Сибирский математический журнал
Июль—август, 2002. Том 43, № 4

УДК 519.48

О ДЛИНЕ ШКАЛ ПОТЕНЦИАЛОВ ВЫЧИСЛИМОСТИ n–ЭЛЕМЕНТНЫХ АЛГЕБР

А. Г. Пинус, С. В. Журков

Аннотация: Найдена длина шкалы потенциалов вычислимости n-элементных алгебр, в качестве следствия найдена длина фильтра, порожденного клоном дискриминаторной функции в решетке клонов функций на n-элементном множестве.

Ключевые слова: потенциал вычислимости, клон, условный терм, решетка

В работе [1] на основе понятия условного терма (программы вычислений в универсальной алгебре) введено понятие шкалы потенциалов вычислимости n-элементных алгебр и исследован ряд свойств этой шкалы — вопросы о числе атомов, коатомов, о том, является ли эта шкала решеткой, какими решетками могут быть интервалы этой шкалы. В работе [2] получена некоторая верхняя оценка числа элементов шкалы. В настоящей работе находится длина шкалы потенциалов вычислимости n-элементных алгебр для любого натурального n.

Понятие условно термальной на алгебре $\mathscr{A}$ функции (соответствующее интуитивному представлению о программно-вычислимой на $\mathscr{A}$ функции) введено в работе [3] (обзор результатов, связанных с этим понятием, см. в [4, 5]). При этом совокупность $CT(\mathscr{A})$ всех условно термальных функций алгебры $\mathscr{A}$ естественно рассматривать как потенциал вычислимости алгебры $\mathscr{A}$. Две универсальные алгебры $\mathscr{A} = \langle A; \sigma_1\rangle$ и $\mathscr{B} = \langle B; \sigma_2\rangle$ сигнатур σ_1 и σ_2 соответственно обладают одинаковым потенциалом вычислимости ($CT(\mathscr{A}) \sim CT(\mathscr{B})$), если существует биекция π множества A на множество B, сопрягающая совокупность функций $CT(\mathscr{A})$ с совокупностью $CT(\mathscr{B})$, т. е. такая, что

$$CT(\mathscr{A}) = \pi^{-1}CT(\mathscr{B})\pi = \{\pi^{-1}f(\pi x_1, \dots, \pi x_n) \mid f(x_1, \dots, x_n) \in CT(\mathscr{B})\}.$$

Совокупность всех потенциалов вычислимости n-элементных универсальных алгебр, профакторизованную по отношению $\sim$, обозначим через CT_n. На множестве CT_n естественным образом определяется отношение частичного порядка $\leq$, соответствующее отношению «иметь больше возможности для программных вычислений»: $F_1 \leq F_2$ тогда и только тогда, когда для некоторых алгебр $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ таких, что $F_1 = CT(\mathscr{A})/\sim$, $F_2 = CT(\mathscr{B})/\sim$, и имеющих одно и то же основное множество, $CT(\mathscr{A}) \subseteq CT(\mathscr{B})$. Частично упорядоченное множество $\langle CT_n; \leq\rangle$ называется *шкалой потенциалов вычислимости* n-элементных алгебр.

В работе [6] найдены инварианты потенциалов вычислимости конечных универсальных алгебр, а именно доказано, что $CT(\mathscr{A}) = CT(\mathscr{B})$ ($CT(\mathscr{A}) = \pi^{-1}CT(\mathscr{B})\pi$) тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Sub}\mathscr{A} = \pi^{-1}(\operatorname{Sub}\mathscr{B}), \quad \operatorname{Iso}\mathscr{A} = \pi^{-1}(\operatorname{Iso}\mathscr{B})\pi,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования РФ (грант № Е00–1.0–30).

