Сибирский математический журнал
Июль—август, 2002. Том 43, № 4

УДК 513.7

О ПОНЯТИИ КОМБИНАТОРНОЙ p–ПАРАМЕТРИЧНОСТИ МНОГОГРАННИКОВ

И. Г. Максимов, И. Х. Сабитов

Аннотация: Вводятся различные понятия комбинаторной p-параметричности многогранников, общий смысл которых сводится к определению числа параметров, локально однозначно определяющих многогранник при задании длин его ребер и комбинаторного строения.

Ключевые слова: многогранники, комбинаторное строение, метрика, изгибаемость и неизгибаемость, диагонали с фиксированными длинами, однозначная определенность

1. Мы рассматриваем задачу исследования неизгибаемости многогранников как задачу о локальной однозначности реализации многогранной метрики в 3-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$.

Еще Лежандр в [1] показал, что гомеоморфный сфере многогранник однозначно определяется числом параметров, равным числу его ребер. Но позже Брикар [2] построил примеры изгибаемых октаэдров и тем самым обнаружилось, что в качестве этих параметров не всегда можно брать длины ребер.

Наша цель — корректная постановка задачи о степени произвола при локальном выборе реализации многогранной метрики в зависимости от комбинаторного строения многогранника при известных длинах его ребер.

Пусть K — двумерный симплициальный комплекс, гомеоморфный некоторому компактному (т. е. без края) многообразию. Комплекс K задает комбинаторную схему многогранника с треугольными гранями. Считаем, что симплексы из K заданы как геометрические (евклидовы) отрезки и треугольники. Мы не предполагаем, что K имеет топологический тип сферы, важны только его связность и компактность.

Определение 1. *Многогранником с комбинаторным строением* K называется непрерывное отображение $P : K \to \mathbb{R}^3$, линейное на каждом симплексе комплекса K.

Для большей наглядности и удобства записи мы будем называть многогранником также образ $P(K)$ отображения P в $\mathbb{R}^3$. Если комплекс K гомеоморфен сфере S^2, то в качестве модели комплекса K можно взять некоторый выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^3$. Отображение $P : K \to \mathbb{R}^3$ удобно задавать значениями координат образов вершин, этого достаточно, так как по комбинаторной схеме K нам известны все пары и все тройки вершин, определяющие соответственно ребра и грани многогранника.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00101).

Обозначим через n число вершин многогранника, через E — множество неупорядоченных пар (i,j), $1 \le i,j \le n$, для которых вершины с номерами i, j соединены ребром. Пусть (x_i, y_i, z_i), $1 \le i \le n$, — координаты в $\mathbb{R}^3$ вершин многогранника $P(K)$, и пусть (l_{ij}), $(i,j) \in E$, — длины его ребер. Тогда имеем

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 = l_{ij}^2, \quad (i,j) \in E. \tag{1}$$

Число уравнений этой системы равно $e = 3n + 6g - 6$, где g — топологический род многогранника.

Очевидно, набор длин ребер (l_{ij}), $(i,j) \in E$, многогранника $P(K)$ задает метрику многогранника как поверхности в $\mathbb{R}^3$.

Будем называть *диагоналями* многогранника неупорядоченные пары (i,j), $1 \le i,j \le n$, если $(i,j) \notin E$. Обозначим через d_{ij}, $(i,j) \notin E$, длины диагоналей многогранника.

Заметим, что полный набор длин ребер и всевозможных диагоналей однозначно определяет реализацию многогранника в $\mathbb{R}^3$ с точностью до его движения в пространстве как твердого тела. Таким образом, при изучении изгибаемости мы имеем два эквивалентных способа задания многогранника:

1) с помощью задания координат всех его вершин (x_i, y_i, z_i), $1 \le i \le n$, т. е. как точку в пространстве $\mathbb{R}^{3n}$ с координатами $(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$;

2) с помощью задания длин всех ребер и диагоналей (l_{ij}, d_{km}), $(i,j) \in E$, $(k,m) \notin E$, $l_{ij} > 0$, $d_{km} \ge 0$, т. е. как точку в пространстве $\mathbb{R}^N$, где $N = \frac{n(n-1)}{2}$.

Мы предполагаем, что длины всех ребер положительные, так как будем рассматривать только невырожденные многогранники.

2. Задача реализации метрики формулируется следующим образом. Пусть заданы симплициальный комплекс K и набор длин ребер (l_{ij}), $(i,j) \in E$. Требуется построить отображение $P : K \to \mathbb{R}^3$, реализующее заданную метрику, т. е. найти набор координат (x_i, y_i, z_i), $1 \le i \le n$, удовлетворяющих соотношению (1). Очевидно, необходимым условием существования решения этой системы является выполнение нестрогого неравенства треугольника для длин ребер каждой грани и вообще для каждого цикла из трех ребер.

Можно сформулировать задачу реализации метрики и как задачу поиска подходящих длин диагоналей. Ниже будет показано, что для существования реализации при заданных длинах ребер и длинах диагоналей необходимо и достаточно, чтобы длины ребер и диагоналей удовлетворяли некоторой системе полиномиальных уравнений, вид которой зависит от комбинаторного строения комплекса K.

Мы будем исключать тривиальную часть неоднозначности, сводящуюся просто к движению в пространстве всего многогранника как твердого тела. Для этого наложим дополнительные ограничения на отображение P, исключающие непрерывные сдвиги и вращения $P(K)$ как твердого тела:

$$x_1 = y_1 = z_1 = y_2 = z_2 = z_3 = 0. \tag{2}$$

Объясним выбор этих уравнений. Мы зафиксировали плоскость одной грани, направление одного ребра и положение одной вершины на ней, обозначив номера вершин этой грани как 1, 2 и 3. Хотя в общем случае это не приводит к фиксации положения многогранника при *всех возможных* значениях длин ребер, так как выбранная грань может оказаться вырожденной[1], но в нашем

[1] О других вариантах закрепления многогранника и связанных с этим проблемах см. в [3].

случае такое условие фиксации допустимо, поскольку мы интересуемся локальной однозначной определенностью, а тогда найдется хотя бы одна невырожденная грань, которую мы и будем считать закрепленной; это тем более верно для основной части статьи, потому что мы, как уже было сказано выше, будем заниматься только многогранниками с невырожденными гранями.

Для различения разных видов неоднозначности решения системы (1)–(2) введем следующее определение.

Определение 2. *Изгибанием* многогранника P называется непрерывное по параметру $t \in [0, \varepsilon]$ семейство многогранников $P_t : K \to \mathbb{R}^3$ такое, что $P_0 = P$ и все $P_t(K)$ нетривиально изометричны между собой в индуцированной из $\mathbb{R}^3$ метрике.

Тем самым *изгибанием* мы называем *непрерывную и нетривиальную* (т. е. не сводящуюся к движению) деформацию P_t в $\mathbb{R}^3$, в процессе которой все грани многогранника перемещаются как абсолютно твердые пластинки, оставаясь конгруентными своим исходным положениям. Впрочем, условия (2) для того и введены, чтобы любое непрерывное семейство решений системы (1)–(2), содержащее многогранник P_0, автоматически оказывалось нетривиальной изометрической деформацией этого многогранника.

Известные примеры показывают существование изгибаемых многогранников и, значит, отсутствие локальной единственности решения задачи о реализации многогранной метрики в общем случае. Следующая естественная задача — выяснить степень неоднозначности при выборе реализации. Оказывается, что сформулировать корректную постановку этой задачи весьма непросто и она требует большой аккуратности в определениях и четких условий рассмотрения[2].

