Сибирский математический журнал
Июль—август, 2002. Том 43, № 4

УДК 513.7

ДИСКРЕТНЫЕ И НЕДИСКРЕТНЫЕ ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ В $\mathbb{R}^3$

Р. Са Эрп, Э. Тубиан

Аннотация: Доказано существование замкнутых бесконечно дифференцируемых поверхностей M в $\mathbb{R}^3$, каждая из которых может быть включена в некоторое семейство F изометричных ей попарно не конгруэнтных бесконечно дифференцируемых поверхностей, содержащее сколь угодно близкие к M поверхности. Доказано, что семейство F может быть более чем счетным.

Ключевые слова: гладкая поверхность, изометрическая деформация, изгибаемый многогранник

1. Введение. Поверхность $M \subset \mathbb{R}^3$ называют *однозначно определенной*, если любая изометричная ей поверхность $M' \subset \mathbb{R}^3$ конгруэнтна M (поверхность M конгруэнтна M', если существует движение I в $\mathbb{R}^3$ такое, что $M' = I(M)$). С. Кон-Фоссен [1] показал, что если M — замкнутая C^3-поверхность с гауссовой кривизной $K > 0$, то M однозначно определена. Затем в [2] и независимо в [3] доказан тот же результат для любой C^2-замкнутой поверхности с $K \geq 0$. Для некомпактных поверхностей А. В. Погорелов [4] доказал, что если $M \subset \mathbb{R}^3$ — полная гомеоморфная плоскости поверхность с $K > 0$ такая, что $\int_M K dA = 2\pi$, то M однозначно определена (см. также [5]).

Относительно многогранников О. Коши доказал, что любой выпуклый многогранник однозначно определен среди всех выпуклых многогранников. Дж. Стокер [6] и И. Х. Сабитов [7] распространили результат Коши на некоторые невыпуклые многогранники, гомеоморфные сфере. С другой стороны, Р. Коннели [8] сконструировал вложенный изгибаемый многогранник, гомеоморфный сфере. Вскоре Л. Родригес и Х. Розенберг [9] установили однозначную определенность невыпуклых многогранников весьма общего вида.

По поводу других результатов об однозначной определенности поверхностей и многогранников см. [5, 10–14].

С другой стороны, Х. Розенберг и Э. Тубиан [15] построили полную минимальную поверхность $M \subset \mathbb{R}^3$ с $K < 0$, которая входит в однопараметрическое непрерывное семейство неконгруэнтных минимальных полных поверхностей M_θ, $\theta \in \mathbb{R}$, такое, что M_θ равномерно сколь угодно близко к $M = M_0$ для θ, близких к 0. Фактически если (g, ω) — представление Вейерштрасса M, то $(g, e^{i\theta}\omega)$ — представление Вейерштрасса поверхности M_θ. Поэтому индуцированной на M_θ метрикой является

$$ds_\theta^2 = [(1/2)|e^{i\theta}\omega|(1 + |g^2|)]^2 = [(1/2)|\omega|(1 + |g^2|)]^2 = ds^2,$$

Исследования первого автора частично поддержаны фондами CNPq и PRONEX, Brazil.

где ds^2 — метрика на M. Тем самым M_θ — семейство неконгруэнтных непрерывных (даже аналитических) изометрических деформаций поверхности M.

И. Х. Сабитов сообщил нам некоторые соображения. Одно из них состоит в уточнении терминологии: термин «flexible» (изгибаемый) идентифицируется с термином «bending», а изгибание, по его мнению, — это всегда *непрерывная* изометрическая деформация.

В данной работе будут построены два примера малых изометрических деформаций в $\mathbb{R}^3$ гладкой поверхности в классе гладких поверхностей. Первая из них является дискретной деформацией (см. теорему 1). Отметим, что Р. Коннели и И. Х. Сабитов упоминали о существовании дискретной деформации, см. [14, с. 217, 218]. В этой работе мы дадим явные формулы такой деформации. Во втором примере деформации уже не являются дискретными и параметризованы некоторым компактным множеством $K \subset [0,1]$, см. теорему 2. В частности, K может быть произвольным счетным множеством, канторовым множеством или даже нигде не плотным подмножеством со строго положительной лебеговой мерой.