где $\mathrm{Sub}\,\mathscr{A}$ — совокупность подалгебр алгебры $\mathscr{A}$, $\mathrm{Iso}\,\mathscr{A}$ — совокупность внутренних изоморфизмов (изоморфизмов между подалгебрами) алгебры $\mathscr{A}$. Тем самым, в частности, совокупность CT_n конечна для любого натурального n. Соответственно $CT(\mathscr{A})/\sim \leq CT(\mathscr{B})/\sim$ тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{Sub}\,\mathscr{B} \subseteq \pi^{-1}(\mathrm{Sub}\,\mathscr{A}), \quad \mathrm{Iso}\,\mathscr{B} \subseteq \pi^{-1}(\mathrm{Iso}\,\mathscr{A})\pi$$

для некоторой соответствующей биекции π.

Как отмечено выше, верхняя оценка мощности множества CT_n, а также точные значения для $|CT_2|$, $|CT_3|$ найдены в работе [2]. П. Джипсеном посчитано число $|CT_4|$ (см. [5, 6]). В [1] найдены числа атомов и коатомов шкал $\langle CT_n; \leq\rangle$, доказано, что сами эти шкалы при $n \geq 3$ не являются решетками, что любая конечная решетка вложима (как решетка) в некоторый интервал шкалы $\langle CT_n; \leq\rangle$, являющийся решеткой, при подходящем n, и построена шкала $\langle CT_3; \leq\rangle$. Естественным представляется вопрос о длине шкалы $\langle CT_n; \leq\rangle$.

Напомним, что длиной цепи $a_0 < a_1 < \ldots < a_m$ является число m, а длиной частично упорядоченного множества — максимум длин цепей из этого множества. Длину частично упорядоченного множества $\langle L; \leq\rangle$ обозначим через $d(\langle L; \leq\rangle)$.

Пусть $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $\mathrm{Bi}(C)$ — совокупность всех биекций между подмножествами множества C, а $P(C)$ — совокупность всех подмножеств множества C. Как замечено выше, шкала $\langle CT_n; \leq\rangle$ двойственна некоторому подмножеству $\langle M; \leq\rangle$ прямого произведения $\langle P(P(n)); \subseteq\rangle \times \langle P(\mathrm{Bi}(n)); \subseteq\rangle$. При этом, как доказано в [3], пара $\langle A; B\rangle$, где $A \subseteq P(n)$, $B \subseteq \mathrm{Bi}(n)$, принадлежит M, если

1) A — нижняя подполурешетка полурешетки $\langle P(n); \cap\rangle$, включающая множества $\varnothing$ и n (а значит, алгебраическая решетка, где роль инфимума играет теоретико-множественное пересечение);

2) B — инверсная подполугруппа инверсной полугруппы $\mathrm{Bi}(n)$;

3) совокупность неподвижных точек любого отображения g из B входит в A;

4) для любого $g \in B$ множества $\mathrm{dom}\, g$ и $\mathrm{rang}\, g$ входят в A, и для любого $C \in A$ тождественное отображение id_C множества C входит в B;

5) для любых $\{a\}, \{b\} \in A$ в B входит биекция $\{a\}$ на $\{b\}$.

Очевидным образом имеет место

Лемма 1. *Для любых частично упорядоченных множеств $\langle L_1; \leq\rangle$ и $\langle L_2; \leq\rangle$ имеет место равенство*

$$d(\langle L_1; \leq\rangle \times \langle L_2; \leq\rangle) = d(\langle L_1; \leq\rangle) + d(\langle L_2; \leq\rangle).$$

Заметим при этом, что если $\langle L_1; \leq\rangle$ и $\langle L_2; \leq\rangle$ имеют наибольшие и наименьшие элементы 0_1, 0_2 и 1_1, 1_2 соответственно, $d(\langle L_1; \leq\rangle) = d_1$, $d(\langle L_2; \leq\rangle) = d_2$ и $a_0 < a_1 < \ldots < a_{d_1}$, $b_0 < b_1 < \ldots < b_{d_2}$ — цепи в множествах $\langle L_1; \leq\rangle$ и $\langle L_2; \leq\rangle$ и $a_0 = 0_1$, $b_0 = 0_2$, $a_{d_1} = 1_1$, $b_{d_2} = 1_2$, то $\langle a_0, b_0\rangle < \langle a_1, b_0\rangle < \ldots < \langle a_{d_1}, b_{d_2}\rangle$ — цепь в $\langle L_1; \leq\rangle \times \langle L_2; \leq\rangle$.