Обратим внимание, что уже само определение изгибаемых многогранников (определение 2) предполагает, что мы имеем непрерывную параметризацию хотя бы некоторого множества решений по крайней мере в окрестности данного многогранника, в данном случае — одномерную. Наша цель — корректная постановка задачи о числе параметров. (По всей видимости, вопрос о степени гладкости параметризации не имеет существенного значения ни для выяснения числа параметров, ни для их существования.)

Естественным представляется подход, основанный на рассмотрении конкретных реализаций. Другими словами, мы предполагаем наличие некоторой реализации $P(K)$ заданной многогранной метрики и исследуем два вопроса:

а) есть ли в любой достаточно малой окрестности $P(K)$ еще какие-либо реализации той же самой метрики (отличные, конечно, от получаемых из $P(K)$ движением)?

б) в случае их наличия мы, во-первых, согласно [5] получаем, что $P(K)$ — изгибаемый многогранник и поэтому любой достаточно близкий к $P(K)$ изометричный ему многогранник $\widetilde{P}(K)$ соединяется с $P(K)$ некоторым изгибанием $P_t(K)$, во-вторых, тогда естественно выяснять число параметров, необходимых для однозначного выбора решения в некоторой окрестности $P(K)$.

Для более формальной постановки задачи поступим следующим образом. Каждому многограннику с произвольным образом пронумерованными n вершинами и с координатами вершин (x_i, y_i, z_i), $1 \le i \le n$, сопоставим точку $(x_1, y_1, z_1, \ldots, z_n)$ пространства $\mathbb{R}^{3n}$. Это сопоставление при фиксированной

[2]Позволим себе признаться, что данный текст статьи является ее пятым или шестым вариантом, а сама работа над статьей началась лет пять назад. Одна из версий опубликована в виде тезисов [4].

нумерации вершин и фиксированном комбинаторном строении многогранника является взаимно-однозначным, и поэтому алгебраическое многообразие A в $\mathbb{R}^{3n}$, определяемое системой уравнений (1)–(2), описывает *все* нетривиально различные изометрические реализации в $\mathbb{R}^3$ данного многогранника $P(K)$. Совокупность всех таких реализаций обычно называется *конфигурационным пространством* многогранника. Таким образом, многообразие A является топологической моделью конфигурационного пространства многогранника. Теперь поставленные выше задачи можно по-другому сформулировать так:

а) имеем ли мы в данной точке только дискретную (или, в другой терминологии, изолированную) компоненту алгебраического многообразия, заданного системой уравнений (1)–(2), или нет?

б) в случае отрицательного ответа выясняем, какую размерность имеет данная компонента.

Введем следующее определение.

Определение 3. Многогранник $P(K)$ называется *p-параметрическим* в общем смысле, если в любой достаточно малой окрестности $P(K)$ в пространстве $\mathbb{R}^{3n}$ максимальная размерность содержащих $P(K)$ компонент алгебраического многообразия A в $\mathbb{R}^n$, заданного системой уравнений (1)–(2), равна p.

Но здесь приходится учитывать несколько моментов, показывающих, что на самом деле надо будет сформулировать несколько разных определений p-параметричности многогранника.

1. В силу невозможности прямого решения системы уравнений (1)–(2) (и в силу того, что почти все многогранники неизгибаемы) обычно составляются уравнения, которым должны удовлетворять координаты вершин и длины ребер изгибаемого многогранника данного комбинаторного типа, что обычно предполагает введение некоторого числа параметров для описания возможных изгибаний с неизбежно вытекающими отсюда вопросами: сколько нужно ввести таких параметров и как именно их выбрать?

2. Ответ на оба вопроса о параметрах в общем случае зависит и от метрики, и от комбинаторной схемы, и от свойств отображения P. Однако роль каждого из этих факторов может быть различной.

Действительно, если мы возьмем в качестве первого примера многогранники, имеющие комбинаторную структуру тетраэдра, то увидим, что любой такой многогранник будет неизгибаемым вне зависимости от метрики и свойств отображения P.

Следующий пример нам дают пирамиды. Под *пирамидой* мы понимаем любой многогранник, одна из вершин которого соединена ребром со всеми другими вершинами этого многогранника. В общем положении в смысле приведенного ниже определения 4 любая невырожденная пирамида неизгибаема независимо от свойств метрики (см. [6]). С другой стороны, на рис. 1 справа показан пример нетривиально изгибаемой пирамиды (вершина P_5 лежит на отрезке $[OP_2]$), комбинаторная модель которой представлена на том же рисунке слева. Изгибанием является независимое вращение части $OP_2P_3P_4P_5$ относительно части $OP_1P_2P_5P_6$ вокруг прямой, содержащей ребро (OP_2). Таким образом, появление изгибаний определяется свойствами метрики многогранника ($l_{OP_2} = l_{OP_5} + l_{P_2P_5}$), тогда как комбинаторная схема предполагает отсутствие нетривиальных изгибаний.

Примерами того, как характер отображения P определяет наличие или отсутствие изгибаний, являются те изгибаемые октаэдры Брикара, которые имеют

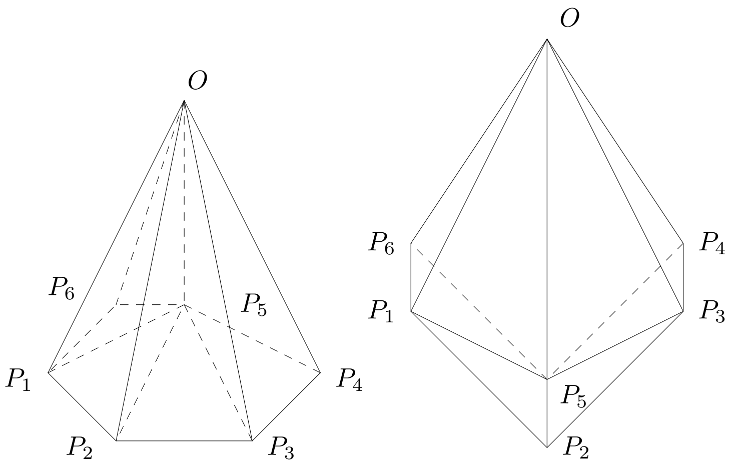

Рис. 1. Пирамида.

плоский экватор. Для каждого из них существует неизгибаемый (но не всегда выпуклый) октаэдр с такой же метрикой, который получается из октаэдра Брикара с помощью зеркального отображения одной из его частей относительно плоскости экватора.

3. Мы предлагаем в качестве первого шага рассмотреть комбинаторную часть проблемы, т. е. зависимость числа параметров от комбинаторного типа многогранника.

Рассмотрение комбинаторной части проблемы вынуждает нас сразу сформулировать два важных ограничения.

Первое мы уже сформулировали в самом начале: мы будем изучать только невырожденные отображения, переводящие двумерные симплексы комплекса K в невырожденные грани многогранника $P(K)$. Тогда, в частности, одномерные симплексы из K тоже переходят в невырожденные ребра многогранника $P(K)$. Другими словами, эти отображения сохраняют комбинаторную структуру K в том смысле, что все абстрактные ребра и грани представляются в $P(K)$ «натуральными» ребрами и гранями. Заметим, что невырожденность (равно как и вырожденность) сохраняется в процессе изгибания многогранника, так что введенное ограничение вполне корректно для рассматриваемой задачи.