Авторы благодарны И. Х. Сабитову за массу полезных советов.

2. Основные результаты.

Теорема 1. *Для любого $g \in \mathbb{N}$ существует компактная ориентируемая поверхность $\overline{M} \subset \mathbb{R}^3$ такая, что*

(i) *$\overline{M}$ — компактная поверхность класса C^∞ без края рода g;*

(ii) *для любых $k \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ существует компактная поверхность $\overline{M}_{k,\varepsilon} \subset \mathbb{R}^3$ класса C^∞ без края такая, что*

(1) *$\overline{M}_{k,\varepsilon}$ ε-близка к $\overline{M}$ в C^k-топологии;*

(2) *$\overline{M}_{k,\varepsilon}$ изометрична, но не конгруэнтна $\overline{M}$ (т. е. нет изометрии I в $\mathbb{R}^3$ такой, что $I(\overline{M}) = \overline{M}_{k,\varepsilon}$).*

Отметим, что такое же утверждение с аналогичным доказательством справедливо, когда объемлющим пространством является гиперболическое пространство $\mathbb{H}^3$.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим строго убывающую функцию $F : [0,1] \to [0,1]$, $z = F(x)$, класса C^∞ такую, что

(a) $F(0) = 1$, $F(1) = 0$;

(b) $(\forall k \in \mathbb{N}^*\ \forall n \in \mathbb{N}^*)\ F^{(k)}(\frac{1}{n}) = 0$;

(c) $(\forall k \in \mathbb{N}^*)\ F^{(k)}(0) = F^{(k)}(1) = 0$.

Мы построим такую функцию в приложении.

Рассмотрим поверхность с краем $M \subset \mathbb{R}^3$, получаемую вращением графика F относительно оси z. Тогда M — поверхность класса C^∞ с краем и вдоль края M касается плоскости $P_1 = \{z = 0\}$. В силу свойства (c) касание с плоскостью P_1 вдоль ∂M бесконечно гладкое. Поэтому M можно продолжить ниже плоскости P_1 и получить ориентируемую компактную C^∞-поверхность $\overline{M}$ без края требуемого рода g и такую, что $\overline{M} \setminus M$ лежит ниже плоскости P_1.

Для любого $n \in \mathbb{N}^*$ положим $b_n = F(\frac{1}{n})$ и $P_n = \{z = b_n\}$. Заметим, что (b_n) — неотрицательная строго возрастающая последовательность, сходящаяся к 1. Для любого $n \in \mathbb{N}^*$ обозначим через $\overline{M}_n^+$ (соответственно через $\overline{M}_n^-$) часть $\overline{M}$, находящуюся выше (соответственно ниже) плоскости P_n. Обозначим через $\overline{M}_n^{+*}$ поверхность, симметричную $\overline{M}_n^+$ относительно P_n. Наконец, положим $\overline{M}_n^* = \overline{M}_n^- \cup \overline{M}_n^{+*}$. Отметим, что ввиду свойства (b) функции F поверхность

$\overline{M}_n^*$ будет компактной C^∞-поверхностью без края для любого $n \in \mathbb{N}^*$. Кроме того, поверхности $\overline{M}_n^*$ изометричны $\overline{M}$, но, очевидно, не конгруэнтны ей. По построению для любых $k \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ каждая из поверхностей $\overline{M}_n^*$ принадлежит классу C^k и ε-близка к $\overline{M}$ для достаточно больших n. Это завершает доказательство.