Таким образом, если $A_0 = \{\varnothing, n\} \subset A_1 \subset \ldots \subset A_{d_1} = P(n)$ — наиболее длинная цепь нижних полурешеток в $\langle P(P(n)); \subseteq\rangle$, $B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset B_{d_2} = \mathrm{Bi}(n)$ — наиболее длинная цепь инверсных полугрупп в $\langle P(\mathrm{Bi}(n)); \subseteq\rangle$, включающих в себя совокупность B_0 всех биекций между одноэлементными подмножествами множества n и тождественных отображений подмножеств множества n на себя, то элементы цепи $\langle A_0, B_0\rangle < \langle A_1, B_0\rangle < \ldots < \langle A_{d_1}, B_0\rangle < \langle A_{d_1}, B_1\rangle <$

$\ldots < \langle A_{d_1}, B_{d_2}\rangle$ удовлетворяют условиям 1–5. Тем самым $d(\langle CT_n;\leq\rangle) = d_1 + d_2$, где d_1 — длина интервала $[\{\varnothing, n\}; P(n)]$ в частично упорядоченном множестве $\langle P(P(n));\subseteq\rangle$, а d_2 — длина интервала $[B_0; \mathrm{Bi}(n)]$ в частично упорядоченном множестве $\langle P(\mathrm{Bi}(n));\subseteq\rangle$.

Лемма 2. $d(\langle[\{\varnothing, n\}; P(n)];\subseteq\rangle) = 2^n - 2$.

Доказательство. Пусть $P_m(n) = \{D \subseteq n \mid |D| = m\}$. Пусть также $P_m(n) = \{D_1^m, \ldots, D_{C_n^m}^m\}$ и

$$A_0 = \{\varnothing, n\}, A_1 = \{\varnothing, n, D_1^1\}, A_2 = \{\varnothing, n, D_1^1, D_2^1\}, \ldots, A_{C_n^1} = \{\varnothing, n\} \cup P_1(n),$$
$$A_{C_n^1+1} = A_{C_n^1} \cup \{D_1^2\}, \ldots, A_{C_n^1+C_n^2} = \{\varnothing, n\} \cup P_1(n) \cup P_2(n), \ldots, A_{C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^{n-1}} = P(n).$$

Тогда так как $|A_{i+1} \backslash A_i| = 1$ для любого i, то $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_{C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^{n-1}}$ будет цепью в интервале $[\{\varnothing, n\}; P(n)]$ частично упорядоченного множества $\langle P(P(n));\subseteq\rangle$, состоящей из нижних подполурешеток полурешетки $\langle P(n);\cap\rangle$, имеющей максимальную длину, т. е.

$$d(\langle[\{\varnothing, n\}; P(n)];\subseteq\rangle) = C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} = 2^n - 2.$$

Пусть $\langle \mathrm{Part}(C);\leq\rangle$ — частично упорядоченное множество (решетка) всех разбиений множества C и $\Delta(\nabla)$ — наименьший (наибольший) элемент в $\mathrm{Part}(C)$. Если $\Delta = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_r = \nabla$ — максимальная цепь в $\mathrm{Part}(m)$, то очевидно, что переход от θ_{k+1} к θ_k $(k < r)$ осуществляется за счет разбиения одного из классов θ_{k+1}-эквивалентности на два класса θ_k-эквивалентности. В силу этого без труда замечаем, что цепь

$$\theta_0^m = \Delta < \theta_1^m = \{\{0,1\},\{2\},\ldots,\{m-1\}\} < \theta_2^m = \{\{0,1,2\},\{3\},\ldots,\{m-1\}\} < \ldots < \theta_{m-2}^m = \{\{0,1,\ldots,m-2\}\{m-1\}\} < \theta_{m-1}^m = \nabla$$

— цепь наибольшей длины в $\langle \mathrm{Part}(m);\leq\rangle$, т. е. имеет место следующее утверждение.