Затем мы наложим более строгое ограничение — условие так называемого «общего положения».

Определение 4. Будем говорить, что многогранник $P(K)$ *находится в общем положении*, если образы никаких трех вершин комплекса K не лежат на одной прямой.

Требование общего положения позволяет исключить класс многогранников, полученных в результате «неудачной» реализации, когда какой-либо цикл (или даже некоторый набор циклов) в K, разделяющий его на две части, может перейти в отрезок (соответственно в совокупность отрезков на одной прямой) и получится многогранник, одна «половинка» которого может просто вращаться относительно второй его «половинки». Специфика этого класса определяется отображением P, а не комбинаторными свойствами комплекса K. Пример представлен на рис. 1.

Заметим, что многогранник в общем положении автоматически будет невырожденным. Его строение в $\mathbb{R}^3$ сохраняет все «тонкости» комбинаторной структуры комплекса K, представляя все циклы в виде невырожденных многоугольников.

4. Особая роль в параметризации многогранников принадлежит его диагоналям, и это тесно связано с понятием общего положения. Действительно, при изгибании длина хотя бы одной диагонали изменяется, что позволяет использовать их в качестве параметров, описывающих изгибания.

В работе [7] показано, что для многогранников в общем положении (понимаемом более строго, чем у нас) для каждой малой диагонали d существует многочлен Q такой, что диагональ d является корнем этого многочлена, причем коэффициенты многочлена Q определяются только метрикой и комбинаторным строением многогранника (под *малой диагональю* понимается диагональ, проведенная между вершинами двух граней, имеющих общее ребро). Далее, в той же работе показано, как по известным малым диагоналям восстановить все другие диагонали; вычисленные при этом длины диагоналей составляют некоторое конечное множество чисел, среди которых и надо искать длины диагоналей реально существующих многогранников с данными длинами ребер. Для вычисления диагоналей по методу, изложенному в работе [7], нужно, вообще говоря, чтобы любые три вершины многогранника образовывали невырожденный треугольник. В частности, это объясняет наш выбор понятия многогранников в общем положении.

Перед тем как сформулировать другие определения p-параметричности, дадим аналитическую запись условия общего положения. Для этого напомним несколько фактов, связанных с *определителем Кэли — Менгера*. Пусть нам даны n точек $M_1, \dots, M_n$ и все расстояния $r_{ij} = d(M_i, M_j)$, $1 \le i, j \le n$, между ними. Тогда определитель

$$\Gamma(M_1, \dots, M_n) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & r_{12}^2 & \dots & r_{1n}^2 \\ 1 & r_{21}^2 & 0 & \dots & r_{2n}^2 \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & r_{n1}^2 & r_{n2}^2 & \dots & 0 \end{vmatrix} \tag{3}$$

называется *определителем Кэли — Менгера* для расстояний между точками $M_1, \dots, M_n$ и он с точностью до постоянного множителя дает значение квадрата объема $(n-1)$-мерного тетраэдра, построенного на этих точках как на вершинах. С использованием определителей Кэли — Менгера мы имеем следующее утверждение: *для того чтобы многогранник $P(K)$ был в общем положении, необходимо и достаточно, чтобы для всех попарно различных i, j, k, $1 \le i, j, k \le n$, было выполнено неравенство*

$$\Gamma(P_i, P_j, P_k) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & r_{ij}^2 & r_{ik}^2 \\ 1 & r_{ji}^2 & 0 & r_{jk}^2 \\ 1 & r_{ki}^2 & r_{kj}^2 & 0 \end{vmatrix} \ne 0, \tag{4}$$

что эквивалентно условию $r_{ij} + \varepsilon_1 r_{jk} + \varepsilon_2 r_{ki} \ne 0$ для всех $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$. Здесь P_i, P_j, P_k — любые три различных вершины многогранника $P(K)$, r_{ij} — расстояние между вершинами P_i, P_j: $r_{ij} = l_{ij}$, если $(i,j) \in E$, и $r_{ij} = d_{ij}$, если $(i,j) \notin E$ (соответственно r_{jk}, r_{ki} — расстояния между вершинами P_j, P_k

и P_k, P_i); $\Gamma(P_i, P_j, P_k)$ — определитель Кэли — Менгера для трех точек, равный с точностью до постоянного множителя квадрату площади треугольника с вершинами в P_i, P_j, P_k.

Для многогранников общего положения запишем также необходимые и достаточные условия существования многогранника $P(K)$ с предписанными расстояниями (l_{ij}, d_{km}), $(i,j) \in E$, $(k,m) \notin E$, между всеми вершинами:

$$\begin{gathered} \Gamma(P_i, P_j, P_k) < 0, \quad \Gamma(P_i, P_j, P_k, P_m) \geq 0, \\ \Gamma(P_i, P_j, P_k, P_m, P_s) = 0, \quad \Gamma(P_i, P_j, P_k, P_m, P_s, P_t) = 0 \end{gathered} \tag{5}$$

для всех попарно различных i, j, k, m, s, t, $1 \leq i,j,k,m,s,t \leq n$. Эти уравнения можно найти в [8] или [9], где приведены эквивалентные (5) условия с меньшим числом уравнений; в частности, в задачах реализации, когда мы изучаем многогранники с данными длинами ребер и априори не знаем длины диагоналей, число уравнений Кэли — Менгера, достаточных для решения задачи, существенно уменьшается даже по сравнению с указанными в [8] или [9].

Обратим внимание, что вид этой системы после подстановки в нее длин ребер как известных величин зависит *только* от комбинаторной схемы K.

Заметим, что в силу условий (5) для того чтобы однозначно определить многогранник $P(K)$, нет необходимости задавать для него полный набор длин ребер и длин диагоналей, так как многие уравнения из системы (5) дают в случае общего положения нетривиальные соотношения на длины диагоналей и ребер.

5. Обозначим через $D(K) \in \mathbb{R}^N$ множество наборов (l_{ij}, d_{km}), $(i,j) \in E$, $(k,m) \notin E$, для которых существует реализация в $\mathbb{R}^3$ в виде многогранника в общем положении (т. е. для этих наборов удовлетворены соотношения (5)).

Множество $D(K)$ определяется только по комбинаторной схеме K. Каждой точке множества соответствует единственный многогранник $P(K)$ в общем положении.

Определение 5. Многогранник $P : K \to \mathbb{R}^3$ называется *комбинаторно p-параметрическим в грубом смысле*, если найдутся $p \geq 0$ диагоналей многогранника $(k_1, m_1), \dots, (k_p, m_p) \notin E$ такие, что для любых чисел $c_{ij} > 0$, $(i,j) \in E$, и $e_s > 0$, $s = 1, \dots, p$, пересечение множества $D(K)$ и плоскости $\{l_{ij} = c_{ij}, d_{k_s m_s} = e_s\}$ коразмерности $p + e$ либо пусто, либо состоит из конечного числа точек.

Замечание 1. Важно, что число p подходит для всех возможных рассматриваемых реализаций, хотя локально почти всюду $p = 0$.