Замечание 1. Для любого $n \in \mathbb{N}^*$ обозначим через M_n поверхность с краем, получаемую вращением относительно оси z части графика функции F с $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$. Для любого $\varepsilon > 0$ имеем $|K| < \varepsilon$ на M_n и $A(M_n) < \varepsilon$ при каждом достаточно большом n, где K — гауссова кривизна и $A(M_n)$ — площадь M_n. Продолжив M_n, мы получим компактную поверхность $\overline{M}_n$ без края рода 0 такую, что $\overline{M}_n \setminus M_n$ находится ниже P_n и $K \geq 0$ на $\overline{M}_n \setminus M_n$. Положим $K^- = \inf(K, 0)$. Тогда $K^- = 0$ на $\overline{M}_n \setminus M_n$. Наконец, положим

$$C_n^- = \left| \int\limits_{\overline{M}_n} K^- dA \right|.$$

Тогда $C_n^- < \varepsilon^2$, так что C_n^- сколь угодно мала для достаточно больших n. Очевидно, $\overline{M}_n$, как и поверхность $\overline{M}$, допускает малую изометрическую, но нетривиальную деформацию,

Замечание 2. На самом деле часть поверхности, находящаяся выше плоскости $P_1 = \{z = 0\}$, т. е. $\overline{M}_1^+$, неизгибаема по крайней мере в классе аналитических по параметру деформаций. Это непосредственно следует из теоремы Сабитова, см. [16].

В обозначениях теоремы 1 и ее доказательства отметим, что множество плоскостей, используемых для получения поверхностей, изометричных $\overline{M}$, счетно. Точнее, мы использовали плоскости $P_n = \{z = b_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. В следующем утверждении мы обобщим эту конструкцию и получим более сложное множество изометрических плоскостей.

Теорема 2. *Пусть $K \subset [0,1]$ — произвольное нигде не плотное компактное множество. Для любого целого $g \in \mathbb{N}$ существуют гладкая замкнутая поверхность $\overline{M}$ рода g и семейство горизонтальных плоскостей $\{(P_a), a \in K\}$, обладающие следующими свойствами:*

(a) *$P_a \neq P_b$ для любых различных $a, b \in K$.*

(b) *Для любого $a \in K$ пусть $\overline{M}_a^+$ (соответственно $\overline{M}_a^-$) — часть $\overline{M}$, находящаяся выше (соответственно ниже) плоскости P_a. Обозначим через $\overline{M}_a^{+*}$ поверхность, симметричную $\overline{M}_a^+$ относительно P_a. Наконец, положим $\overline{M}_a^* = \overline{M}_a^- \cup \overline{M}_a^{+*}$. Тогда $\overline{M}_a^*$ изометрична, но не конгруэнтна $\overline{M}$.*

(c) *Допустим, что $m = \inf(K)$ — точка сгущения $K \setminus \{m\}$. Тогда для любого целого $k \in \mathbb{N}$ и любого $\varepsilon > 0$ поверхность $\overline{M}_a^*$ ε-близка к $\overline{M}$ в топологии C^k для бесконечного множества элементов a из K.*

Доказательство теоремы 2. Пусть $m = \inf(K)$. С точностью до сдвигов компактных множеств $K' = K \setminus \{m\}$ можно считать, что $\inf(K) = 0$. Аналогично с точностью до растяжений можно считать, что $\sup(K) = 1$. Следовательно, $0,\ 1 \in K$.

Рассмотрим C^∞-функцию $H:\ [0,1] \to \mathbb{R}^+$, $z = H(x)$, такую, что

(a) $(\forall x \in [0,1])\ H(x) = 0 \Leftrightarrow x \in K$,

(b) $(\forall k \in \mathbb{N}^*\ \forall a \in K)\ H^{(k)}(a) = 0$.

Мы построим такую функцию в приложении.

Положим

$$B = \int\limits_0^1 H(t)\,dt$$

и определим отображение $G : [0,1] \to [0,1]$ следующим образом:

$$G(x) = \frac{1}{B} \int\limits_x^1 H(t)\,dt.$$

Очевидно, G отображает $[0,1]$ в $[0,1]$, принадлежит классу C^∞, строго убывает и

(a) $G(0) = 1$, $G(1) = 0$;

(b) $(\forall k \in \mathbb{N}^* \ \forall a \in K)\ G^{(k)}(a) = 0$;

(c) $G'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in K$.

Дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 1 с той разницей, что здесь мы используем семейство горизонтальных плоскостей, параметризованных посредством K: $\{P_a,\ a \in K\}$, где $P_a = \{z = G(a)\}$. Отметим, что если $0 \in K$ — точка сгущения $K \setminus \{0\}$, то для любых $k \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ поверхности $\overline{M}_a^*$ ε-близки к $\overline{M}$ относительно C^k-топологии для любого $a \in K$, достаточно близкого к 0.