Лемма 3. $d(\langle \mathrm{Part}(m);\subseteq\rangle) = m - 1$.

В работе [7] найдена длина l_n частично упорядоченного по включению множества всех подгрупп полной симметрической группы $\mathrm{Sym}(n)$ на множестве n, которая равна $[\frac{3n-1}{2}] - b_n$, где b_n — число единиц в двоичном разложении числа n.

Пусть $\mathrm{Bi}_m(n) = \{\phi \in \mathrm{Bi}(n) \mid |\operatorname{Dom}\phi| = m\}$, и пусть $G_0^n = \{\mathrm{id}_n\} \subset G_1^n \subset \ldots \subset G_{l_n}^n = \mathrm{Sym}(n)$ — некоторая цепь подгрупп группы $\mathrm{Sym}(n)$, имеющая максимальную длину.

Если B — некоторая инверсная подполугруппа полугруппы $\mathrm{Bi}(n)$ и $1 < m < n$, то

$$B^m = \left(\left(\bigcup_{k=m+1}^{n} \mathrm{Bi}_k(n)\right) \cap B\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{m} \mathrm{Bi}_k(n)\right)$$

очевидным образом является инверсной подполугруппой полугруппы $\mathrm{Bi}(n)$. Таким образом, если $\mathrm{Id}(n) = \{\mathrm{id}_c \mid C \subseteq n\}$ и

$$E_0 = \mathrm{Bi}_1(n) \cup \mathrm{Id}(n) \subset E_1 \subset \ldots \subset E_{d_2} = \mathrm{Bi}(n) \tag{1}$$

— цепь инверсных подполугрупп полугруппы $\mathrm{Bi}(n)$, имеющая наибольшую длину в интервале $[\mathrm{Bi}_1(n) \cup \mathrm{Id}(n); \mathrm{Bi}(n)]$, то невозможно уплотнение этой цепи за счет добавления полугруппы вида $(E_i)^m$, где $1 \leq i < d_2$, $1 < m < n$. В силу этого инверсные полугруппы вида $\mathrm{Bi}_1(n) \cup \ldots \cup \mathrm{Bi}_k(n) \cup \mathrm{Id}(n)$ входят в любую цепь инверсных подполугрупп полугруппы $\mathrm{Bi}(n)$, имеющую максимальную длину.

Тем самым цепь подполугруппы (1) устроена следующим образом:

$$
\begin{aligned}
E_0 = E_{i_0} = \mathrm{Bi}_1(n) \cup \mathrm{Id}(n) \subset E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_{i_1} \\
= \mathrm{Bi}_1(n) \cup \mathrm{Bi}_2(n) \cup \mathrm{Id}(n) \subset E_{i_1+1} \subset \ldots \subset E_{i_2} \\
= \mathrm{Bi}_1(n) \cup \mathrm{Bi}_2(n) \cup \mathrm{Bi}_3(n) \cup \mathrm{Id}(n) \subset \ldots \subset E_{i_{n-2}} \\
= \mathrm{Bi}_1(n) \cup \mathrm{Bi}_2(n) \cup \ldots \cup \mathrm{Bi}_{n-1}(n) \cup \mathrm{Id}(n) \subset E_{i_{n-2}+1} \\
= \mathrm{Bi}_1(n) \cup \ldots \cup \mathrm{Bi}_{n-1} \cup G_1^n \subset \ldots \subset E_{i_{n-1}-1} \\
= \mathrm{Bi}_1(n) \cup \ldots \cup \mathrm{Bi}_{n-1}(n) \cup G_{l_n-1}^n \subset E_{i_{n-1}} = E_{d_2} = \mathrm{Bi}(n),
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где $G_0 = \{\mathrm{id}_n\} \subset G_1 \subset \ldots \subset G_{l_n-1} \subset G_{l_n} = \mathrm{Sym}(n)$ — цепь подгрупп группы $\mathrm{Sym}(n)$, имеющая максимальную длину.

