Сибирский математический журнал
Июль—август, 2002. Том 43, № 4

УДК 517.958:532.501.34

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА ПРОТЕКАНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А. Б. Моргулис, В. И. Юдович

Аннотация: Приведены достаточные условия асипмтотической устойчивости стационарного решения задачи о протекании однородной несжимаемой жидкости сквозь заданную плоскую область. Речь идет о плоской задаче, которая состоит из уравнения Эйлера движения жидкости и граничных условий для ее вихря и нормальной скорости, причем нормальная скорость задается на всей границе области течения, а вихрь — лишь на той ее части, сквозь которую жидкость втекает в область. Асимптотическая устойчивость стационарного течения (по линейному приближению) установлена в предположении, что оно не имеет точек покоя и удовлетворяет некоторому условию малости, означающему, что возмущения сносятся за пределы области течения прежде, чем скажется их воздействие на основной поток. В частности, асимптотически устойчивым оказывается любое стационарное течение в прямоугольном канале, близкое к течению Куэтта без точек покоя. Кроме того, показано, что устойчивость основного течения в L_2-норме для возмущения вихря влечет его устойчивость в старших нормах, зависящих, например, от производных вихря.

Ключевые слова: несжимаемая жидкость, уравнение Эйлера, устойчивость, асимптотическая устойчивость

Введение

Рассмотрим задачу протекания идеальной однородной несжимаемой жидкости сквозь заданную область $D \subset \mathbb{R}^2$. Уравнения Эйлера движения жидкости запишем в виде

$$\partial_t \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v} = -\nabla H, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{0.1}$$

где $\mathbf{v}$ — скорость жидкости, $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v}$, $H = P + v^2/2$ и P — давление.

Предположим, что на границе S области течения D в каждый момент времени $t \geqslant 0$ задана нормальная (нормаль внешняя) скорость жидкости:

$$v_n = \gamma(x,t), \quad x \in S = \partial D; \tag{0.2}$$

здесь $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$, $\mathbf{n}$ — орт внешней нормали к S и γ — заданная на S функция. В силу несжимаемости жидкости необходимо, чтобы функция γ имела нулевое среднее на поверхности S.

Обозначим через S_t^+ и S_t^- соответственно *вход* и *выход* течения, т. е. те части границы, сквозь которые жидкость втекает в область и соответственно

Исследование, описанное в данной публикации, стало возможным благодаря частичной поддержке Американским фондом гражданских исследований и развития (АФГИР) (грант RM1–2084) и Российским фондом фундаментальных исследований (код проекта 99–15–96188).

вытекает из нее в момент времени $t \geqslant 0$. Твердая стенка, т. е. непроницаемая для жидкости часть границы, обозначается через S_t^0. Таким образом, по определению $S_t^+ = \{x \in S : \gamma(x,t) < 0\}$, $S_t^- = \{x \in S : \gamma(x,t) > 0\}$ и $S_t^0 = \{x \in S : \gamma(x,t) = 0\}$.

Задача протекания идеальной жидкости сквозь заданную область возникает, когда нормальная скорость жидкости не равна нулю тождественно. Для ее корректной постановки (в отличие от задачи о течении в замкнутом сосуде) требуется дополнительное граничное условие, которое в каждый момент времени t ставится на входе S_t^+ потока в область. Напомним, что первой работой по общей проблеме протекания была статья Н. Е. Кочина [1]. В ней было предложено дополнительное граничное условие вида

$$\boldsymbol{\omega}(x,t) = \boldsymbol{\omega}^+(x,t), \quad x \in S_t^+,\ t \geqslant 0, \tag{0.3}$$

где $\boldsymbol{\omega}^+$ — известная функция. В статьях [2, 3] было установлено, что *двумерная* задача протекания (0.1)–(0.3)–(0.2) глобально разрешима. Далее будем рассматривать только эту двумерную задачу, называя ее *задачей* Y.

В общем случае задача (0.1)–(0.3)–(0.2) переопределена, см. [4]. Вместе с тем известны другие граничные условия, приводящие к корректным, но лишь локально по времени задачам для двумерных и трехмерных уравнений Эйлера (см. [4–6]). Имеются и теоремы существования стационарных решений [7–9].

Протекание жидкости сквозь границу области течения включает сложный механизм диссипации — накачки: проникая в область течения, жидкие частицы приносят, а покидая ее уносят энергию, энстрофию, кинетический момент и другие материальные величины. Например, сильный эффект накачки возникает, когда вход потока содержит замкнутую кривую c. В таком случае из уравнения движения (0.1) и граничных условий (0.3)–(0.2) следует равенство

$$\frac{d}{dt}\oint\limits_c \mathbf{v}\cdot\mathbf{dx} = -\int\limits_c \omega^+\gamma\,ds. \tag{0.4}$$

Если функции ω^+, γ постоянны (или периодически зависят от времени и интеграл в правой части равенства (0.4) имеет ненулевое среднее за период), то циркуляция скорости вокруг контура c линейно растет со временем. Контур c неподвижен, но в каждый момент времени $t > 0$ от него отрывается и уходит внутрь области течения жидкий контур. По теореме Томсона он сохраняет циркуляцию, сколь угодно большую при достаточно больших t. Таким образом, имеет место *генерация ускоряющегося вращения вдувом.* При этом стационарных (или периодических) режимов не существует и все решения нестационарной задачи неограниченны.

Вместе с тем энстрофия течения (т. е. квадрат $L_2(D)$-нормы вихря) убывает, когда вихрь тождественно равен нулю на входе. В этом случае диссипация сосредоточена на выходе и может показаться слабой, но в действительности ее результатом может быть асимптотическая (экспоненциальная или даже нильпотентная) устойчивость стационарного режима. О ней и пойдет речь в этой заметке.

1. Определения и постановка задачи

Пусть задача Y в области D имеет стационарное решение с полем скорости $\mathbf{v}$ и вихрем ω. Примем следующие предположения:

(H1) область течения ограниченная, односвязная, кусочно-гладкая и удовлетворяет равномерному условию внешней сферы, при этом граничные дуги области течения пересекаются под углами из интервала $(0, \pi)$;

(H2) нормальная скорость γ задана так, что вход течения S^+ и выход S^- суть связные гладкие дуги без общих концевых точек, причем множество угловых точек области D совпадает с множеством $\partial S^+ \cup \partial S^-$ точек стыка входа, выхода и твердой стенки;

(H3) стационарное решение столь регулярно, что $\mathbf{v} \in C(\overline{D})$ и $\omega \in C^1(\overline{D})$;

(H4) выполнено *условие полного протекания*, т. е. $\inf\{|\mathbf{v}(x)|, x \in D\} > 0$, так что течение не имеет точек покоя ни внутри области течения, ни на твердой стенке.

Течение (или его поле скорости $\mathbf{v}$), удовлетворяющее условию H4, назовем *сквозным*.

Условие односвязности существенно, как видно из приведенного выше примера. Условие полного протекания H4 (т. е. отсутствие застойных зон в течении) принципиально для всех результатов, о которых пойдет речь. Более того, оно в определенной степени оправдывает предположения о гладкости стационарного решения $\mathbf{v}$ (см. [7, 8]). Дело в том, что вихрь течения, имеющего точки покоя, может терпеть разрывы вдоль сепаратрисных линий тока. Существенно, что условие полного протекания оказывается устойчивым по отношению к малым гладким деформациям граничных данных стационарной задачи Y (см. § 4). Вместе с тем известно много явных гладких решений (как сквозных, так и не сквозных) стационарной задачи Y. Среди них простейшие — сдвиговые течения с прямолинейными или круговыми линиями тока, параллельными твердым стенкам канала.

Пусть, например, (x, y) — декартовы координаты, функции V, f_0, f_1 зависят только от координаты y и принадлежат классу $C^\infty[0,1]$, причем $f_0(y) < f_1(y)$, когда $y \in [0,1]$. Тогда *сдвиговое* течение с профилем V и полем скорости $\mathbf{v} = (V, 0)$ есть решение некоторой стационарной задачи Y в канале $D = \{f_0(y) < x < f_1(y),\ y \in (0,1)\}$.

Далее мы изучим устойчивость основного режима, удовлетворяющего условиям H1–H4, по линейному приближению.

