, что выполняется включение (5.6) и

$$\|g_n(x,\dot x)-v_n(x,\dot x)\|_w<1/n.\tag{5.16}$$

Рассмотрим оператор $\mathscr{A}_n(\varphi)=F(P\varphi)g_n(P\varphi)$, который, как было показано выше, является непрерывным из $w\text{-}S_\lambda$ в $w\text{-}S_\lambda$ и имеет неподвижные точки. Пусть $\varphi_n\in\operatorname{Fix}\mathscr{A}_n$. С учетом (5.6)

$$\{(x_n,\dot x_n),u_n\}\in\mathscr{R}_{U\cap\operatorname{ext}\overline{\mathrm{co}}U}(x_0,y_0),\tag{5.17}$$

где

$$u_n(t) = g_n(x_n, \dot{x}_n)(t), \quad (x_n, \dot{x}_n) = P\varphi_n, \tag{5.18}$$

$$\varphi_n(t) = f(t, x_n(t), x_n(t))u_n(t). \tag{5.19}$$

Воспользовавшись уравнением (3.1), (5.14) и (5.19) по аналогии с неравенством (3.5), получим

$$\frac{1}{2}|\dot{x}_n(t)-\dot{x}_*(t)|^2+\frac{c_*}{2}\|x_n(t)-x_*(t)\|^2 \le \int\limits_0^t (\dot{x}_n(s)-\dot{x}_*(s), \varphi_n(s)-\varphi_*(s))\,ds. \tag{5.20}$$

Оценим правую часть неравенства (5.20) следующим образом:

$$\begin{aligned}\int\limits_0^t &(\dot{x}_n(s)-\dot{x}_*(s), \varphi_n(s)-\varphi_*(s))\,ds \\ &= \int\limits_0^t (\dot{x}_n(s)-\dot{x}_*(s), f(s, x_n(s), \dot{x}_n(s)) \cdot (g_n(x_n, \dot{x}_n)(s) - v_n(x_n, \dot{x}_n)(s)))\,ds \\ &\quad + \int\limits_0^t (\dot{x}_n(s)-\dot{x}_*(s), f(s, x_n(s), \dot{x}_n(s)) \cdot (v_n(x_n, \dot{x}_n)(s) - u_*(s)))\,ds \\ &\quad + \int\limits_0^t (\dot{x}_n(s)-\dot{x}_*(s), (f(s, x_n(s), \dot{x}_n(s)) - f(s, x_*(s), \dot{x}_*(s)))u_*(s))\,ds.\end{aligned} \tag{5.21}$$

Поскольку множество $\mathscr{R}(x_0, y_0)\times w\text{-}2S_\mu^U$ компактно в $C(T,H)\times C(T,H)\times w\text{-}L^q(T,Y)$, согласно лемме 3.1 функция $F(x,\dot{x})u$ (см. (3.11)) будет равномерно непрерывной на $\mathscr{R}(x_0, y_0)\times w\text{-}2S_\mu^U$. Из леммы 3.2 и (5.16) вытекает, что последовательность $g_n(x_n,\dot{x}_n)-v_n(x_n,\dot{x}_n)$ сходится в $w\text{-}L^q(T,Y)$ к нулевому элементу. Поскольку $(x_n,\dot{x}_n)\in\mathscr{R}(x_0,y_0)$ и $g_n(x_n,\dot{x}_n)-v_n(x_n,\dot{x}_n)\in 2S_\mu^U$, то последовательность $F(x_n,\dot{x}_n)(g_n(x_n,\dot{x}_n)-v_n(x_n,\dot{x}_n))$ сходится в $w\text{-}\mathscr{H}^*$ к нулевому элементу. Так как множество $\{\dot{x}_n-\dot{x}_*\}_{n\ge 1}$ относительно компактно в $\mathscr{H}$, то

$$\int\limits_0^t (\dot{x}_n(s)-\dot{x}_*(s), f(s, x_n(s), \dot{x}_n(s))(g_n(x_n, \dot{x}_n)(s) - v_n(x_n, \dot{x}_n)(s)))\,ds \to 0. \tag{5.22}$$