Замечание 2. Очевидно, любой многогранник с n вершинами является p-параметрическим в грубом смысле с $p = \frac{n(n-1)}{2} - e$, где e — число ребер. Выбор такого «грубого» определения p-параметричности обусловлен тем, что для практической проверки p-параметричности нам важна оценка сверху и мы не требуем здесь, чтобы число p было минимально возможным — иначе при доказательстве p-параметричности придется строить пример изгибаемого многогранника с p-мерным конфигурационным пространством, что является очень сложной задачей (напомним, что почти все многогранники являются неизгибаемыми). К тому же требование минимальности может повлечь необходимость разрешить изменять набор диагоналей в зависимости от конкретной точки из $D(K)$ (с естественным вопросом о совпадении числа диагоналей для различных «карт», но, например, в окрестности выпуклых многогранников всегда будет $p = 0$).

Замечание 3. В этой статье мы оставляем в стороне вопросы о том, как влияет на число параметров избранный класс гладкости параметризации, и о том, можно ли в качестве параметров использовать длины диагоналей многогранника, не теряя при этом общности рассмотрения.

Сравнивая определения 3 и 5, заметим, что они, вообще говоря, независимы. Действительно, определение 3 носит более общий характер и может применяться для любых многогранников, тогда как определение 5 имеет дело только с многогранниками в общем положении и не учитывает ограничений, налагаемых метрикой. С другой стороны, определение 3 имеет дело с локальным поведением изометрических реализаций данного многогранника, а в определении 5 учитываются все такие реализации. Для многогранников в общем положении определение 5 дает оценку сверху для числа параметров в смысле определения 3. Чтобы более точно увидеть взаимоотношение двух определений, рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Рассмотрим пирамиды. Несложно построить пример (см. рис. 1) изгибаемой невырожденной пирамиды, не находящейся в общем положении и 1-параметрической в общем смысле по определению 3. Изгибанием является вращение вокруг оси (OP_2) одной части пирамиды относительно другой. С другой стороны, в смысле определения 5 все пирамиды комбинаторно 0-параметрические.

Пример 2. Все подвески комбинаторно 1-параметрические в грубом смысле. В качестве определяющей диагонали достаточно взять отрезок между полюсами. Изгибаемые октаэдры Брикара показывают, что число параметров, вообще говоря, нельзя уменьшить. В смысле же определения 3 конкретные реализации подвесок могут давать различные числа параметров: 0 и 1, для подвесок общего положения, и бо́льшие в противном случае.

Пример 3. Изгибаемый многогранник Штеффена (рис. 2) 1-параметрический в общем смысле и комбинаторно тоже 1-параметрический в грубом смысле.

Сначала докажем 1-параметричность в смысле определения 5. Возьмем в качестве диагонали, участвующей в определении, диагональ ON_1. Теперь предположим, что нам известны длина этой диагонали, длины всех ребер и координаты вершин O, P_1, P_2. Для определения координат остальных вершин применим следующие простые соображения. Мы скажем, что точка M *опирается* на треугольник T, если известны расстояния от M до всех трех вершин треугольника T, который в этом случае называется *базовым* или *опорным.* Если базовый треугольник T невырожденный и известны координаты его вершин, а вместе с ними и длины сторон, то можно определить координаты точки M, следовательно, и ее положение, но с точностью до ее расположения по одну или другую сторону от плоскости базы (соответствующие формулы можно найти в [7, 10, 11]). Именно таким путем мы можем последовательно вычислить координаты всех остальных вершин в случае многогранника в общем положении, например, в следующей последовательности: N_1 (с опорой на базу P_1P_2O), P_6 (с опорой на P_1N_1O), P_5 (с опорой на P_6N_1O), N_2 (с опорой на $P_2P_5N_1$), P_3 (с опорой на P_2N_2O) и P_4 (с опорой на P_5N_2O). На каждом шаге мы имеем для очередной вершины не более двух возможных положений, а для многогранника в целом — некоторый конечный набор координат вершин, среди которых

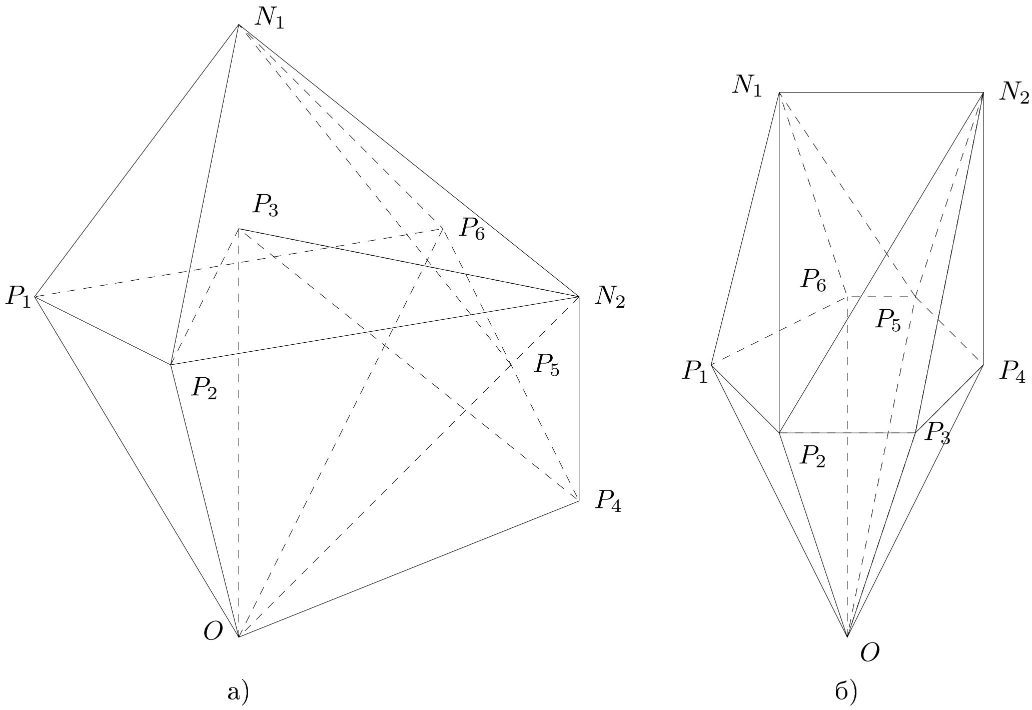

Рис. 2. Многогранник Штеффена: а) реализация, б) комбинаторная схема.

есть, конечно, и координаты многогранника Штеффена. Осталось заметить, что координаты вершин однозначно определяют длины всех диагоналей.

Теперь, чтобы доказать 1-параметричность многогранника Штеффена в общем смысле, т. е. в смысле определения 3, нам осталось показать однозначность выбора очередной вершины на каждом шаге вычисления в случае рассмотрения достаточно малой окрестности исходного многогранника. Для этого нам достаточно на каждом шаге выбирать ту вершину, которая ближе к исходной и обеспечивает принадлежность многогранника рассматриваемой окрестности.

6. Конечно, определение 5 вызывает некую неудовлетворенность тем, что в нем для числа параметров изгибания или размерности конфигурационного пространства устанавливается лишь оценка сверху. Поэтому можно предложить другое, более точное определение p-параметричности, которое, однако, более трудное для проверки.

Определение 6. Многогранник $P : K \to \mathbb{R}^3$ называется *комбинаторно p-параметрическим в точном смысле*, если найдутся $p \geq 0$ диагоналей многогранника таких, что после фиксации их длин многогранник становится неизгибаемым, будучи изгибаемым при фиксации любого меньшего количества диагоналей (при $p > 0$) при некоторых специальных положениях.