Задачей LY будем называть начально-краевую задачу, возникающую при линеаризации задачи Y вблизи стационарного решения. В односвязной области D задача LY имеет вид

$$\partial_t \sigma + L_v \sigma + K\sigma = 0; \quad \sigma|_{S^+} = 0; \quad \sigma|_{t=0} = \xi. \tag{1.1}$$

Здесь введены обозначения: σ — возмущение вихря, $L_v = (\mathbf{v}, \nabla)$ — оператор дифференцирования вдоль поля $\mathbf{v}$, $S^+ = S_t^+$ — вход основного течения, $K\sigma = \nabla\omega \wedge \nabla G\sigma$ и G — оператор Грина задачи $-\Delta\varphi = \sigma$; $\varphi|_S = 0$.

Эволюционный оператор $U(t)$ $(t \geqslant 0)$ задачи LY (при надлежащем расширении) определен и ограничен в пространстве $L_2(D)$, при этом множество $\mathscr{U} = \{U(t)\}_{t>0}$ — сильно непрерывная полугруппа (см. § 5).

2. Теоремы об асимптотической устойчивости

Рассмотрим равномерный поток $\mathbf{v} \equiv \mathrm{const}$ в прямолинейном канале длины l. Такое течение нильпотентно устойчиво: любое его возмущение обращается в нуль за время, не превосходящее величины

$$t_* = l/|\mathbf{v}|. \tag{2.1}$$

Это легко проверить посредством явного решения задачи LY.

Если $\mathbf{v} \not\equiv \mathrm{const}$, но $\operatorname{rot}\mathbf{v} = \omega \equiv \mathrm{const}$, то из уравнения возмущений (1.1) исключается слагаемое $K\sigma$ и задача LY сводится к задаче о переносе пассивного скаляра σ известным полем скорости $\mathbf{v}$:

$$\partial_t\sigma + L_v\sigma = 0, \quad \sigma|_{S^+} = 0; \quad \sigma|_{t=0} = \xi. \tag{2.2}$$

Для произвольного гладкого поля $\mathbf{v}$ транспортная задача (2.2) интегрируется в лагранжевых координатах, которые суть *время $\tau(x,t)$ и место $a(x,t)$ появления в области D жидкой частицы, находящейся в момент времени $t > 0$ в точке $x \in D$.* Подробнее о них см. в § 3. Сейчас заметим лишь, что в случае сквозного поля $\mathbf{v}$ конечна величина

$$t_* = \sup\{t - \tau(x,t) : x \in D,\ t > 0\}, \tag{2.3}$$

а потому любое решение задачи (2.2) будет тождественно нулевым для всех $t > t_*$. В частности, *каждое сквозное течение с постоянным вихрем нильпотентно устойчиво, причем любое его возмущение обращается в нуль за время, не превосходящее величины* (2.3). Далее верхняя грань (2.3) называется *временем полного протекания.* Для равномерного потока время полного протекания дает формула (2.1).

В общем случае будем рассматривать задачу LY как возмущенную транспортную задачу (2.2), разумеется, не предполагая вихрь несущего поля $\mathbf{v}$ постоянным. Простейшее общее условие асимптотической устойчивости связано с безразмерной величиной

$$q_v = \|\nabla\omega\|_{\infty;D}\, t_* \lambda_1^{-1/2}(D), \tag{2.4}$$

где t_* — время полного протекания, ω — вихрь основного течения и $\lambda_1(D)$ — минимальное собственное значение первой краевой задачи для оператора $(-\Delta)$ в области D. Течение (или его поле скорости $\mathbf{v}$), удовлетворяющее условию $q_v < 1$, назовем *быстрым.*

Пусть $\|f\|$ — стандартная норма функции f в пространстве $L_2(D)$.

Теорема 1. *Быстрое течение экспоненциально асимптотически устойчиво по линейному приближению в метрике энстрофии* (*т. е. в метрике пространства $L_2(D)$ для возмущений вихря*)*. При этом оценку затухания возмущения вихря $\sigma(t) = U(t)\xi$ дает неравенство*

$$\|\sigma(t)\| \leqslant \max(1, e^{\mu t_*})[r(-\mu)]^n (1 - r(\mu))^{-1}\|\xi\|, \quad t > nt_*, \tag{2.5}$$

где $n = 0, 1, \dots$, функция r определена на всей вещественной оси $\mathbb{R}$ равенством

$$r = r(\mu) = q_v (t_*\mu)^{-1}(e^{\mu t_*} - 1), \tag{2.6}$$

а число μ — любое решение неравенства

$$\max(r(\mu), r(-\mu)) < 1. \tag{2.7}$$

Замечание 1. Если $\omega \equiv \mathrm{const}$, то можно применить теорему 1, полагая при этом $q_v = 0$ и $r(\mu) \equiv 0$ (см. (2.4) и (2.6)). В таком случае из неравенства (2.5) следует, что любое возмущение обращается в нуль, когда $t > t_*$.

Замечание 2. Любое сдвиговое течение превращается в быстрое после прибавления к его профилю V достаточно большой константы V_0. Существенно, что быстрое течение остается таковым при малой гладкой деформации (вызванной, например, возмущением граничных данных задачи Y, см. § 4) и во всяком случае, когда C^1 — малые возмущения вихря. В частности, быстрым оказывается любое стационарное течение, близкое к сквозному течению Куэтта с линейным профилем V.

Важным следствием условия полного протекания является еще и то, что на временах, больших времени полного протекания t_*, гладкость возмущения $\sigma(t) = U(t)\xi$ постепенно улучшается, притом независимо от гладкости его начального значения ξ. Для меньших значений времени t возмущение $\sigma(t)$ не будет, вообще говоря, гладким, даже если функция ξ была выбрана гладкой. Точнее, имеет место

Теорема 2. *Пусть m — натуральное число, ξ — функция класса $L_2(D)$ и D' — фиксированная подобласть области D, ограниченная парой различных линий тока поля $\mathbf{v}$ и дугами S^+ и S^-. В условиях* H1–H4 *справедливы следующие утверждения.*

(1) *Эволюционный оператор $U(t)$ задачи* LY *вполне непрерывен $L_2(D) \to L_2(D)$ для всех $t > t_*$.*

(2) *Полугруппа $\mathscr{U} = \{U(t)\}$ задачи* LY *на луче $t > mt_*$ непрерывно дифференцируема m раз в равномерной операторной топологии. При этом образ оператора $U(t)$ содержится в области определения m-й степени генератора полугруппы $\mathscr{U}$.*

(3) *Предположим дополнительно, что $\mathbf{v} \in C^\infty(D)$ и $D' \neq D$. Тогда для всех моментов времени $t > mt_*$ производные $\big(\partial^m_{t,x}\sigma\big)(t)$ порядка m возмущения $\sigma(t) = U(t)\xi$ принадлежат пространству $L_2(D')$, причем выполняются неравенства*

$$\big\|\big(\partial^m_{t,x}\sigma\big)(t)\big\|_{2,D'} \leqslant c\sup\{\|\sigma(s)\|_{2,D} : s \in (t - mt_*, t)\}, \quad t > mt_*, \tag{2.8}$$

где константа c зависит, вообще говоря, от числа m, поля $\mathbf{v}$ и подобласти D', но не зависит ни от начального возмущения ξ, ни от времени t.

(4) *Для всех моментов времени $t > t_*$ производные возмущения $(\partial_t\sigma)(t)$ и $(L_v\sigma)(t)$ принадлежат пространству $L_2(D)$ и удовлетворяют неравенству* (2.8), *где $m = 1$, $D' = D$ и $c = c_0\|\nabla\omega\|_\infty(1 + t_*(\|\nabla\omega\|_\infty + \|\mathbf{v}\|_\infty))$, причем константа c_0 зависит только от D.*

Замечание. В неравенстве (2.8) можно положить $D' = D$, когда $\mathbf{v} \in C^\infty(\overline{D})$. Это предположение может выполняться, например, для сдвиговых течений. В общем случае, однако, даже сквозное решение стационарной задачи Y не обязано быть гладким вплоть до границы области течения из-за наличия угловых точек.

Комбинация теоремы 1 об устойчивости в метрике энстрофии и теоремы 2 приводит к выводу о затухании старших норм возмущений. Сформулируем сперва результат, относящийся к производным возмущения вдоль основного потока.