Воспользовавшись (5.15) и предположениями $\Gamma_1(f)$, $\Gamma(f)(3)$, получим

$$\begin{aligned}\int\limits_0^t &(\dot{x}_n(s)-\dot{x}_*(s), f(s, x_n(s), \dot{x}_n(s))(v_n(x_n, \dot{x}_n)(s) - u_*(s)))\,ds \\ &\le \frac{1}{n}\,m\int\limits_0^t |\dot{x}_n(s)-\dot{x}_*(s)|\,ds + m\int\limits_0^t k(s)|\dot{x}_n(s)-\dot{x}_*(s)| \\ &\qquad \times (|x_n(s)-x_*(s)| + |\dot{x}_n(s)-\dot{x}_*(s)|)\,ds,\end{aligned} \tag{5.23}$$

$$\begin{aligned}\int\limits_0^t &(\dot{x}_n(s)-\dot{x}_*(s), (f(s, x_n(s), \dot{x}_n(s)) - f(s, x_*(s), \dot{x}_*(s)))u_*(s))\,ds \\ &\le \int\limits_0^t k_1(u_*)(s)|\dot{x}_n(s)-\dot{x}_*(s)|(|x_n(s)-x_*(s)| + |\dot{x}_n(s)-\dot{x}_*(s)|)\,ds.\end{aligned} \tag{5.24}$$

Так как множество $\mathscr{R}_{\overline{\text{co}}U}(x_0, y_0)$ является компактом в $C(T,V) \times w\text{-}\mathscr{W} \times w\text{-}L^q(T,Y)$, $C(T,V) \times C(T,H) \times w\text{-}L^q(T,Y)$ и $\{(x_n,\dot{x}_n),u_n\} \in \mathscr{R}_{\overline{\text{co}}U}(x_0,y_0)$, то, переходя, если необходимо, к подпоследовательности, мы можем предположить, что

$$\{(x_n,\dot{x}_n),u_n\} \to \{(x,\dot{x}),u\} \in \mathscr{R}_{\overline{\text{co}}U}(x_0,y_0)$$

в $C(T,V) \times w\text{-}\mathscr{W} \times w\text{-}L^q(T,Y)$ и в $C(T,V) \times C(T,H) \times w\text{-}L^q(T,Y)$. Переходя к пределу в (5.20) и учитывая (5.21)–(5.24), получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}|\dot{x}(t) - x_*(t)|^2 + \frac{1}{2}c_*\|x(t) - x_*(t)\|^2 \\ &\qquad \le \int_0^t M(s)|\dot{x}(s) - \dot{x}_*(s)|(\beta\|x(s) - x_*(s)\| + |\dot{x}(s) - \dot{x}_*(s)|)\,ds, \end{aligned} \tag{5.25}$$

где $M(s) = \max\{m \cdot k(s), k_1(u_*(s))\}$ и $\beta > 0$ — константа вложения V в H.

Пусть $d = \min(1, c_*)$ и $l(t) = (\beta + 2)M(t)$. Используя неравенство $2|a||b| \le |a|^2 + |b|^2$ и (5.25), придем к неравенству

$$d(|\dot{x}(t) - x_*(t)|^2 + \|x(t) - x_*(t)\|^2) \le \int_0^t l(s)(|\dot{x}(s) - \dot{x}_*(s)|^2 + \|x(s) - x_*(s)\|^2)\,ds. \tag{5.26}$$

Из неравенства Беллмана — Гронуолла и (5.26) следует, что $x(t) = x_*(t)$, $\dot{x}(t) = \dot{x}_*(t)$, $t \in T$. Воспользовавшись (5.15), (5.16), (5.18), получим, что $u_n \to u_*$ в $L^q_w(T,Y)$ и в соответствии с леммой 3.2 $u_n \to u_* = u$ в $w\text{-}L^q(T,Y)$. Теперь включение (5.17) завершает доказательство.

Следствие 5.2. *Пусть предположения* $\Gamma_1(f)$, $\Gamma(f)$ *и* $\Gamma(U)(1)$, (3), $\Gamma_1(U)$ *имеют место. Тогда*

$$\mathscr{R}_{\overline{\text{co}}U}(x_0,y_0) = \overline{\mathscr{R}_{U\cap \operatorname{ext}\overline{\text{co}}U}(x_0,y_0)} = \overline{\mathscr{R}_U(x_0,y_0)},$$

где черта вверху означает замыкание в топологии любого из пространств

$$\begin{gathered} C(T,V) \times w\text{-}\mathscr{W} \times w\text{-}L^q(T,Y), \quad C(T,V) \times C(T,H) \times w\text{-}L^q(T,Y), \\ C(T,V) \times w\text{-}\mathscr{W} \times L^q_w(T,Y), \quad C(T,V) \times C(T,H) \times L^q_w(T,Y). \end{gathered} \tag{5.27}$$

Следствие вытекает из теорем 4.1, 5.2 и леммы 3.2.