Приложение. I. Построим функцию F со свойствами, указанными в доказательстве теоремы 1. Определим функцию $h : [0,1] \to [0,1]$, $z = h(x)$, полагая

$$h(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}} e^{-(1-x)^{-2}}, & \text{если } x \in]0,1[, \\ 0, & \text{если } x = 0 \text{ или } x = 1. \end{cases}$$

Заметим, что h — бесконечно дифференцируемая функция вплоть до крайних точек $x = 0$ и $x = 1$, в которых она имеет нули бесконечного порядка. Положим

$$A = \int\limits_0^1 h(t)\,dt.$$

Пусть $f : [0,1] \to [0,1]$ — функция, определенная равенством

$$f(x) = \frac{1}{A} \int\limits_x^1 h(t)\,dt.$$

Тогда f — бесконечно дифференцируемая строго убывающая функция такая, что

(i) $f(0) = 1$, $f(1) = 0$;

(ii) $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0\ \forall k \in \mathbb{N}^*$.

Построим функцию F, используя f. Для этого определим последовательность (b_n), $n \in \mathbb{N}^*$, полагая $b_1 = 0$ и $b_n = 1 - e^{-n}$ для $n > 1$. Сначала опишем F геометрически. Начнем отображать график f в каждом прямоугольнике

$$R_n = \{1/(n+1) \le x \le 1/n, \quad b_n \le z \le b_{n+1}\}$$

xz-плоскости, применяя подходящее аффинное отображение, с тем, чтобы получить строго убывающий график на множестве $x \in [1/(n+1), 1/n]$. Затем достаточно взять объединение всех таких графиков. Полученная кривая имеет бесконечно гладкий график на множестве $]0,1]$. В качестве F возьмем функцию, графиком которой является построенная кривая, после чего надо распространить F в точку 0, полагая $F(0)=1$ и $F^{(k)}(0)=0$ для каждого $k\in\mathbb{N}^*$.

Теперь определим F аналитически. Для этого при любом $n\in\mathbb{N}^*$ определим отображение $g_n:[1/(n+1),1/n]\to[b_n,b_{n+1}]$, полагая

$$g_n(x)=b_n+(b_{n+1}-b_n)f\left(\frac{x-1/(n+1)}{1/n-1/(n+1)}\right).$$

Тогда F определяется так:

$$F(0)=1,\quad F(x)=g_n(x)\quad \forall x\in[1/(n+1),1/n].$$

Очевидно, F — непрерывное отображение. Отметим, что для любого $k\in\mathbb{N}^*$, подставляя вместо b_n их значения, имеем

$$g_n^{(k)}(x)=n^k(n+1)^k(1-e^{-1})e^{-n}f^{(k)}(n(n+1)x-n)$$

для любого $x\in[1/(n+1),1/n]$. Отсюда следует, что

$$g_n^{(k)}(1/(n+1))=g_n^{(k)}(1/n)=0$$

для всех $k\in\mathbb{N}^*$, $n\in\mathbb{N}^*$. Таким образом, F — отображение класса C^∞ на $]0,1]$ такое, что $F^{(k)}(1/n)=0$ для всех $k\in\mathbb{N}^*$, $n\in\mathbb{N}^*$. Положим $F^{(k)}(0)=0$ для любого $k\in\mathbb{N}^*$. Остается показать, что F бесконечно гладкая в нуле.