Теорема 3. *В условиях теоремы* 1 *выполняются неравенства*

$$\|\partial_t\sigma(t)\|, \|L_v\sigma\| \leqslant c\|\xi\|\max(1, e^{\mu t_*})[r(-\mu)]^{n-1}(1 - r(\mu))^{-1}, \quad t > nt_*,$$

где $n = 1, 2, \ldots$, величина c зависит лишь от основного течения, а вещественные числа μ и $r(\mu)$ определены, как в теореме 1.

Эта своеобразная устойчивость относительно старших норм заслуживает особого определения. Именно, пусть банахово пространство $\mathbb{X}$ содержит линейное множество $\mathbb{X}_0$, на котором определено семейство полунорм $\mathscr{P}$. Пусть $\mathbb{X}_p$ — замыкание $\mathbb{X}_0$ по норме $\|u\|_p = \|u\|_{\mathbb{X}} + p(u)$, $p \in \mathscr{P}$.

Пусть $u(t)$ — решение дифференциального уравнения $\dot{u} = F(u,t)$ в пространстве $\mathbb{X}$, определенное для всех $t > 0$. Введем уравнение возмущений

$$\dot{v} = F(v + u(t), t) - F(u(t), t) \tag{2.9}$$

и обозначим через $\mathscr{N}^t$, $t > 0$, его эволюционный оператор. В [10] было предложено определение устойчивости по Ляпунову в терминах непрерывности эволюционного оператора. Именно, пусть $\mathbb{Y}$ — банахово пространство. Будем говорить, что решение u дифференциального уравнения $\dot{u} = F(u,t)$ в пространстве $\mathbb{X}$ *устойчиво по Ляпунову* $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, если (и только если) эволюционный оператор $\mathscr{N}^t$ уравнения возмущений (2.9) непрерывен $\mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ в точке $v = 0$ равномерно по $t \in (0, \infty)$.

Пусть на множестве $\mathscr{P}$ определена функция $d : p \mapsto d(p)$, принимающая вещественные положительные значения. Будем говорить, что

- решение $u(t)$ (*асимптотически*) *устойчиво с запаздыванием* d *в шкале* $(\mathbb{X}, \mathscr{P})$, если оно $(\mathbb{X}, \mathbb{X})$-(асимптотически) устойчиво и для любого фиксированного $p \in \mathscr{P}$ оператор $\mathscr{N}^{d(p)}$ $(\mathbb{X} \to \mathbb{X}_p)$-непрерывен в точке $v = 0$;
- решение $u(t)$ *экспоненциально устойчиво с запаздыванием* d *в шкале* $(\mathbb{X}, \mathscr{P})$, если оно экспоненциально устойчиво $(\mathbb{X}, \mathbb{X})$ и для любого фиксированного $p \in \mathscr{P}$ оператор $\mathscr{N}^{d(p)}$ $(\mathbb{X} \to \mathbb{X}_p)$-непрерывен по Гёльдеру в точке $v = 0$.

Пусть теперь $\mathbb{X} = L_2(D)$, $\mathbb{X}_0 = C^\infty(\overline{D})$ и множество $\mathscr{P}$ состоит из норм пространств $W^{2,m}(D')$, где m — натуральное число и D' — фиксированная подобласть области D.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* H1–H3. *Пусть, кроме того, фиксированная подобласть D' области D ограничена парой внутренних линий тока и дугами входа S^+ и выхода S^-. Тогда быстрое течение класса $C^\infty(D)$ экспоненциально устойчиво в шкале $(L_2(D), W^{2,m}(D'))$ с запаздыванием $d = mt_*$.*

Сравнив теоремы 2–4 с известными примерами постепенного ухудшения гладкости возмущений (см. [11–14]), можно предположить, что гладкость течения улучшается в той его части, где происходит быстрый снос возмущений, и портится там, где возмущения сносятся медленно.

Доказательства теорем 1–4 приведены в § 3–7.

3. Полугруппа сдвигов и транспортная задача

Пусть $\mathbf{v}$ — поле скорости сквозного стационарного течения в области D, ψ — функция тока поля $\mathbf{v}$ и $X(s,x,t) \in D$ — положение, которое в момент времени $0 < s < t$ занимала жидкая частица, находящаяся в момент времени $t > 0$ в точке $x \in D$. Чтобы определить точку $X(s,x,t)$, введем в рассмотрение задачу Коши

$$\partial_s X = \mathbf{v} \circ X; \quad X|_{s=t} = x. \tag{3.1}$$

Из условий регулярности H3 следует, что решение $X(s,x,t)$ задачи (3.1) единственно, непрерывно зависит от данных (x,t) и продолжаемо вдоль луча $s < t$ вплоть до пересечения с поверхностью $\Gamma = D \times \{t = 0\} \cup \{S^+ \times \mathbb{R}^+\}$. Далее будем считать, что решения $X(s,x,t)$ для всех $x \in D$ и $t > 0$ максимально продолжены. Время $\tau(x,t)$ и место $a(x,t)$ появления жидкой частицы в области течения определим равенствами

$$\tau(x,t) = \inf\{s > 0 : X(s,x,t) \in D\}; \tag{3.2}$$

$$a(x,t) = \lim X(s,x,t), \quad s \to \tau(x,t); \tag{3.3}$$

$$a(x,t) = x, \quad \tau(x,t) = t, \quad (x,t) \in \Gamma. \tag{3.4}$$

Функции a и τ будем также называть *местом и временем рождения частицы* соответственно. Для примера снова рассмотрим сдвиговое течение. Пусть его вход имеет вид $S^+ = \{(x,y) : x = 0,\ y \in (0,1)\}$. В этом случае время и место рождения частиц выражаются через профиль течения V равенствами $\tau(x,y,t) = [t - x/V(y)]^+$ и $a(x,y,t) = ([x - tV(y)]^+, y)$, где $[f]^+ = (f + |f|)/2$ — положительная часть функции f.

Возраст жидкой частицы δ определим, полагая $\delta(x,t) = t - \tau(x,t)$. Максимальный возраст частицы, прошедшей через точку $x \in D$, обозначим через $t_+(x)$, так что $t_+(x) = \sup\{\delta(x,t) : t > 0\}$. Функцию $t_+ : D \to \mathbb{R}^+ \cup +\infty$ и ее верхнюю грань $t_* = \sup\{\delta(x,t) : x \in D, t > 0\}$ назовем *временем протекания и временем полного протекания* соответственно.

Предложение 3.1. *Возраст частиц сквозного течения равномерно ограничен. При этом имеют место равенства*

$$\delta(x,t) = \min(t, t_+(x)), \tag{3.5}$$

$$\tau(x,t) = [t - t_+(x)]^+, \quad x \in D. \tag{3.6}$$

Доказательство. В сквозном течении, удовлетворяющем условия регулярности Н3, длина линий тока равномерно ограничена, а потому равномерно ограничен и возраст частиц. Следовательно, время протекания t_+ равномерно ограничено в области D.

Зафиксируем $x \in D$ и рассмотрим множество $\mathscr{T}^+ = \{t > 0 : \tau(x,t) > 0\}$. Оно открыто и непусто. Так как поле $\mathbf{v}$ не зависит от времени t, в любой точке $x \in D$ выполняется равенство $X(s,x,t) = X(0,x,t-s)$, $t > s > \tau(x,t)$. Когда $s \to \tau(x,t)$, имеем

$$X(\tau(x,t),x,t) = X(0,x,\delta(x,t)) \in S^+, \tag{3.7}$$

где S^+ — вход течения. Из равенства (3.7) следует, что во все моменты времени $t \in \mathscr{T}^+$ в точку x приходят частицы одного и того же возраста $\delta(x,t)$, а для таких частиц время рождения $\tau(x,t)$ строго возрастает. Поэтому $\mathscr{T}^+ = (t_+(x), \infty)$, откуда следуют равенства (3.5)–(3.6). Предложение доказано.

Для фиксированного $t \geqslant 0$ рассмотрим *сдвиг* $a_t : x \mapsto a(x,t)$. Заметим, что, по условию полного протекания определена проекция a_+ множества $D \cup S^+$ на вход S^+ вдоль линий тока поля $\mathbf{v}$.

Предложение 3.2. *Семейство сдвигов* $\aleph_v = \{a_t, t \geqslant 0\}$ *— нильпотентная однопараметрическая полугруппа отображений множества* $D \cup S^+$ *в себя, причем ее показатель нильпотентности равен времени полного протекания* t_**, а двусторонний нуль является проекцией* a_+.