Замечание 5.1. Следствие 5.2 сохраняет свою силу, если в (5.27) пространство $C(T,V)$ заменить пространством $C(T,H)$.

Замечание 5.2. Вместо гипотезы $\Gamma_1(f)$ более естественным кажется предположение

$$\|f(t,x,y) - f(t,x_1,y_1)\|_{\mathscr{L}(Y,H)} \le k_1(t)(|x - x_1| + |y - y_1|), \tag{5.28}$$

$k_1(\cdot) \in L^p(T,R^+)$.

Однако, как показывают примеры, для управляемых гиперболических систем это неравенство в общем случае не имеет места.

В заключение отметим, что затронутые в работе вопросы для управляемых систем ранее не изучались. Поэтому полученные результаты не имеют аналогов для сравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Толстоногов А. А.* Экстремальные селекторы многозначных отображений и принцип «бэнг-бэнг» для эволюционных включений // Докл. АН СССР. 1991. Т. 317, № 3. С. 589–593.

2. *Tolstonogov A. A.* Extreme continuous selectors of multivalued maps and there applications // J. Differential Equations. 1995. V. 122, N 2. P. 161–180.

3. *De Blasi F. S., Pianigiani G.* On the density of extremal solutions of differential inclusions // Ann. Polon. Math. 1992. V. 56, N 2. P. 133–142.

4. *Papageorgiou N.* On the «bang-bang» principles for nonlinear evolution inclusions // Dynam. Systems Appl. 1993. V. 2. P. 61–74.

5. *Papageorgiou N. S.* On nonconvex valued Volterra integral inclusions in Banach spaces // Czechoslovak Math. J. 1994. V. 44. P. 631–648.

6. *Hu S., Papageorgiou N. S.* On nonlinear, nonconvex evolution inclusions // Kodai Math. J. 1995. V. 18. P. 425–436.

7. *Cardinali T., Papageorgiou N. S., Papalini F.* On nonconvex functional evolution inclusions involving m-dissipative operators // Czechoslovak Math. J. 1997. V. 47. P. 135–148.

8. *Migorski S.* Some remarks on extremal solutions of nonlinear first order evolution inclusions // Dynam. Systems Appl. 1997. V. 6. P. 21–25.

9. *Cardinali T., Fiacca A., Papageorgiou N. S.* On the solution set of nonlinear integrodifferential inclusions in R^N // Math. Japon. 1997. V. 46, N 1. P. 117–127.

10. *Avgerinos E., Papageorgiou N. S.* Extremal solutions and relaxation for second order vector differential inclusions // Arch. Math. 1998. V. 34. P. 427–434.

11. *Толстоногов А. А.* Непрерывные селекторы многозначных отображений с невыпуклыми незамкнутыми значениями // Мат. сб. 1996. Т. 187, № 5. С. 121–142.

12. *Tolstonogov A. A., Tolstonogov D. A.* L_p-continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values: Existence theorems // Set-Valued Anal. 1996. V. 4, N 2. P. 173–203.

13. *Tolstonogov A. A., Tolstonogov D. A.* L_p-continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values: relaxation theorems // Set-Valued Anal. 1996. V. 4, N 3. P. 237–269.

14. *Tolstonogov A. A., Tolstonogov D. A.* On the «bang-bang» principle for nonlinear evolution inclusions // Nonlinear Differential Equations Appl. 1999. V. 6, N 1. P. 101–118.

15. *Zeidler E.* Nonlinear functional analysis and its applications. II. New York: Springer Verl., 1990.

16. *Бурбаки Н.* Топологические векторные пространства. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.

17. *Barbu V.* Nonlinear semigroups and differential equations in Banach space. Leyden (The Netherlands): Noordhoff Intern. Publ., 1976.

18. *Толстоногов А. А.* Релаксация в невыпуклых задачах оптимального управления, описываемых эволюционными уравнениями первого порядка // Мат. сб. 1999. Т. 190, № 11. С. 135–160.

19. *Fryszkowski A.* Continuous selections for a class of nonconvex multivalued maps // Stud. Math. 1983. V. 76. P. 163–171.

Статья поступила 10 января 2001 г.

Толстоногов Александр Александрович
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск 664033
aatol@icc.ru