Рассмотрим произвольные $k\in\mathbb{N}^*$ и $\varepsilon>0$. Поскольку $f^{(k)}$ непрерывна на $[0,1]$, существует вещественное $A_k>0$ такое, что $|f^{(k)}(x)|<A_k$ для любого $x\in[0,1]$. Отсюда $\left|g_n^{(k)}(x)\right|<A_kn^k(n+1)^ke^{-n}$ для любых $n\in\mathbb{N}^*$ и $x\in[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]$. Имеем

$$(\exists n_0\in\mathbb{N}^*)\quad n>n_0\Rightarrow|g_n^{(k)}(x)|<\varepsilon\quad\forall x\in[1/(n+1),1/n].$$

Пусть теперь (x_p), $p\in\mathbb{N}$, — последовательность в $]0,1]$, сходящаяся к 0. Тогда

$$(\exists p_0\in\mathbb{N}^*)\quad p>p_0\Rightarrow x_p<\frac{1}{n_0+1}.$$

Для любого целого $p>p_0$ существует целое $n>n_0$ такое, что $x_p\in[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]$. Поэтому $\left|g_n^{(k)}(x_p)\right|<\varepsilon$. Следовательно, $|F^{(k)}(x_p)|<\varepsilon$ для любого $p>p_0$. Таким образом, F является функцией класса C^k в 0 для любого $k\in\mathbb{N}$.

II. Построим функцию H со свойствами, указанными в доказательстве теоремы 2.

Во-первых, для любых вещественных чисел a, b, $a<b$, определим функцию

$$h_{a,b}(x)=\begin{cases} e^{-(x-a)^{-2}}e^{-(b-x)^{-2}}, & \text{если } a<x<b,\\ 0, & \text{если } a=0 \text{ или } x=b.\end{cases}$$

Заметим, что $h_{a,b}$ является функцией класса C^∞ на $[a,b]$. Кроме того, для любого $k\in\mathbb{N}$ имеем $h_{a,b}^{(k)}(a)=h_{a,b}^{(k)}(b)=0$. Для каждого $k\in\mathbb{N}$ положим

$$\alpha_{a,b}^k=\sup\bigl\{\bigl|h_{a,b}^{(k)}(x)\bigr|,\ x\in[a,b]\bigr\}.$$

Индукцией по $k\in\mathbb{N}$ можно показать, что

$$\begin{cases} h_{a,b}^{(k)}(x)=P_k(1/(x-a),1/(x-b))e^{-(x-a)^{-2}}e^{-(b-x)^{-2}}, & \text{если } a<x<b,\\ 0, & \text{если } a=0 \text{ или } x=b,\end{cases}$$

где $P_k \in \mathbb{R}[X,Y]$ — вещественный полином с целыми коэффициентами, не зависящий ни от a, ни от b. Отсюда вытекает, что

$$\lim_{|b-a|\to 0} \alpha^k_{a,b} = 0$$

для всякого $k \in \mathbb{N}$.

Далее, заметим, что $U = [0,1] \setminus K$ является открытым множеством и тем самом представляет собой объединение попарно не пересекающихся интервалов $]a,b[\subset]0,1[$. Определим отображение $H: [0,1] \to \mathbb{R}^+$ следующим образом: для любого $x \in [0,1]$ положим $H(x) = 0$, если $x \in K$, и $H(x) = h_{a,b}(x)$, если x принадлежит U и содержится в связной компоненте $]a,b[$ множества U. Очевидно, что H непрерывно и даже класса C^∞ на U. На самым деле H бесконечно дифференцируемо на $[0,1]$ и $H^{(k)}(a) = 0$ для любых $k \in \mathbb{N}$ и $a \in K$. Докажем последнее утверждение индукцией по $k \in \mathbb{N}$.

Если $k = 0$, то утверждение очевидно. Пусть $k \in \mathbb{N}$ произвольно. Предположим, что H класса C^k на $[0,1]$ с $H^{(k)}(a) = 0$ для всех $a \in K$. Если мы покажем, что для любого $x_0 \in K$

$$\lim_{\substack{x\to x_0,\\ x\neq x_0}} \frac{H^{(k)}(x) - H^{(k)}(x_0)}{x - x_0} = 0,$$

то этим установим, что H — отображение класса C^{k+1} с $H^{(k+1)}(a) = 0$ для любого $a \in K$.