Напомним, что *двусторонним нулем* полугруппы $\wp$ называется такой ее элемент θ, что $\theta q = q\theta = \theta$ для всех $q \in \wp$. По определению однопараметрическая полугруппа $\wp = \{q^m\}_{m>0}$ *нильпотентна*, если и только если найдется число $n \geqslant 0$ (*показатель нильпотентности*) такое, что $q^m = \theta$ для всех $m > n$.

Доказательство предложения 3.2. В силу представления (3.5) имеем

$$\delta(x,t+s) = \delta(x,s) + \delta(a_s(x),t).$$

Вместе с тем из определения отображения a_t следует, что

$$a_t(a_s(x)) = X(0, a_s, \delta(a_s, t)) = X(0, x, \delta(x, s) + \delta(a_s, t)) = a_{t+s}(x),$$

и при этом для всех $t > t_*$ выполняется равенство $a_t = a_+$. Предложение доказано.

Вернемся к транспортной задаче (2.2). Введем множество $C^\infty_+(D)$, состоящее из гладких функций, обращающихся в нуль в окрестности объединения входа S^+ и твердой стенки S^0, так что $C^\infty_+ = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^2) : \operatorname{supp} f \cap (S^+ \cup S^0) = \varnothing\}$. Рассмотрим транспортную задачу (2.2) с начальной функцией $\xi \in C^\infty_+(D)$. Ее решение σ_0 записывается в виде $\sigma_0(x,t) = \xi(a_t(x))$, так что определено действие полугруппы сдвигов $\aleph_v$ на функции класса $C^\infty_+(D)$:

$$U_0(t) : \xi \mapsto \xi \circ a_t, \quad a_t \in \aleph_v. \tag{3.8}$$

В силу несжимаемости жидкости сдвиг a_t жидкой области E не увеличивает площадь, но может уменьшить ее из-за того, что некоторая часть области проектируется на вход. Точнее, пусть $D^+(t)$ — прообраз входа S^+ при отображении a_t. Отображение a_t *сокращает площадь* в следующем смысле: для любого измеримого множества $E \subset D$ выполняются неравенства

$$\operatorname{mes} a_t(E) = \operatorname{mes}(E \setminus D^+(t)); \quad \operatorname{mes} a_t(E \cap D^+(t)) = 0. \tag{3.9}$$

Следовательно, соответствие (3.8) допускает продолжение до непрерывного сжимающего оператора $U_0(t) : L_2(D) \to L_2(D)$, а полугруппа $\aleph_v$ действует в $L_2(D)$ как сильно непрерывная *полугруппа операторов сдвига* $\mathscr{U}_0 = \{U_0(t)\}_{t\geqslant 0}$. Генератор этой полугруппы $-L_v = -(\mathbf{v}, \nabla)$ определен и замкнут на множестве Dom_v, которое представляет собой замыкание множества $C^\infty_+(D)$ по норме $\|f\| + \|L_v f\|$, где $\|f\|$ — норма f в $L_2(D)$.

Вместе с полугруппой $\aleph_v$ нильпотентна и полугруппа $\mathscr{U}_0$, причем ее показатель нильпотентности равен времени полного протекания t_*, так что для всех $t \geqslant 0$ имеем

$$\|U_0(t)\| \leqslant \theta(t_* - t), \quad U_0(t) \in \mathscr{U}_0. \tag{3.10}$$

Здесь θ — функция Хевисайда: $\theta(s) = 0$, $s < 0$, $\theta(s) = 1$, $s \geqslant 0$. В частности, *сквозное течение с постоянным вихрем нильпотенто устойчиво: любое его возмущение обращается в нуль за время, не превосходящее времени полного протекания* t_*.

4. «Грубость» условий полного протекания и быстроты течения

Начнем с примера. Пусть область течения D — прямоугольный канал, так что в подходящих декартовых координатах $D = \{(x,y) : x \in (0,l),\ y \in (0,1)\}$, а граничные данные ω^+, γ стационарной задачи Y имеют вид

$$\gamma(l,y) = -\gamma(0,y) = \beta + \pi_0 y > 0; \quad \gamma(x,0) = \gamma(x,1) = 0; \tag{4.1}$$

$$\omega^+ = -\pi_0 + \varepsilon f(y), \tag{4.2}$$

где $f, g \in C^1[0,1]$, а π_0, ε, β — положительные постоянные. Согласно [7] данные (4.1), (4.2) порождают слабое стационарное решение $\mathbf{v}$ такое, что его вихрь ω удовлетворяет неравенствам

$$\varepsilon \sup f \geqslant \omega(x,y) + \pi_0 \geqslant \varepsilon \inf f \tag{4.3}$$

почти всюду в D и это течение оказывается сквозным, когда ε/β достаточно мало.

Последнее утверждение нетрудно проверить непосредственно. В самом деле, проекция v_x скорости $\mathbf{v}$ на ось x имеет вид $v_x = \beta + \pi_0 y + (\partial_y G(\pi_0 + \omega))(x, y)$. В силу ограниченности оператора $\nabla G : L_\infty(D) \to C(\overline{D})$ из последнего равенства и неравенств (4.3) следует оценка

$$t_* \leqslant l\beta^{-1}(1 - O(\varepsilon/\beta))^{-1}, \quad \varepsilon/\beta \to 0. \tag{4.4}$$

При условии полного протекания стационарная задача Y сводится к задаче Дирихле для эллиптического уравнения. Действительно, для любого сквозного стационарного течения $\mathbf{v}$ проекция $a^+ : D \to S^+$ вдоль линий тока сохраняет величины, постоянные на линиях тока. Поэтому вихрь ω и функция тока ψ поля $\mathbf{v}$ выражаются через свои входные значения ω^+ и ψ^+ формулами $\omega(x) = \omega^+(a^+(x))$, $\psi(x) = \psi^+(a^+(x))$, $x \in D$. С другой стороны, по определению на входе S^+ имеем $\gamma < 0$ и $d\psi^+ = \gamma ds$ (s — длина дуги входа), а потому $a^+(x)$ однозначно выражается через $\psi(x)$ для любого $x \in D$. Следовательно, зависимость вихря от функции тока в сквозном стационарном течении однозначна и определена данными задачи Y, так что

$$\omega(x) = \Omega^+(\psi(x)), \quad \Omega^+ = \omega^+ \circ (\psi^+)^{-1}, \quad x \in D. \tag{4.5}$$

Заметим, что функция Ω^+ определена данными ω^+, γ стационарной задачи Y лишь на интервале I^+ значений функции ψ^+. Продолжив функцию Ω^+, определенную в (4.5), до функции Ω, заданной на оси $\mathbb{R}$, найдем, что независимо от выбора продолжения функция тока ψ сквозного стационарного течения — решение краевой задачи

$$-\Delta\psi = \Omega(\psi), \quad \psi|_S = \psi^+. \tag{4.6}$$

Обратное верно лишь отчасти: любому решению ψ задачи (4.6) соответствует решение $\mathbf{v} = \nabla^\perp\psi$ стационарной задачи Y, которое, вообще говоря, не удовлетворяет условию полного протекания и зависит от выбора продолжения Ω функции Ω^+. При этом равенство $\omega = \Omega^+(\psi)$ имеет место лишь на прообразе интервала $I^+ = \psi^+(S)$ при отображении $\psi : D \to \mathbb{R}$.

Вернемся к рассматриваемому примеру (4.1)–(4.2). Зависимость y от ψ на входе $S^+ = \{(x, y),\ x = 0,\ y \in (0, 1)\}$ определим из уравнения $\pi_0 y^2/2 + \beta y - \psi = 0$, $\psi > 0$. Продифференцировав функцию (4.5) и применив неравенство (4.4), получим оценку величины (2.4):

$$q_v \leqslant lO(\varepsilon/\beta)(1 - O(\varepsilon/\beta))^{-1}, \quad \varepsilon/\beta \to 0,$$

причем эта оценка равномерна относительно величины π_0. Следовательно, независимо от выбора этого параметра данные (4.1)–(4.2) порождают быстрое течение, когда ε/β достаточно мало.

Последнее утверждение обобщается на случай стационарной задачи Y в криволинейном канале. Например, в [8] было установлено, что условие полного протекания сохраняется при малых возмущениях данных задачи Y, если невозмущенное течение потенциально. Это утверждение остается истинным и в случае вихревого сквозного течения по крайней мере при естественном условии невырожденности, которое мы сейчас сформулируем.