Соответствующее число p будем обозначать через $p(P(K))$, или, короче, $p(P)$, если речь идет о многогранниках с уже фиксированной комбинаторной структурой K.

Пример 4. Октаэдр является комбинаторно 1-параметрическим в точном смысле, так как если не фиксировать никакие диагонали, то в брикаровских положениях октаэдр изгибается; с другой стороны, фиксация длины диагонали между полюсами подвески приводит к ее неизгибаемости в общем положении.

Замечание 4. В определении 6 тоже есть некоторая неточность, а именно не сказано, должны ли быть эти p диагоналей, фиксация которых приводит к неизгибаемости, одними и теми же для любого допустимого выбора длин ребер. Ясно, что тут есть два варианта определения. В связи с этим возникают два вопроса.

Вопрос 1. Являются ли эти два возможных варианта определения 6 эквивалентными?

Вопрос 2. Как описать изгибаемые и комбинаторно p-параметрические в точном смысле многогранники, которые становятся неизгибаемыми при фиксации *любых* p диагоналей?

Обратимся теперь ко всему классу многогранников с данным комбинаторным строением.

Определение 7. Число $p(K) = \max\limits_{P(K)} p(P(K))$ будем называть *точным параметром изгибаемости* многогранников с комбинаторной схемой K.

Так как предполагается, что все многогранники находятся в общем положении в смысле определения 4, то число $p(K)$ действительно зависит только от комбинаторной схемы K и оно показывает, какое максимальное количество параметров изгибания может иметь многогранник в общем положении с комбинаторной структурой K (а возможное меньшее количество параметров изгибания какого-либо конкретного многогранника с комбинаторной структурой K объясняется специальными свойствами его метрики или его расположения в пространстве). Легко видеть, что число $p(K)$ может быть сколь угодно большим, т. е. для любого числа p_0 можно подобрать комбинаторную схему K_0, такую, что $p(K_0) \geq p_0$. Например, возьмем два конгруентных многогранника с комбинаторной схемой, как у многогранника Штеффена, удалим у каждого из них по одной грани и склеим их по образовавшимся краям (конечно, подобрав соответствующие по размерам грани). Для полученной комбинаторной схемы очевидным образом существуют реализации в виде многогранников с точными комбинаторными параметрами $p = 0, 1, 2$. Повторив аналогичные построения, мы можем получить комбинаторную схему с параметром изгибаемости, не меньшим какого угодно заранее заданного числа p_0. Но здесь возникает новый очень трудный вопрос. Очевидно, все полученные таким образом многогранники обладают тем свойством, что их изгибания состоят из независимых между собой изгибаний каждого склеиваемого многогранника. Вопрос: как для любого данного $p > 1$ построить комбинаторно p-параметрические в точном смысле многогранники, у которых каждое однопараметрическое изгибание «действует» на всем многограннике в том смысле, что нет цикла (или системы циклов), отсекающего от многогранника связную часть, имеющую хотя бы одну внутреннюю, т. е. не принадлежащую линии разреза, вершину и неподвижную, с точностью до движения при рассматриваемом изгибании?

7. Введем теперь понятие комбинаторной p-параметричности в алгоритмическом смысле, усиливающее определение 6 и доступное практической проверке.

Пусть нам даны две точки M и N с опорой на один и тот же невырожденный треугольник T. Тогда мы можем вычислить расстояние между M и

N с не более чем двумя возможными их значениями в зависимости от расположения точек M и N по отношению к плоскости треугольника T (квадраты этих расстояний являются корнями уравнения $\Gamma(M, N, p_1, p_2, p_3) = 0$, где p_1, p_2, p_3 — вершины опорного треугольника T); соответствующие формулы даны в [11]). По-другому эту ситуацию можно описать так: для пяти точек известны 9 расстояний между ними, тогда 10-е расстояние вычисляется и может иметь одно или два значения. Если расстояние между какими-нибудь двумя точками найдено по этому способу, то будем говорить, что расстояние найдено по *стандартному алгоритму с базой.*

Такой способ вычисления расстояний позволяет предложить в определенных случаях некоторый алгоритм для вычисления неизвестных диагоналей в многогранниках. Действительно, предположим, что мы имеем многогранник $P(K)$ в общем положении и нам известны длины некоторых диагоналей. Попытаемся вычислить все возможные диагонали. Если найдутся 5 вершин, между которыми известны только 9 расстояний из 10, то мы можем вычислить недостающее расстояние и расширить множество известных длин диагоналей. Если на каждом шаге мы будем иметь в наличии такие 5 вершин, то в итоге сможем вычислить все возможные длины диагоналей. Но в силу неоднозначности вычислений мы, вообще говоря, найдем некоторое дискретное множество возможных положений многогранника $P(K)$ при наших исходных данных, но этого хватит для установления неизгибаемости. Осталось заметить, что в случае общего положения описанная процедура имеет исключительно комбинаторный характер.

Действительно, обозначим через Δ_0 множество диагоналей $\{(k_1, m_1), \dots, (k_p, m_p)\}$, длины которых считаются изначально известными. Теперь предположим, что мы имеем на r-м шаге некоторое множество диагоналей Δ_r, и построим множество $\Delta_{r+1} \supseteq \Delta_r$. Для этого переберем все возможные пятерки вершин из K. Если для рассматриваемых пяти вершин (i, j, k, m, s) из десяти возможных пар девять принадлежат множеству $\Delta_r \cup E$, то включим 10-ю пару в Δ_{r+1}.

Используем это наблюдение как мотивацию для следующего определения.

Определение 8. Назовем многогранник $P : K \to \mathbb{R}^3$ *алгоритмически p-параметрическим*, если найдется множество $\Delta_0 = \{(k_1, m_1), \dots, (k_p, m_p)\}$ из p диагоналей многогранника такое, что остальные диагонали могут быть вычислены по стандартному алгоритму с базой.

Выпуклые многогранники являются комбинаторно 0-параметрическими в смысле определений 5 и 6, однако они, вообще говоря, не являются алгоритмически 0-параметрическими, как мы это увидим ниже в п. 8. Это значит, что не для всякого выпуклого многогранника можно вычислить его диагонали по стандартному алгоритму с базой, хотя он и определен однозначно своей метрикой.

Пример 5. Все подвески алгоритмически 1-параметрические. В качестве Δ_0 достаточно взять диагональ, соединяющую полюса.

8. В этом пункте мы опишем все гомеоморфные сфере алгоритмические 0-параметрические многогранники. В работе [12] были введены так называемые 3-разложимые многогранники, которые имеют следующее комбинаторное строение (см. рис. 3). У всякого такого многогранника P есть вершина степени 3 (на самом деле вершин степени 3 по крайней мере две — это теорема).