Заметим также, что если B — инверсная подполугруппа группы $\mathrm{Bi}(n)$, включающая в себя $\mathrm{Bi}_1(n) \cup \mathrm{Id}(n)$ и $1 < m < n$, то отношение $\sim_B^m$ на множестве $P_m(n)$, определенное как $C_1 \sim_B^m C_2$ тогда и только тогда, когда существует $g \in B$ такое, что $\mathrm{Dom}\ g = C_1$ и $\mathrm{Rang}\ g = C_2$, является эквивалентностью, и при этом для любых $C_1, C_2 \in P_m(n)$ таких, что $C_1 \sim_B^m C_2$ подгруппы $B^{C_1} = B \cap \mathrm{Sym}(C_1)$ и $B^{C_2} = B \cap \mathrm{Sym}(C_2)$ сопряжены с помощью отображения $g \in B$ такого, что $\mathrm{Dom}\ g = C_1$ и $\mathrm{Rang}\ g = C_2$. Таким образом, действие B на $P_m(n)$ полностью описывается заданием эквивалентности $\sim_n^m$ на $P_m(n)$ и заданием подгрупп $B^{C_1}, \ldots, B^{C_k}$ симметрической группы $\mathrm{Sym}(m)$ для $C_1, \ldots, C_k$ — представителей всех классов $\sim_B^m$-эквивалентности. При этом для $\mathrm{Bi}_1(n) \cup \mathrm{Id}(n) \subseteq B_1 \subseteq B_2 \subseteq \mathrm{Bi}(n)$ включение $B_1 \subseteq B_2$ имеет место тогда и только тогда, когда для любого $1 < m < n$

1) $\sim_{B_1}^m \leq \sim_{B_2}^m$ (в решетке $\mathrm{Part}(P_m(n))$),

2) $B_1^C \subseteq B_2^C$ для любого $C \in P_m(n)$.

Тем самым в интервале $E_{i_k+1} \subset E_{i_k+2} \subset \ldots \subset E_{i_k+n}$ цепи (2) при $0 \leq k < n-1$ для любого $i_k + 1 \leq j < i_{k+1}$ либо эквивалентность $\sim_{E_{j+1}}^{k+1}$ покрывает эквивалентность $\sim_{E_j}^{k+1}$ и для любого $C \in P_{k+1}(n)$ справедливо равенство $E_j^C = E_{j+1}^C$, либо $\sim_{E_{j+1}}^{k+1} = \sim_{E_j}^{k+1}$ и существует $C \in P_{k+1}(n)$ такое, что для всех $D \in P_{k+1}(n)$ таких, что $C/\sim_{E_j}^{k+1} \neq D/\sim_{E_j}^{k+1}$, имеет место равенство $E_{j+1}^D = E_j^D$, а пара $\langle E_j^C, E_{j+1}^C \rangle$ есть пара соседних подгрупп в цепи подгрупп группы $\mathrm{Sym}(k+1)$, имеющей максимальную длину l_{k+1}.

Пусть $m = C_n^{k+1}$, $\Delta = \theta_0^m < \theta_1^m < \ldots < \theta_{m-1}^m = \nabla$ — цепь максимальной длины в частично упорядоченном множестве $\mathrm{Part}(P_{k+1}(n))$, указанная в доказательстве леммы 3. Пусть $G_0^{k+1} = \{\mathrm{id}_{k+1}\} \subset G_1^{k+1} \subset \ldots \subset G_{l_{k+1}}^{k+1} = \mathrm{Sym}(k+1)$ — цепь подгрупп группы $\mathrm{Sym}(k+1)$, имеющая максимальную длину. Тогда если $P_{k+1}(n) = \{H_1, \ldots, H_{C_n^{k+1}}\}$, то

пусть $\sim_{E_{i_{k+1}}}^{k+1} = \theta_{m-1}^m$ и $E_{i_{k+1}}^C = G_{l_{k+1}}^{k+1}$ для любого $C \in P_{k+1}(n)$;