Линеаризовав задачу (4.6) на сквозном решении $\mathbf{v} = \nabla^\perp\psi$, будем иметь

$$-\Delta\varphi = \nu\varphi, \quad \varphi|_S = 0. \tag{4.7}$$

Здесь функция ν — производная вихря ω по функции тока ψ, так что

$$\nu(x) = (\nabla\omega/\nabla\psi)(x) = (d\Omega^+/d\psi^+)(\psi(x)), \quad x \in D, \tag{4.8}$$

где функция Ω^+ определена в (4.5). Функция ν определена формулой (4.8) всюду в D вследствие условия полного протекания. Сквозное течение с функцией тока ψ назовем *невырожденным*, если линеаризованная задача (4.7)–(4.8) не имеет нетривиальных решений $\varphi \not\equiv 0$.

Предложение 4.1. *Пусть стационарная задача* Y *с данными* ω^+, γ *удовлетворяет условиям* H1–H3 *и при этом имеет невырожденное сквозное решение* $\mathbf{v}$. *Дополнительно предположим, что* $\gamma \in C^\alpha(\overline{S^+}) \cap C^\alpha(\overline{S^-})$, *где* $\alpha > 0$. *Пусть возмущения данных задачи* Y *удовлетворяют условиям:* (1) *возмущения нормальной скорости не изменяют ни входа, ни выхода;* (2) *возмущения входного вихря* ω^+ *малы в* $C^1(\overline{S^+})$, *и возмущения нормальной скорости* γ *малы в* $C^\alpha(\overline{S^+}) \cap C^\alpha(\overline{S^-})$. *Тогда возмущенная задача* Y *имеет единственное решение* $\mathbf{v}_1$, *близкое к* $\mathbf{v}$ *по норме пространства* $C(\overline{D})$. *При этом поле* $\mathbf{v}_1$ *удовлетворяет условию полного протекания, а возмущение вихря* $\omega_1 - \omega$ *мало в* $C^1(\overline{D})$.

Замечание. Если все углы области D острые или прямые, то при дополнительных предположениях о регулярности данных, можно установить, что возмущение $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}$ мало в C^1-метрике. Если углы острые, то достаточно положить $\alpha > 1$, при наличии прямых углов требуются дополнительные условия согласования.

Доказательство. Предложение устанавливается двукратным применением теоремы о неявной функции. Зависимость вихря ω невозмущенного течения от его функции тока ψ имеет вид $\omega = \Omega^+(\psi)$, где функция Ω^+ определена невозмущенными данными ω^+, γ стационарной задачи Y по формуле (4.5) на интервале I^+ граничных значений функции ψ. По возмущенным данным ω_1^+, γ_1 определим функцию $\Omega_1^+ = \omega_1^+ \circ (\psi_1^+)^{-1}$, где $d\psi_1^+ = \gamma_1(s)ds$, $s \in S$. Функцию ψ_1^+ выберем так, чтобы ее минимальное значение совпадало с минимальным значением функции ψ. Применив теорему о неявной функции, покажем, что функция Ω_1^+ определена на интервале $I_1^+ = \psi_1^+(S)$, близком к I^+, и близка к функции ω по норме пространства $C^1(\bar{I}_2^+)$, где $I_2^+ = I^+ \cap I_1^+$.

Далее, продолжим функции Ω^+ и Ω_1^+ до функций ω и Ω_1 класса $C^1(\mathbb{R})$, близких по норме пространства $W^{1,\infty}(\mathbb{R})$. Рассмотрим в области D краевую задачу $-\Delta\psi_1 = \Omega_1(\psi_1)$, $\psi_1|_S = \psi_1^+$. К ней ввиду предполагаемой невырожденности невозмущенного решения ψ снова применима теорема о неявной функции, которая влечет существование решения ψ_1, близкого к ψ по норме $C^1(\overline{D})$. Но невозмущенное течение $\mathbf{v}$ сквозное, а потому поле $\mathbf{v}_1 = \nabla^\perp\psi_1$ — сквозное решение возмущенной стационарной задачи Y, притом не зависящее от выбора продолжения Ω_1 функции Ω_1^+.

5. Полугруппа задачи LY

Вернемся к задаче LY (см. (1.1)). Она отличается от транспортной задачи (2.2) возмущающим членом $K\sigma$. Оператор $K : \sigma \mapsto \nabla\omega \wedge \nabla G\sigma$, очевидно, вполне непрерывен $L_2(D) \to L_2(D)$. Поэтому соответствие

$$\sigma \mapsto E_v\sigma = (L_v + K)\sigma \tag{5.1}$$

определяет на множестве Dom_v оператор $E_v : L_2(D) \to L_2(D)$, который, как и L_v, замкнут. Таким образом, задачу LY можно трактовать как задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения в пространстве $L_2(D)$:

$$\partial_t\sigma = -E_v\sigma; \quad \sigma|_{t=0} = \xi \in \mathrm{Dom}_v\,. \tag{5.2}$$

Оператор $-L_v$ порождает сильно непрерывную полугруппу $\mathscr{U}_0$. Поэтому и оператор $-E_v$ порождает сильно непрерывную полугруппу $\mathscr{U}$ ограниченных операторов $U(t) = \exp(-tE_v)$ согласно теоремам о возмущении полугрупп операторов (см. [15, гл. XIII]).

Представим полугруппу задачи LY в виде ряда теории возмущений, так что $U(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} U_k(t)$ для всех $t \geqslant 0$, где оператор-функция U_0 параметризует полугруппу сдвигов $\mathscr{U}_0$, а оператор-функции U_k $(k = 1,\dots,\infty)$ определены рекуррентными соотношениями

$$U_k(t) = -\int\limits_0^t U_0(t-s)KU_{k-1}(s)\,ds. \tag{5.3}$$

Напомним, что время полного протекания t_* — показатель нильпотентности полугруппы сдвигов $\mathscr{U}_0$, а потому возмущения $U_k(t)$ отличны от нуля, лишь когда $t < (k+1)t_*$. Это примечательное следствие нильпотентности полугруппы сдвигов вдоль сквозного течения лежит в основе теорем о затухании и сглаживании возмущений. Начнем с доказательства утверждения (1) теоремы 2 о компактности эволюционного оператора $U(t)$ задачи LY.

Заметим, что оператор-функция $U(t)$ — решение сверточного уравнения

$$U(t) = U_0(t) - (U_0K * U)(t). \tag{5.4}$$

Но оператор-функция U_0 исчезает на временах, больших времени полного протекания t_*, и для таких t равенство (5.4) имеет вид $U(t) = ((U_0K) * U)(t)$, $t > t_*$. Напомним, что оператор K вполне непрерывен. Поэтому для любого фиксированного $t > 0$ оператор-функция $Q(s) = U_0(t-s)K$ непрерывна по норме на сегменте $[0,t]$ и принимает вполне непрерывные значения. Вместе с тем из сильной непрерывности полугруппы $\mathscr{U}$ при $t \geqslant 0$ и рефлексивности пространства $L_2(D)$ следует, что сопряженная оператор-функция $U^*(t)$ стремится к Id слабо, когда $t \to +0$. Но это предельное равенство влечет сильную непрерывность полугруппы $U^*(t)$ при $t \geqslant 0$ (см., например, [15, гл. X]). Следовательно, для любого фиксированного $t > 0$ оператор-функция U^*Q^* непрерывна по норме на сегменте $[0,t]$ и принимает вполне непрерывные значения, и тем же свойством обладает функция QU. Поэтому свертка $((U_0K) * U)(t)$ вполне непрерывна как равномерный предел вполне непрерывных интегральных сумм. Следовательно, оператор $U(t)$ вполне непрерывен при $t > t_*$, что и требовалось. Доказательство теоремы 2 будет завершено в § 7.

6. Устойчивость быстрых течений в метрике энстрофии

Приступим к доказательству теоремы 1. Напомним, что стационарное течение $\mathbf{v}$ с вихрем ω называется *быстрым*, если (и только если) оно удовлетворяет условию

$$q_v = \|\nabla\omega\|_{\infty;D}\, t_*\lambda_1^{-1/2}(D) < 1, \tag{6.1}$$

где $\lambda_1(D)$ — минимальное собственное значение первой краевой задачи для оператора $(-\Delta)$ в области D.