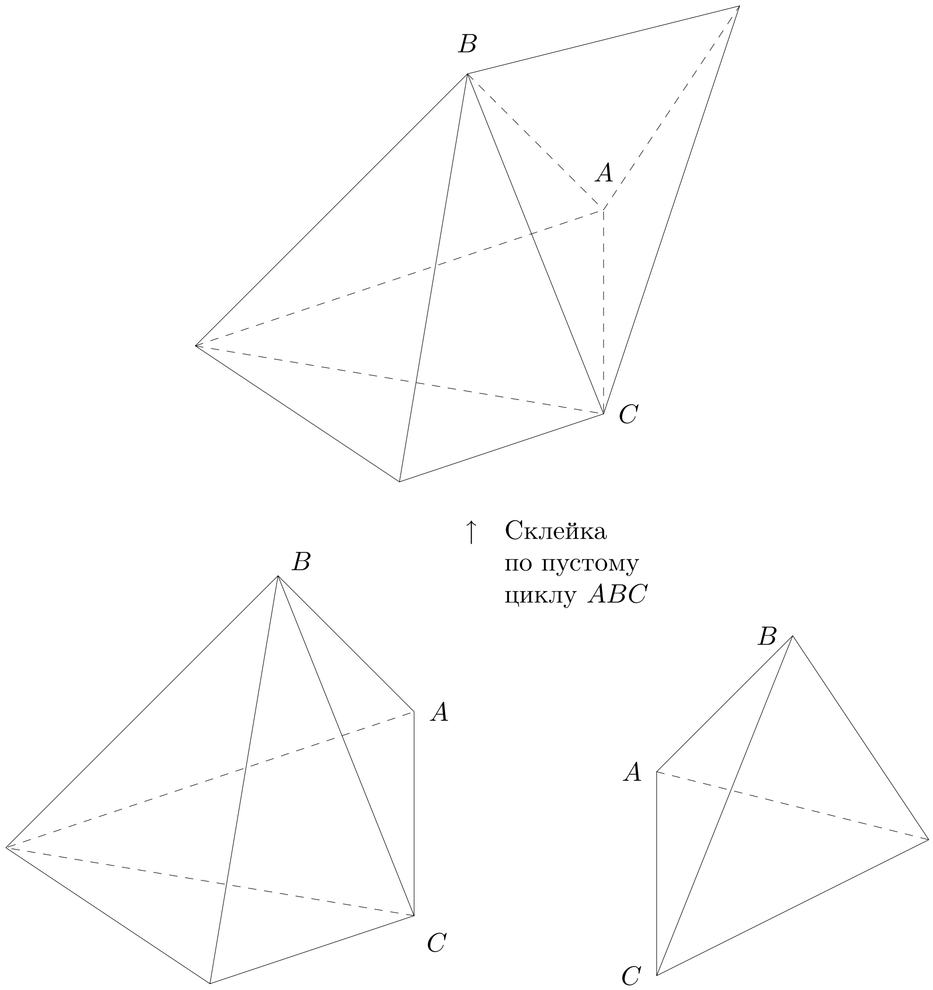

Рис. 3. Пример построения 3-разложимого многогранника.

Уберем открытую звезду этой вершины, состоящую из трех граней, закроем образовавшийся край новой треугольной гранью и получим новый многогранник P_1, у которого число вершин на 1 меньше, чем у исходного многогранника P. Этот многогранник P_1 тоже должен иметь вершину степени 3, с которой мы можем повторить операцию удаления звезды и получения нового многогранника P_2 с таким же свойством наличия вершины степени 3 и т. д. В итоге возможно повторение $n-4$ операций удаления вершин и заклеивания границы вплоть до получения некоторого тетраэдра. Обратный процесс дает нам правило построения любого 3-разложимого многогранника: надо взять произвольный тетраэдр T_1, удалить у него одну открытую грань и закрыть образовавшийся треугольный край γ_1 тремя «боковыми» гранями некоторого тетраэдра с тем же основанием γ_1, а затем повторить такую же операцию с какой-нибудь гранью полученного многогранника T_2 и т. д. После $k \geq 1$ шагов придем к 3-разложимому многограннику с $n = k + 4$ вершинами.

Если такой симплициальный комплекс реализован в $\mathbb{R}^3$ в виде выпуклого многогранника, то соответствующий выпуклый телесный многогранник P_0 можно представить как объединение телесных тетраэдров, полученных последовательным их отсечением от P_0 плоскостями, проходящими через основания трехгранных углов при вершинах степени 3.

Теперь мы докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Для того чтобы гомеоморфный сфере многогранник P был комбинаторно 0-параметрическим в алгоритмическом смысле, необходимо и достаточно, чтобы он был 3-разложимым.*

Достаточность условия доказывается просто. Пусть данный многогранник P является 3-разложимым и имеет $n \geq 6$ вершин (случай $n = 5$ очевиден), и пусть $\langle p_1, p_2, p_3, p_4 \rangle$ — исходный тетраэдр T_1, из которого P получен последовательным добавлением $n - 4$ новых тетраэдров. Пусть, кроме того, первый тетраэдр добавлен вместо удаленной грани $\langle p_2, p_3, p_4 \rangle$ и имеет новую вершину p_5. В полученном многограннике есть только одна диагональ (p_1, p_5), и ее длина вычисляется по стандартному алгоритму с опорой на базовый треугольник $\langle p_2, p_3, p_4 \rangle$. Дальше сделаем индукционное предположение, что после $k < n-4$ шагов получается 0-параметрический многогранник с $k+4$ вершинами. Добавим новый тетраэдр с опорой на некоторый треугольник $\langle a, b, c \rangle$ и с новой вершиной A. У нового многогранника неизвестны только диагонали между A и остальными «старыми» вершинами, кроме вершин a, b и c. Но все эти диагонали тоже можно вычислить по стандартному алгоритму, так как для каждой из них есть базовый треугольник $\langle a, b, c \rangle$. Следовательно, при увеличении числа вершин наше построение снова приводит к 0-параметрическому многограннику, что и требовалось показать.

Доказательство необходимости условия требует более кропотливых рассуждений. Начнем со следующих очевидных лемм.

Лемма 1. *Внутренняя точка (если она есть) выпуклой оболочки Q_0 любого подмножества Q вершин выпуклого многогранного тела P_0 является внутренней точкой тела P_0. Внутренняя точка грани Q_0 является внутренней точкой тела P_0 или внутренней точкой некоторой его грани. Внутренняя точка ребра Q_0 является для P_0 либо его внутренней точкой, либо внутренней точкой его грани или ребра.*

Лемма 2. *Если в Q есть две вершины, соединенные ребром многогранника P, то отрезок $\langle AB \rangle$ является ребром и в Q_0.*

Следующая лемма является более сложной.

Лемма 3. *В многограннике P топологического рода 0 не может быть двух вершин, соединенных ребрами со всеми вершинами некоторой грани.*

Доказательство. Допустим обратное: есть две вершины A и B, соединенные ребрами с вершинами p_1, p_2, p_3 некоторой грани Γ. Так как лемма на самом деле комбинаторная, то можем представлять себе P как выпуклый многогранник, что возможно по известной теореме Штейница. Тогда A и B лежат по одну сторону от плоскости Π грани Γ. Пусть для наглядности рассуждений плоскость Π является горизонтальной, а точки A и B расположены выше. Рассмотрим выпуклую оболочку Q_0 пяти вершин A, B, p_1, p_2, p_3. В силу леммы 2 в Q_0 есть по крайней мере 9 ребер $(A, p_1), \ldots, (B, p_3), (p_1, p_2), (p_1, p_3), (p_2, p_3)$. Отрезок (A, B) входит в Q_0, но не может быть его ребром, так как не существует выпуклого многогранника с сетью ребер в виде полного графа K_5. С другой стороны, отрезок AB обязан быть ребром. Действительно, или через A, или через B проходит плоскость, опорная к Q_0 и параллельная к плоскости Π. Скажем, опорной является плоскость Π_A, проходящая через A. Если эта же плоскость проходит через вершину B, то отрезок (A, B) является ребром. Пусть вершина B расположена ниже Π_A. Рассмотрим тетраэдр $T = \langle A, p_1, p_2, p_3 \rangle$. Точка B не может принадлежать этому тетраэдру, так как в противном случае имеем $Q_0 = T$ и по лемме 1 окажется, что вершина B является в P внутренней точкой либо самого тела P, либо какой-нибудь его грани или ребра, что невозможно. Следовательно, B находится вне этого тетраэдра, и поэтому через точки A и B пройдет опорная к Q_0 плоскость и отрезок (A, B) снова обязан быть ребром Q_0. Значит, имеем требуемое противоречие.