Пусть $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность в $[0,1] \setminus \{x_0\}$, сходящаяся к x_0. Очевидно, что если $x_n \in K$, то $H^{(k)}(x_n) - H^{(k)}(x_0) = 0$, тем самым можно считать, что $x_n \in U$. Также можно считать, что $x_n > x_0$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ пусть $]a_n, b_n[$ — связная компонента U, содержащая x_n: $x_n \in]a_n, b_n[$. Тогда для любого n имеем $H^{(k)}(x_n) - H^{(k)}(x_0) = H^{(k)}(x_n) = h^{(k)}_{a_n,b_n}(x_n)$. Кроме того,

$$0 \le h^{(k)}_{a_n,b_n}(x_n) \le \alpha^k_{a_n,b_n}(x_n - a_n) \le \alpha^k_{a_n,b_n}(x_n - x_0)$$

при $x_0 < a_n < x_n$. Таким образом,

$$0 \le \frac{H^{(k)}(x_n) - H^{(k)}(x_0)}{x_n - x_0} \le \alpha^k_{a_n,b_n}.$$

Заметим, наконец, что $|b_n - a_n| \to 0$ при $n \to \infty$. Но, как мы уже знаем, $\alpha^k_{a_n,b_n} \to 0$ при $n \to \infty$. Это доказывает, что H класса C^{k+1} на $[0,1]$ и $H^{(k+1)}(a) = 0$ для любого $a \in K$.

Очевидно, H обладает свойствами, указанными в начале доказательства теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кон-Фоссен С.* Изгибаемость поверхностей в «целом» // Успехи мат. наук. 1936. Т. 1. С. 33–76.
2. *Voss K.* Differentialgeometrie geschlossener Flächen im Euklidischer Raum. I // Jahr. Deutsch. Math. Verein. 1960. Bd 63. S. 117–135.
3. *Sacksteder R.* The rigidity of hypersurfaces // J. Math. Mech. 1962. V. 11. P. 929–939.
4. *Погорелов А. В.* Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М.: Наука, 1969.
5. *Kenmotsu K.* Lectures on deformable surfaces in R^3. (Preprint).
6. *Stoker J. J.* Geometrical problems concerning polyhedra in the large // Comm. Pure Appl. Math. 1968. V. 21. P. 119–168.

7. *Иванова-Каратопраклиева И., Сабитов И. Х.* Изгибание поверхностей // Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. М.: ВИНИТИ, 1995. Т. 8. С. 108–167. (Итоги науки и техники).

8. *Connelly R.* Rigidity // Handbook of Convex Geometry. Amsterdam: North-Holland, 1993. P. 223–271.

9. *Rodriguez L., Rosenberg H.* Rigidity of certain polyhedra in $\mathbb{R}^3$ // Comment. Math. Helv. 2000. V. 75. P. 478–503.

10. *Colares G. Kenmostu K.* Isometric deformations of surfaces in R^3 // Pacific J. Math. 1989. V. 136. P. 71–80.

11. *Connelly R.* Conjectures and open questions in rigidity // Proc. Intern. Congress. Helsinki, 1978. P. 407–414.

12. *Greene R. E., Wu H.* On the rigidity of punctured ovaloids // Ann. Math. 1971. V. 94. P. 1–20.

13. *Greene R. E., Wu H.* On the rigidity of punctured ovaloids. II // J. Differential Geom. 1972. V. 6. P. 459–472.

14. *Сабитов И. Х.* Локальная теория изгибаний поверхностей // Современные проблемы. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1989. Т. 48. С. 196–270. (Итоги науки и техники).

15. *Rosenberg H., Toubiana E.* Some remarks on deformations of complete minimal surfaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1986. V. 295, N 2. P. 491–499.

16. *Сабитов И. Х.* О жесткости гофрированных поверхностей вращения // Мат. заметки. 1973. Т. 14, № 4. С. 517–522.

Статья поступила 31 мая 2001 г.

Са Эрп Рикардо (Ricardo Sa Earp)
Departamento de Matemática Pontif"́cia Universidade Católica Rua Marquês de São Vicente, 225 22453-900 Gávea Rio de Janeiro, Brazil
earp@mat.puc-rio.br

Тубиан Эрик (Eric Toubiana)
Département de Mathématiques Université Paris VII 2, Place Jussieu 75251 Paris - Cedex 05, France
toubiana@math.jussieu.fr