Пусть $s_k(t) = \|U_k(t)\|$, где оператор-функции U_k $(k = 1, \dots, \infty)$ определены в (5.3). Из оценки (3.10) для полугруппы сдвигов и равенств (5.3) следует, что для всех $k = 1, \dots, \infty$ выполняются неравенства

$$s_k(t) \leqslant \|K\| \int\limits_{t-t_*}^{t} s_{k-1}(h)\, dh, \quad t > t_*,$$

где $s_0(t) = \theta(t_* - t)$ и θ — функция Хевисайда. Умножив последнее неравенство на $\exp(-\mu t)$, $\mu \in \mathbb{R}$, для всех $t > t_*$ будем иметь

$$s_k(t) e^{\mu t} \leqslant \|K\| \int\limits_{t-t_*}^{t} e^{\mu(t-h)} s_{k-1}(h) e^{\mu h}\, dh \leqslant r \sup\{e^{\mu h} s_{k-1}(h),\ t > h > t - t_*\},$$

где $r = r(\mu) = q_v (t_* \mu)^{-1} (e^{\mu t_*} - 1)$. Рекурсивно применяя это неравенство, придем к оценке

$$e^{\mu t} s_k(t) \leqslant r^k \sup\{s_0(h) e^{\mu h},\ t > h > 0\} \leqslant r^k e^{\mu t_*}, \quad t > t_*.$$

Точно такое же неравенство выполняется для $t \in (0, t_*)$.

Предположим, что μ выбрано так, что $\max(r(-\mu), r(\mu)) < 1$, и $s_n'(t) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} s_k(t)$. В силу финитности оператор-функций U_k операторы $U(t)$ для всех $t > nt_*$ допускают оценку

$$\|U(t)\| \leqslant s_n'(t) \leqslant r^n (1 - r)^{-1} e^{\mu(t_* - t)}, \quad t > nt_*.$$

Но $re^{-\mu t_*} = r(-\mu)$, откуда следует неравенство

$$\|\sigma(t)\| \leqslant \max(1, e^{\mu t_*}) [r(-\mu)]^n (1 - r(\mu))^{-1} \|\xi\|, \quad t > nt_*.$$

В этом неравенстве правая часть стремится к нулю при $t \to \infty$ в том и только в том случае, когда неравенство $\max(r(-\mu), r(\mu)) < 1$ имеет решения. Такие решения существуют, если и только если $q_v = r(0) < 1$, а этому условию по определению удовлетворяет быстрое течение. Теорема 1 доказана.

7. Сглаживание возмущений и затухание старших норм

Продолжим доказательство теоремы 2. Нам потребуется дополнительная информация о лагранжевых координатах a, τ.

Напомним, что путь жидкой частицы, находящейся в точке x в момент времени t параметризуется решением $X(s, x, t)$ задачи Коши (3.1) (см. § 3). Время $\tau(x, t)$ и место $a(x, t)$ рождения частиц выражаются через отображение X по правилам (3.2)–(3.3). Поскольку в сквозном течении время полного протекания t_* конечно, для всех $t > t_*$ время τ рождения частиц положительно всюду в D и выражается равенством (3.6) (см. предложение 3.1), так что $\tau = t - t_+$, где $t_+ = t_+(x)$ — время протекания. Но время рождения жидкой частицы, очевидно, постоянно вдоль ее пути, а потому функция τ удовлетворяет уравнению $(\partial_t + L_v)\tau = 0$. Полагая в нем $\tau = t - t_+$, найдем, что функция t_+ — решение задачи Коши

$$L_v t_+ = 1, \quad t_+|_{S^+} = 0. \tag{7.1}$$

Вместе с тем по предложению 3.2 для всех $t > t_*$ место рождения любой частицы совпадает с проекцией $a_+(x)$ точки $x \in D$ на вход потока S^+ вдоль линии тока, проходящей через точку x. Таким образом, время протекания t_+ удовлетворяет функциональному уравнению

$$X(0, x, t_+) = a_+ \in S^+. \tag{7.2}$$

Поскольку сквозное течение не имеет точек покоя, гладкость функции t_+ определяется лишь гладкостью входа и поля $\mathbf{v}$. В частности, введенное в начале статьи предположение Н3 о гладкости основного течения обеспечивает дифференцируемость функции t_+ в области D, и, следовательно, дифференцируемость функций a, τ, δ в области $D \times \{t > t_*\}$. Например, градиент времени протекания t_+ определяется из уравнения (7.2). Он имеет вид

$$\nabla t_+ = \gamma^{-1}(X'_+(x))^* \mathbf{n}(a_+(x)), \tag{7.3}$$

где вектор $\mathbf{n}$ — орт внешней нормали к S^+, оператор $X'_+(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — предельное значение дифференциала $X'(s, x, t)$ отображения $x \mapsto X(s, x, t)$ при $s \to \tau(x, t)$ и сопряженный оператор отмечен верхним индексом $*$.

Оценка оператора X' выводится из задачи Коши (3.1). Она имеет вид

$$|X'(s, x, t)| \leqslant \exp[(t - s)M_x], \quad s \in (\tau(x, t), t),\ x \in D; \tag{7.4}$$

здесь M_x есть верхняя грань величин $|\nabla \mathbf{v}|(y)$, когда точка y пробегает отрезок линии тока поля $\mathbf{v}$, соединяющей точку x со входом. Существенно, что эта оценка равномерна по t: в силу условия полного протекания $t - \tau(x, t) < t_*$ для всех $x \in D$ и $t > 0$.

Применим неравенство (7.4) для оценки производных функции t_+ (см. (7.3)). Положив $t > t_*$ и $s \to \tau = t - t_+$ в неравенстве (7.4), найдем, что

$$|\nabla t_+|(x) \leqslant -\gamma(a_+(x)) \exp[t_+(x)M_x]. \tag{7.5}$$

Заметим еще, что при условии полного протекания в области течения D можно ввести координаты «функция тока ψ — время протекания t_+». В силу равенства $\mathbf{v} = \nabla^\perp \psi$ производная $L_v t_+$ — якобиан преобразования $x \mapsto (\psi(x), t_+(x))$, который равен единице (см. уравнение (7.1)). Таким образом, преобразование $x \mapsto (\psi(x), t_+(x))$ сохраняет элемент площади в D.

Вернемся к представлению операторов $U(t)$ полугруппы $\mathscr{U}$ в виде ряда теории возмущений (см. § 5). Пусть $\xi \in L_2(D)$ — начальное возмущение и $\sigma(t) = U(t)\xi$. Тогда

$$\sigma(t) = \sigma_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(t),$$

где $\sigma_k(t) = U_k(t)\xi$. Здесь операторы U_k определены в равенствах (5.3), $\sigma_0(t) = U_0(t)\xi$ — решение транспортной задачи (2.2) и $U_0(t)$ — оператор полугруппы сдвигов $\mathscr{U}_0$. Поскольку t_* — показатель нильпотентности полугруппы $\mathscr{U}_0$, вектор-функции σ_m $(m = 0, 1, \dots)$, как и оператор-функции U_m, могут принимать ненулевые значения, лишь когда $t < (m + 1)t_*$.

Определим оператор C как свертку вида

$$[(Cf)(t)](x) = \left[\int_0^t U_0(t - s) f(s)\right](x) = \int_{\tau(x,t)}^t f(X(s, x, t), s)\, ds, \tag{7.6}$$

где $X(s,x,t) \in D$ — решение задачи Коши (3.1). По определению операторов $U_k(t)$ функции σ_k удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\sigma_k(x,t) = -[(C(K\sigma_{k-1}))(t)](x) = -\int\limits_{\tau(x,t)}^{t} (K\sigma_{k-1})(X(s,x,t),s)\,ds, \quad k = 1, \dots, \tag{7.7}$$

где $K = \nabla\omega \wedge \nabla G\sigma$. Просуммировав равенства (7.7) по k, найдем, что на луче $t > t_*$ возмущение $\sigma(t)$ есть решение уравнения

$$\sigma(x,t) = -[(C(K\sigma))(t)](x) = -\int\limits_{\tau(x,t)}^{t} (\nabla\omega \wedge \nabla G\sigma)(X(s,x,t),s)\,ds. \tag{7.8}$$

Заметим, что длина отрезка интегрирования в интегралах (7.6)–(7.8) не превосходит времени полного протекания t_*.