Замечание 5. В соответствии с нашей договоренностью мы неявно предполагали, что грани многогранника P являются треугольными. На самом деле лемма 3 верна и без предположения треугольности граней, так как можно показать, что в выпуклой оболочке Q_0 вершин A и B и их базовой грани Γ по крайней мере одно ребро многогранника P содержит точки, являющиеся для Q_0 внутренними, что по лемме 1 невозможно[3].

Приступим теперь к доказательству необходимости. Так как в P по условию длины всех диагоналей вычислимы с опорой на базовые треугольники, существует первая диагональ, вычисляемая с опорой на некоторый базовый треугольник γ, все стороны которого являются ребрами данного многогранника. Следовательно, существуют две вершины A и B, не инцидентные одному ребру и соединенные ребрами со всеми тремя вершинами треугольника γ. По лемме 3 этот треугольник не может быть гранью. Значит, в P есть по крайней мере один пустой 3-цикл. Когда мы режем P по пустому циклу, многогранник распадается на два открытых многогранника P_1 и P_2, имеющих треугольный край. Пусть через P_1 обозначена та часть многогранника, в которой число вершин не больше, чем в другой его части. Выберем такой пустой цикл γ_0, чтобы после разрезания P вдоль γ_0 в P_1 осталось наименьшее возможное количество вершин (если таких циклов несколько, то выберем произвольным образом один из них). Пусть a, b, c — вершины цикла γ_0. Пусть образы этих вершин в замыканиях P_1 и P_2 обозначены соответственно как a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2. Заклеим края $\langle a_1, b_1, c_1 \rangle$ и $\langle a_2, b_2, c_2 \rangle$ замыканий соответственно P_1 и P_2 треугольниками и полученные таким образом замкнутые многогранники обозначим как P_1' и P_2'. В многограннике P_1' нет ни одного пустого 3-цикла, в противном случае этот цикл был бы и в P и от P можно было бы отрезать часть с меньшим числом вершин, чем в P_1. Покажем, что P_1' является на самом деле тетраэдром. Пусть это не так. Тогда в P_1' кроме вершин a_1, b_1, c_1 должны быть еще по крайней мере две вершины, принадлежащие P_1, и хотя бы одна диагональ. Представим себе, что мы приступили к последовательному вычислению в P диагоналей по какому-то существующему по условию теоремы алгоритму Al. Если по этому алгоритму первая вычисляемая диагональ в P_1' (не забудем, что *любая* диаго-

[3]Когда эта статья уже была готова, С. А. Лавренченко указал очень короткое и чисто комбинаторное доказательство леммы 3: надо взять внутри грани Γ некоторую точку q и соединить ее с вершинами треугольника Γ; тогда точки A, B, q и p_1, p_2, p_3 и соединяющие эти тройки ребра составят вложенный в сферу двудольный граф $K_{3,3}$, что невозможно. Этот же подход дает и доказательство замечания. Мы признательны С. А. Лавренченко за его внимание к нашей работе.

наль в P_1' является одновременно диагональю и в P, так как вершины a_1, b_1, c_1 из P_1' на самом деле совпадают с вершинами a, b, c из P) определяется с опорой на 3-цикл γ_0, то тогда окажется, что в самом многограннике P_1' мы можем вычислить диагональ с опорой на грань $\langle a_1, b_1, c_1\rangle$, что по лемме 3 невозможно. А так как в P нет ни одного пустого 3-цикла со всеми вершинами из P_1', то для той диагонали из P_1', которая вычисляется *первой* (не вообще первой в P, а именно среди диагоналей в P_1') по ходу выполнения алгоритма Al, надо будет использовать опору на базовый треугольник, имеющий по крайней мере одну вершину в P_2. Пусть это будет вершина p, и пусть первая вычисляемая в P_1' диагональ имеет вершины M и N. Поскольку пары $(a_1, b_1), (a_1, c_1)$ и (b_1, c_1) являются ребрами, у этой диагонали хотя бы одна вершина принадлежит P_1. Пусть это будет вершина M. Тогда нам для вычисления диагонали (M, N) нужно предварительно знать длину отрезка (p, M). Так как $M \in P_1$, $p \in P_2$, а P_1 и P_2 разделены циклом γ_0, то M и p не могут быть соединены ребром, поэтому (p, M) — диагональ в P. Значит, прежде чем вычислять первую диагональ в P_1', нам по алгоритму Al предварительно нужно было вычислить хотя бы одну диагональ в P, у которой одна вершина находится в P_1, а другая — в P_2. Пусть (q, A), где $q \in P_2$, $A \in P_1$, вообще первая такая диагональ (она вовсе не обязана совпадать с (p, M)). По ее определению в базовом для нее треугольнике не может быть ни одной вершины ни из P_1, ни из P_2. Следовательно, базовым треугольником может быть только цикл $\gamma_0 = \langle a, b, c\rangle$. Но ни один из отрезков $(a, A), (b, A), (c, A)$ не может быть диагональю в P_1', так как пока ни одна диагональ в P_1' не найдена. Значит, все эти отрезки — ребра, которые в P_1' имеют обозначения $(a_1, A), (b_1, A), (c_1, A)$. Но тогда все циклы $\langle A, a_1, b_1\rangle$, $\langle A, a_1, c_1\rangle$, $\langle a, b_1, c_1\rangle$ должны быть границами граней, иначе хотя бы один из них был бы пустым циклом, что по построению P_1' невозможно. Следовательно, P_1' на самом деле является тетраэдром $\langle A, a_1, b_1, c_1\rangle$.

Итак, P_1' — тетраэдр, а A — его единственная вершина, не принадлежащая замыканию P_2. Теперь докажем следующую лемму.

Лемма 4. *Все диагонали в P_2' можно вычислить, не обращаясь ни к какому базовому треугольнику, имеющему вершину в A.*

Доказательство. Допустим, по рассматриваемому алгоритму Al для вычисления какой-то диагонали (r, s) в P_2' нам в первый раз пришлось использовать опору на некоторый базовый треугольник, одной из вершин которой является A. Покажем, что на самом деле мы можем найти другой опорный треугольник, все вершины которого будут из P_2'. Действительно, расположим все диагонали вида (A, p), $p \in P_2$, в последовательность $(p_1, A), (p_2, A), \ldots, (p_k, A)$, $p_i \in P_2$, $1 \le i \le k$, в соответствии с порядком их вычисления в данном алгоритме Al нахождения диагоналей в P. Выше мы установили, что первая такая диагональ (A, p) вычисляется с опорой на треугольник $\langle a, b, c\rangle$, который дальше будем обозначать через T_0. Следовательно, $p_1 = p$. Пусть p_2 — вершина в P_2 второй вычисляемой диагонали. Значит, A и p_2 должны иметь какой-то общий базовый треугольник T. Так как от A пока известно только одно расстояние до вершин из P_2, то в T должны быть по крайней мере две вершины из треугольника T_0. Если T совпадает с T_0, то получается, что к моменту вычисления диагонали (A, p_2) уже известны расстояния от p_2 до вершин a, b, c. Поскольку известны и расстояния от p_1 до них же, мы можем вычислить длину отрезка (p_1, p_2) (если она не была известна как длина ребра или вычисленная раньше диагональ), не обращаясь к вершине A. Если же треугольник T содержит две вершины из числа a, b, c, скажем a и b, то третьей его вершиной обязана быть p_1; значит, к этому моменту расстояние между p_1 и p_2 уже известно. А в таком случае мы можем вычислить расстояние между p_2 и третьей вершиной c треугольника T_0, так как для них есть опорный треугольник (a, b, p_1). В обоих случаях получаем, что мы *или можем вычислить, или нам уже известны по рассматриваемому алгоритму расстояния между p_1 и p_2 и между p_i, $i = 1, 2$, и вершинами треугольника T_0, причем все это без использования вершины A.*