пусть $\sim_{E_{i_{k+1}-1}}^{k+1} = \theta_{m-2}^m$ и $E_{i_{k+1}-1}^C = G_{l_{k+1}}^{k+1}$ для любого $C \in P_{k+1}(n)$;

пусть $\sim_{E_{i_{k+1}-2}}^{k+1} = \theta_{m-2}^m$ и $E_{i_{k+1}-2}^C = G_{l_{k+1}-1}^{k+1}$ для $C = H_{C_n^{k+1}}$ и $E_{i_{k+1}-2}^C = G_{l_{k+1}}^{k+1}$ для всех остальных C из $P_{k+1}(n)$;

$\vdots$

пусть $\sim^{k+1}_{E_{i_{k+1}-l_{k+1}-1}} = \theta^m_{m-2}$ и $E^C_{i_{k+1}-l_{k+1}-1} = G^{k+1}_0$ для $C = H_{C^{k+1}_n}$ и $E^C_{i_{k+1}-l_{k+1}-1} = G^{k+1}_{l_{k+1}}$ для всех остальных C из $P_{k+1}(n)$;

пусть $\sim^{k+1}_{E_{i_{k+1}-l_{k+1}-2}} = \theta^m_{m-3}$ и $E^C_{i_{k+1}-l_{k+1}-2} = G^{k+1}_0$ для $C = H_{C^{k+1}_n}$ и $E^C_{i_{k+1}-l_{k+1}-2} = G^{k+1}_{l_{k+1}}$ для любого $C \in P_{k+1}(n)\backslash\{H_{C^{k+1}_n}\}$;

пусть $\sim^{k+1}_{E_{i_{k+1}-l_{k+1}-3}} = \theta^m_{m-3}$ и $E^C_{i_{k+1}-l_{k+1}-3} = G^{k+1}_0$ для $C = H_{C^{k+1}_n}$ и $E^C_{i_{k+1}-l_{k+1}-3} = G^{k+1}_{l_{k+1}-1}$ для $C = H_{C^{k+1}_n-1}$ и $E^C_{i_{k+1}-l_{k+1}-3} = G^{k+1}_{l_{k+1}}$ для любого C из $P_{k+1}(n)\backslash\{H_{C^{k+1}_n}, H_{C^{k+1}_n-1}\}$

и т. д.;

пусть $\sim^{k+1}_{E_{i_k+1}} = \theta^m_0$ и $E^C_{i_k+1} = G^{k+1}_0$ для любого $C \in P_{k+1}(n)$.

В силу отмеченного выше подобная цепь

$$E_{i_k} \subset E_{i_k+1} \subset E_{i_k+2} \subset \ldots \subset E_{i_{k+1}}$$

является цепью максимальной длины в интервале $[\mathrm{Bi}_1(n) \cup \mathrm{Bi}_2(n) \cup \ldots \cup \mathrm{Bi}_k(n) \cup \mathrm{Id}(n); \mathrm{Bi}_1(n) \cup \mathrm{Bi}_2(n) \cup \ldots \cup \mathrm{Bi}_{k+1}(n) \cup \mathrm{Id}(n)]$ упорядоченного множества инверсных подполугрупп полугруппы $\mathrm{Bi}(n)$.

Тем самым длина d_2 интервала упорядоченного множества инверсных подполугрупп полугруппы $\mathrm{Bi}(n)$ равна

$$\sum_{m=2}^{n} \left[C^m_n(l_m+1) - 1\right].$$

В силу утверждения леммы 2 и замечания к доказательству леммы 1 имеет место

Теорема 1. *Длина шкалы потенциалов вычислимости n-элементных универсальных алгебр равна*

$$\sum_{m=2}^{n} C^m_n l_m + 2^{n+1} - 2n - 2.$$

В частности, $d(\langle CT_2; \leq\rangle) = 3$, $d(\langle CT_3; \leq\rangle) = 13$, $d(\langle CT_4; \leq\rangle) = 40$.