Существо дела состоит в том, что оператор CK является суперпозицией двух сглаживаний: действия оператора K и интегрирования C вдоль конечных путей жидких частиц. Поэтому в момент времени $t > mt_*$ ($m \in \mathbb{N}$) возмущение $\sigma(t)$ состоит из слагаемых $\sigma_k(t)$ ($k \geqslant m$), каждое из которых — не менее, чем m-кратно сглаженное решение σ_0 транспортной задачи (2.2).

Лемма 7.1. *Пусть $t > t_*$ и $f \in L_2(D)$. Тогда функция $(Cf)(t)$ удовлетворяет неравенству*

$$\|(Cf)(t)\| \leqslant t_* \sup\{\|f(s)\| : s \in (t - t_*, t)\}. \tag{7.9}$$

Доказательство. Применив неравенство (3.10) для оценки норм операторов $U_0(t-s)$, получим

$$\|(Cf)(t)\| \leqslant \int\limits_0^t \|U_0(t-s)\|\,\|f(s)\|\,ds \leqslant \int\limits_{t-t_*}^{t} \|f(s)\|\,ds,$$

откуда следует (7.9). Лемма доказана.

Далее нужно исследовать поведение возмущения σ вблизи входа S^+. Поскольку время протекания t_+ положительно в области D и равно нулю на входе, достаточно изучить след возмущения $\sigma(t)$ на множестве $\{t_+(x) < \varepsilon\}$ для малого $\varepsilon > 0$.

Пусть функции η, η_ε класса $C_0^\infty[0,\infty)$ обладают следующими свойствами:

$$\operatorname{supp}\eta \subset [0,1), \quad 1 \geqslant \eta(r) \geqslant 0, \quad \eta_\varepsilon(r) = \varepsilon^{-1}\eta(r/\varepsilon).$$

Лемма 7.2. *Пусть C — оператор, определенный в (7.6), функция f принадлежит $C(\mathbb{R}^+, L_2(D))$ и $t > t_*$. Тогда функция $(Cf)(t)$ удовлетворяет предельному равенству $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|\eta_\varepsilon(t_+)(Cf)(t)\| = 0$.*

Доказательство. Зафиксируем $t > t_*$ и положим

$$I = \int\limits_D [\eta_\varepsilon(t_+(x))[(Cf)(t)](x)]^2\,dx = \int\limits_D \Bigg[\eta_\varepsilon(t_+(x)) \int\limits_{\tau(x,t)}^{t} f(X(s,x,t),s)\,ds\Bigg]^2\,dx.$$

Применив неравенство Коши — Буняковского для оценки внутреннего интеграла $[(Cf)(t)](x)$, приняв во внимание, что $\tau = t - t_+$, когда $t > t_*$, и сменив порядок интегрирования, будем иметь

$$I \leqslant \varepsilon^{-1} \int\limits_{t-\varepsilon}^{t} \int\limits_{E_{1,\varepsilon(s)}} f^2(X,s)\,dxds, \quad X = X(s,x,t).$$

Здесь $E_{1,\varepsilon}(s) = \{\tau(x,t) < s\} \cap \{t_+(x) < \varepsilon\}$ и каждой точке $x \in E_{1,\varepsilon}(s)$ соответствует точка $y = X(s,x,t) \in D$. Ввиду несжимаемости жидкости соответствие $x \mapsto y = X(s,x,t)$ сохраняет площадь, поэтому $\operatorname{mes} E_{1,\varepsilon}(s) = \operatorname{mes} X(s, E_{1,\varepsilon}(s), t)$. Следовательно,

$$I \leqslant \varepsilon^{-1} \int\limits_{t-\varepsilon}^{t} \int\limits_{E_\varepsilon(s)} f^2(y,s)\,dyds, \quad E_\varepsilon(s) = X(s, E_{1,\varepsilon}(s), t),$$

откуда вытекает оценка

$$I \leqslant \sup\biggl\{ \int\limits_{E_\varepsilon(s)} f^2(x,t)\,dx + \biggl| \int\limits_D [f^2(x,s) - f^2(x,t)]\,dx \biggr| : s \in (t-\varepsilon, t) \biggr\}. \tag{7.10}$$

Поскольку $E_{1,\varepsilon}(s) \subset \{t_+(x) < \varepsilon\}$ для всех $s \in (t-\varepsilon,t)$ и при этом $\operatorname{mes} E_\varepsilon(s) = \operatorname{mes} E_{1,\varepsilon}(s)$, с учетом положительности функции t_+ и ограниченности области D имеем

$$\sup\{\operatorname{mes} E_\varepsilon(s) : s \in (t-\varepsilon,t)\} \leqslant \operatorname{mes}\{t_+(x) < \varepsilon\} \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Отсюда с учетом неравенства (7.10) и непрерывности f по L_2-норме следует искомое предельное равенство. Лемма доказана.

Лемма 7.3. *Пусть функция ξ принадлежит $L_2(D)$ и $t > t_*$. Тогда производная $(L_v\sigma)(t)$ функции $\sigma(t) = U(t)\xi$ вдоль линий тока основного течения принадлежит $L_2(D)$ и удовлетворяет неравенству $\|(L_v\sigma)(t)\| \leqslant c\max\{\|\sigma(s)\|, t-t_* < s < t\}$, где $c = c_0\|\nabla\omega\|_\infty(1 + t_*(\|\nabla\omega\|_\infty + \|\mathbf{v}\|_\infty))$, а константа c_0 зависит только от D.*

Доказательство. Введем соленоидальное поле $\mathbf{w} = \nabla^\perp\omega$ и запишем оператор $-K$ в виде $-K = L_w\varphi$, где $\varphi = G\sigma$ — функция тока возмущения. Через X' обозначим дифференциал отображения $x \mapsto X(s,x,t)$. В силу его определения $X'\mathbf{v} = \mathbf{v} \circ X$. Зафиксируем момент времени $t > t_*$. Продифференцируем уравнение (7.8) и запишем производную $L_v\sigma$ в виде

$$L_v\sigma = (L_w\varphi)(a_+,\tau) + I, \quad I = \int\limits_\tau^t [(L_v(L_w\varphi))(X,s)]\,ds, \quad X = X(s,x,t). \tag{7.11}$$

В силу стационарного уравнения Эйлера $L_v\omega = 0$, а потому поля $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w} = \nabla^\perp\omega$ коммутируют. Более того, выполняется равенство $\mathbf{w} = \nu\mathbf{v}$, где $\nu = \nu(\psi) = \nabla\omega/\nabla\psi$ — производная вихря основного течения по его функции тока (см. § 4, (4.8)). Функция ν постоянна на линиях тока $\{\psi = \mathrm{const}\}$. Следовательно, $L_vL_w\varphi = \nu(\nabla_v\mathbf{v}\cdot\nabla\varphi + \sum\limits_{jk} v_jv_k\partial^2_{jk}\varphi)$. Подставим это выражение в интеграл I

из тождества (7.11) и заметим, что $(\nabla_v \mathbf{v})(X) = \partial_s^2 X$. Проинтегрировав «по частям», приведем интеграл I к виду

$$I = (L_w\varphi)(x,t) - (L_w\varphi)(a_+,\tau) - \int_\tau^t (L_w\partial_t\varphi)(X,s)\,ds.$$

Подставив это выражение в равенство (7.11), получим

$$(L_v\sigma)(x,t) = (L_w\varphi)(x,t) - \int_\tau^t (L_w\partial_t\varphi)(X,s)\,ds. \tag{7.12}$$

Далее, производная $\partial_t\varphi$ есть решение задачи Дирихле

$$-\Delta\partial_t\varphi = L_w\varphi - L_v\sigma \quad \partial_t\varphi|_S = 0.$$

Здесь правая часть уравнения Пуассона может быть записана в виде $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{w} - \sigma\mathbf{v})$, а потому имеет место неравенство $\|(\nabla\partial_t\varphi)(t)\| \leqslant c_0(\|\mathbf{w}\|_\infty + \|\mathbf{v}\|_\infty)\|\sigma(t)\|$, где константа c_0 зависит только от D. Теперь оценка производной $L_v\sigma$ в $L_2(D)$ свелась к оценке величины $\|[C(L_w\partial_t\varphi)](t)\|$. Применив для этого лемму 7.1, получим искомое неравенство. Лемма доказана.