Теперь покажем по индукции, что это наблюдение верно и для остальных вершин в последовательности $(A, p_1), \dots, (A, p_k)$. Пусть для всех вершин $p_1, \dots, p_{k-1}$ все расстояния между ними и от них до вершин (a, b, c) вычислены без обращения к вершине A. Пусть также вычисляется диагональ (A, p_k), и пусть T_0 является базовым треугольником. Это значит, что известны расстояния от p_k до всех вершин a, b, c. Эти расстояния вычислены без обращения к вершине A, так как если предположить, что базовый треугольник для вычисления, например, диагонали (a, p_k) имеет вершину в A, то окажется, что диагональ (A, p_k) уже должна быть известна, а мы ее только вычисляем. По индукционному предположению, от каждой вершины p_i, $i < k$, также известны все расстояния до вершин a, b, c, поэтому мы можем найти расстояния от p_k до всех предыдущих вершин p_i, $i < k$. В этом случае индукция получена. Пусть теперь базовый треугольник T для диагонали (A, p_k) содержит две вершины из T_0, скажем a и b, и некоторую вершину p_i, $i < k$. Это предполагает, что расстояние между p_k и p_i уже известно и оно не могло быть найдено с использованием точки A, так как длина диагонали (A, p_k) еще не известна. Кроме того, должны быть известны расстояния между p_k и вершинами a и b. А так как по индукционному предположению расстояния от p_i до всех вершин a, b, c известны, мы можем найти и длину (c, p_k) (с опорой на треугольник $\langle a, b, p_i \rangle$). И в этом случае индукционный переход обоснован. Аналогично рассматривается случай, когда базовый треугольник T содержит только одну вершину из T_0. Наконец, рассмотрим последний случай, когда T не содержит ни одной вершины из T_0. Тогда его вершинами являются некоторые вершины p_i, p_j, p_m, $i < j < m < k$. Расстояния от p_k до этих вершин уже должны быть известны по определению базового треугольника. Расстояния же от p_k до вершины, например a, треугольника T_0, определяется с опорой на треугольник (p_i, p_j, p_m), так как все необходимые расстояния уже известны. Тем самым индукционный переход обоснован во всех случаях.

Завершим доказательство леммы. Пусть длина некоторой диагонали (r, s), у которой обе вершины r и s принадлежат P_2', вычисляется по алгоритму Al в первый раз с опорой на некоторый треугольник с вершиной в A. Значит, используются диагонали (r, A) и (s, A). Очевидно, что обе вершины r и s не могут принадлежать множеству (a, b, c); положим, например, $r \in T_0$, $s \in P_2$. Пусть диагональ (s, A) совпадает с какой-нибудь диагональю (p_j, A) из указанной выше последовательности диагоналей $(p_1, A), \dots (p_k, A)$. Тогда по доказанному выше без участия A можно найти расстояния от s до всех вершин a, b, c, т. е. в том числе и до r. Если же и r, и s из P_2, то снова по доказанному выше известны их расстояния до вершин треугольника T_0 и поэтому мы можем найти расстояние между ними с опорой на T_0, т. е. не обращаясь к A. Лемма доказана.

Теперь теорема доказывается индукцией по числу вершин. Многогранник с четырьмя вершинами является четырехугольной пирамидой с триангулированным основанием, и для него теорема верна. Если рассматривается 0-параметрический многогранник с n вершинами, то по доказанному выше из него отсекается тетраэдр, а оставшийся многогранник P_2' с $n-1$ вершинами по лемме 4 тоже является 0-параметрическим и поэтому распадается на тетраэдры. Теорема доказана.

Оказывается, класс алгоритмически 1-параметрических многогранников типа сферы тоже допускает достаточно простое описание с явной схемой вычисления диагоналей и объема, а также с алгоритмами проверки изгибаемости и неизгибаемости. Этим вопросам будет посвящена отдельная статья.

Но в топологически более сложных случаях вопрос об описании алгоритмически p-параметрических многогранников даже при $p = 0$ остается пока открытым.

Авторы благодарят рецензента за его многочисленные замечания как редакционно-технического, так и содержательного характера.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Legendre A.* Eléments de géométrie. Paris, 1806.

2. *Bricard R.* Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé // J. Math. Pures Appl. 1897. V. 5, N 3. P. 113–148.

3. *Сабитов И. Х.* Обобщенная формула Герона — Тарталья и некоторые ее следствия // Мат. сб. 1998. Т. 189, № 10. С. 105–134.

4. *Maksimov I. G., Sabitov I. Kh.* On the definition of combinatorially p-parametric polyhedra // Междунар. конф. «Геометрия и приложения»: Тез. докл. Новосибирск, март 2000. С. 62–64.

5. *Gluck H.* Almost all simply connected closed surfaces are rigid // Lecture Notes in Math. 1975. V. 438. P. 225–240.

6. *Сабитов И. Х.* Новые классы неизгибаемых многогранников // Всесоюз. конф. по геометрии и анализу: Тез. докл. Новосибирск, 1989. С. 72.

7. *Сабитов И. Х.* Алгоритмическое решение проблемы изометрической реализации двумерных многогранных метрик // Изв. РАН. Сер. мат. 2002. Т. 66, № 2. С. 159–172.

8. *Берже М.* Геометрия. М.: Мир, 1984. Т. 1.

9. *Blumenthal L. M.* Theory and Applications of Distance Geometry. New York: Chelsea, 1970.

10. *Сабитов И. Х.* Алгоритмы проверки изгибаемости многогранников // Комплексный анализ, дифференциальные уравнения, численные методы и приложения. VI. Численные методы: Тр. конф. в честь 25-летия Ин-та математики с ВЦ Уфимского научного центра РАН. Уфа: ИМВЦ УНЦ РАН, 1996. с. 156–166.

11. *Сабитов И. Х.* Алгоритмическая проверка изгибаемости подвесок // Укр. геометрический сб. 1987. Т. 30. С. 109–111.

12. *Lawrenchenko S., Negami S., Sabitov I. Kh.* A simpler construction of volume polynomials for a polyhedron // Beitr. Algebra Geom. 2002. V. 43, N 1. P. 261–273.

Статья поступила 4 мая 2002 г.

Максимов Игорь Гаврилович, Сабитов Иджад Хакович,
Московский гос. университет, механико-математический факультет,
119992 ГСП-2, Москва, Ленинские горы
`oblim@comail.ru, isabitov@mail.ru`