Как хорошо известно, для любой алгебры $\mathscr{A}$ имеет место равенство $CT(\mathscr{A}) = T(\mathscr{A}^d)$, где $T(\mathscr{B})$ — совокупность всех термальных функций алгебры $\mathscr{B}$, а $\mathscr{A}^d$ — обогащение алгебры $\mathscr{A}$ добавлением в сигнатуру алгебры $\mathscr{A}$ дискриминаторной функции. Пусть D_n — клон функций на n-элементном множестве, порожденный дискриминаторной функцией, а F_n — клон всех функций на этом множестве. В силу замеченного выше длина интервала $[D_n; F_n]$ в решетке всех клонов на n-элементном множестве совпадает с длиной шкалы $\langle CT_n; \leq\rangle$ и тем самым имеет место

Следствие 1. *Длина интервала $[D_n; F_n]$ в решетке клонов на n-элементном множестве равна* $\sum\limits_{m=2}^{n} C^m_n l_m + 2^{n+1} - 2n - 2$.

Рассматривая подмножества множества n как идемпотенты инверсной полугруппы $\mathrm{Bi}(n)$, столь же очевидным образом получаем

Следствие 2. *Длина максимальной цепи инверсных подполугрупп инверсной полугруппы* $\mathrm{Bi}(n)$ (*полной инверсной полугруппы биекций между подмножествами* n*-элементного множества*) *равна* $\sum\limits_{m=2}^{n} C_n^m l_m + 2^{n+1} - 2n - 2$.

В работе [8] определено понятие элементарно-условного терма (вариация понятия условного терма при другом, более сильном, понятии условия) и описана система инвариантов для эквивалентности вычислительных возможностей двух алгебр $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ при подобной трактовке понятия программно-вычислимых функций (сопряженности совокупностей $ECT(\mathscr{A})$ и $ECT(\mathscr{B})$ элементарно-условно-термальных функций алгебр $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$). Такой системой инвариантов является пара $\langle \mathrm{Sub}\,\mathscr{A}, \mathrm{Aut}\,\mathscr{A} \rangle$, где $\mathrm{Aut}\,\mathscr{A}$ — группа автоморфизмов алгебры $\mathscr{A}$. В работе [1] определено понятие шкалы $\langle ECT_n; \leq \rangle$. Из предыдущих связанных с доказательством теоремы 1 рассуждений очевидным образом вытекает

Следствие 3. *Длина шкалы* $\langle ECT_n; \leq \rangle$ *равна* $l_n + 2^n - 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пинус А. Г., Журков С. В.* О шкалах потенциалов вычислимости универсальных алгебр // Вычислительные системы. 2002. (В печати).
2. *Пинус А. Г.* Об условно рационально-эквивалентных алгебрах. Структурные и сложностные проблемы вычислимости // Вычислительные системы. 1999. Т. 165. С. 1–29.
3. *Пинус А. Г.* Об условных термах и тождествах на универсальных алгебрах. Структурные алгоритмические свойства вычислимости // Вычислительные системы. 1996. Т. 156. С. 59–78.
4. *Pinus A. G.* Conditional terms and their applications // Algebra: Proc. / Kurosh conf. Berlin; New York: Walter de Gruynter Publ., 2000. P. 291–300.
5. *Пинус А. Г.* Программно-вычислимые функции на универсальных алгебрах // Успехи мат. наук. 2001. Т. 56, № 4. С. 35–72.
6. *Пинус А. Г.* Исчисление условных тождеств и условно-рациональная эквивалентность // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 4. С. 381–408.
7. *Cameron P., Solomon R., Turull A.* Chains of subgroups in symmetric groups // J. Algebra. 1989. V. 127, N 2. P. 340–352.
8. *Пинус А. Г.* N-условные термы и n-условно-рациональная эквивалентность // Изв. вузов. Математика. 1999. № 1. С. 36–40.

Статья поступила 15 августа 2001 г.

Пинус Александр Георгиевич, Журков Сергей Владимирович
Новосибирский гос. технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск 630092
algebra@nstu.ru