Лемма 7.4. *Пусть $t > t_*$ и $\xi \in L_2(D)$. Тогда возмущение $\sigma(t) = U(t)\xi$ принадлежит области определения Dom_v генератора $-E_v$ полугруппы $\mathscr{U}$.*

Доказательство. В силу нильпотентности полугруппы сдвигов $\mathscr{U}_0$ ее генератор $-L_v$ (определенный на Dom_v) имеет L_2-ограниченный обратный оператор $-T_0$ (см. § 3). В координатах ψ, t_+ оператор L_v имеет вид $\partial/\partial t_+$, а обратный оператор T_0 выражается интегралом

$$(T_0 f)(\psi,t_+) = \int_0^{t_+} f(\psi,s)\,ds.$$

Заметим, что предельное равенство леммы 7.2. выполняется для всех функций вида $T_0 f$, $f \in L_2(D)$.

По условию $t > t_*$. Следовательно, по лемме 7.3 $(L_v\sigma)(t) \in L_2(D)$. Поэтому $\sigma(t) - T_0(L_v\sigma)(t) = f_+(\psi) \in L_2(D)$. Приняв во внимание лемму 7.2, найдем, что $f_+ = 0$ и $\sigma(t) = T_0 L_v\sigma(t) \in \mathrm{Dom}_v$. Лемма 7.4 доказана.

Из леммы 7.4 следует утверждение (2) теоремы 1 о гладкости полугруппы $\mathscr{U}$ (см. [15, гл. X]), которое, вместе с леммой 7.3 и равенством (7.12) влечет L_2-оценку производной $\partial_t\sigma$ из утверждения (4) теоремы 1, этим доказанного.

Перейдем к изучению гладкости возмущений поперек потока.

Лемма 7.5. *Пусть поле $\mathbf{v}$ столь регулярно, что $\nabla\mathbf{v} \in L_\infty(D)$ и $\omega = \operatorname{rot}\mathbf{v} \in W^{2,p}(D)$ при некотором $p > 2$. Тогда для всех $t > t_*$ имеет место вложение $\exp(-tE_v)L_2 \subset W_2^1(D) \cap \mathrm{Dom}_v$. При этом $\|\nabla\sigma\|(t) \leqslant c\sup\{\|\sigma\|(s),\ t - t_* \leqslant s \leqslant t\}$, где $c = c_0((\exp(2t_*M) - 1)/2\gamma_0 M)^{1/2}$, $M = \|\nabla\mathbf{v}\|_{\infty,D}$, $\gamma_0 = \min(1, \inf\{-\gamma(x) : x \in S^+\})$, а константа c_0 не зависит ни от t, ни от t_*.*

Доказательство. Пусть $f = -K\sigma(t)$. Поскольку $t > t_*$, выполняется равенство (7.8). Продифференцировав его, будем иметь

$$(\nabla_x\sigma)(x,t) = f(a,\tau)(\nabla t_+)(x) + \int_\tau^t \nabla_x[f(X,s)]\,ds, \quad X = X(s,x,t). \tag{7.13}$$

Так как $t > t_*$, образ $\Lambda_t D$ области D при отображении $\Lambda_t : x \mapsto (a(x,t), \tau(x,t))$ содержится в поверхности $S^+ \times (t - t_*, t)$. Введем на ней координаты (α, h), где α — длина дуги на S^+ и $h \in (t - t_*, t)$. Положив $\alpha = \alpha(a(x,t))$ и $h = \tau(x,t)$, запишем квадрат L_2-нормы функции $f(a,\tau)(\nabla t_+)(x)$ в виде

$$I_1 = \int\limits_{\Lambda_t D} [f_+(\alpha,h)(\nabla_x t_+)]^2 \gamma(\alpha)\, d\alpha dh,$$

где f_+ — след функции f на поверхности $S^+ \times (t - t_*, t)$. Применив оценку (7.5) градиента функции t_+, получим неравенство

$$I_1 \leqslant \gamma_0^{-1} \int\limits_{t-t_*}^{t} \int\limits_{S^+} f_+^2(\alpha,h) e^{2M(t-h)}\, d\alpha dh.$$

По условию H1 оператор G ограничен $L_2(D) \to W^{2,2}(D)$. Так как по предположению вторые производные вихря ω суммируемы со степенью $p > 2$, имеем включение $f = -K\sigma(t) = \nabla G\sigma(t) \wedge \nabla\omega \in C([0,\infty), W^{1,2}(D))$. В силу теорем вложения для любого момента времени $t > 0$ выполняется неравенство $\|f_+(t)\|_{2,S^+} \leqslant c_0\|\sigma(t)\|$, где величина c_0 зависит лишь от гладкости основного течения. Из двух последних неравенств вытекает, что нужная оценка верна для величины I_1. Осталось установить ее для второго слагаемого в правой части равенства (7.13). Это делается аналогично выводу оценки величины I_1. Следует только применить неравенство (7.4) для дифференциала X' отображения X и очевидные оценки ∇f по норме $L_2(D)$. Лемма доказана.

Предположения леммы 7.5 о гладкости основного течения вплоть до границы выполняются, например, для сдвиговых потоков. В общем случае, однако, они обременительны, так как граница канала негладкая. Вместе с тем локальная гладкость сквозного течения вполне естественна (см. § 4). Поэтому лемму 7.5 можно применить для оценки производных возмущения на подобласти D' области D, ограниченной внутренними линиями тока. Такие подобласти инвариантны для основного течения. Тем самым локальная оценка $(\nabla_x\sigma)(t)$ из утверждения (3) теоремы 2 будет доказана.

Вывод оценок (2.8) высших производных возмущения $\sigma(t)$ аналогичен доказательству леммы 7.5. Не задерживаясь на деталях, заметим, что следует учесть m-кратную дифференцируемость полугруппы $\mathscr{U}$ на луче $t > mt_*$, а для оценки производных функции $\varphi = G\sigma$ можно применить известные локальные оценки решений эллиптических уравнений (см., например, [16]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кочин М. Е.* Об одной теореме существования гидродинамики // Прикл. математика и механика. 1957. Т. 20, № 10. С. 5–20.
2. *Юдович В. И.* Двумерная нестационарная задача о протекании идеальной несжимаемой жидкости через заданную область // Мат. сб. 1964. Т. 64, № 4. С. 562–588.
3. *Юдович В. И.* О задаче протекания идеальной несжимаемой жидкости через заданную область // Докл. АН СССР. 1962. Т. 146, № 3. С. 561–564.
4. *Кажихов А. В.* Замечание к постановке задачи протекания для уравнений идеальной жидкости // Прикл. математика и механика. 1980. Т. 44, № 5. С. 947–949.
5. *Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983.
6. *Солопенко В. М.* Свойство разрешимости нестационарных уравнений Эйлера в терминах H, ψ // Докл. АН СССР. 1989. Т. 305, № 3. С. 567–571.

7. *Алексеев Г. В.* Об исчезающей вязкости в двумерных стационарных задачах гидродинамики несжимаемой жидкости // Динамика сплошной среды. Новосибирск. Ин-т гидродинамики СО АН СССР. 1972. Вып. 10. С. 5–28.

8. *Алексеев Г. В.* О единственности и гладкости плоских вихревых течений идеальной жидкости // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР.1973. Вып. 15. С. 7–18.

9. *Моргулис А. Б.* Разрешимость трехмерной стационарной задачи протекания // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 1. С. 142–158.

10. *Юдович В. И.* Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1984.

11. *Юдович В. И.* О потере гладкости решений уравнений Эйлера со временем // Динамика сплошной среды. 1974. Т. 16. С. 71–78.

12. *Yudovich V. I.* On the loss of smoothness of the solutions to the Euler equations and the inherent instability of an ideal fluid flows // Chaos. 2000. V. 10, N 3. P. 705–719.

13. *Арнольд В. И.* Замечания о поведении течений трехмерной идеальной жидкости при малом возмущении начального поля скоростей // Прикл. математика и механика. 1972. Т. 36, № 5. С. 255–262.

14. *Крайко А. Н.* О поведении двумерных неплоскопараллельных вихревых течений невязкого газа // Прикл. математика и механика. 1982. Т. 46, № 6. С. 972–978.

15. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

16. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.

Статья поступила 14 июня 2001 г.

Моргулис Андрей Борисович, Юдович Виктор Иосифович
Ростовский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Зорге, 5, Ростов-на-Дону 344090
amor@ns.math.rsu.ru, yudovich@ns.math.rsu.ru