Сибирский математический журнал
Июль—август, 2002. Том 43, № 4

УДК 519.21

О НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ МОМЕНТОВ И ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЛЕСТНИЧНОЙ ВЫСОТЫ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ

В. И. Лотов

Аннотация: Получены оценки сверху для «хвоста» функции распределения первой неотрицательной суммы случайного блуждания и для моментов величины первого перескока через произвольный неотрицательный уровень в условиях, когда математическое ожидание скачков положительно и близко к нулю. Найдена оценка для математического ожидания времени первого прохождения нулевого уровня.

Ключевые слова: лестничный момент, лестничная высота, случайное блуждание с малым сносом

Пусть $\{\xi_n\}$, $n \geq 1$, — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, распределение которых зависит от параметра $m > 0$ так, что $\mathbf{E}\xi_1 = m$. Обозначим $F(x) = \mathbf{P}(\xi_1 < x)$, $G(x) = 1 - F(x)$, $S_0 = 0$, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $n \geq 1$. Для краткости аргумент m в обозначениях случайных величин и функций распределения опускается. Введем лестничные моменты

$$\eta_- = \inf\{n \geq 1 : S_n < 0\}, \quad \eta_+ = \inf\{n \geq 1 : S_n \geq 0\}$$

(здесь полагаем $\eta_+ = \infty$, если $S_n < 0$ при всех n, и $\eta_- = \infty$, если все $S_n \geq 0$) и лестничные высоты $\chi_\pm = S_{\eta_\pm}$. На событии $\{\eta_- = \infty\}$ величину χ_- будем считать неопределенной. Пусть также $T = \inf(S_0, S_1, \ldots)$, $q = \mathbf{P}(\eta_- < \infty) = \mathbf{P}(T < 0)$. Для вероятности $U(x) = \mathbf{P}(\chi_+ \geq x)$ известны неравенства (см. [1; 2, с. 163])

$$G(x) \leq U(x) \leq rG(x), \quad x > 0, \tag{1}$$

где $r = (1 - q)^{-1} = \mathbf{E}\eta_+$. Первое из этих неравенств очевидно, второе может быть установлено, например, с помощью факторизационных тождеств (см. соотношение (4) ниже). Явные выражения для функции $U(x)$, как правило, недоступны, поэтому оценки такого вида весьма полезны при решении различного рода граничных задач для случайных блужданий и в ряде их приложений, например в исследовании систем обслуживания [2]. Нас будет интересовать ситуация, когда число m мало́. Применительно к моделям систем обслуживания это во многих случаях соответствует условию большой нагрузки. Ясно, что при уменьшении числа m множитель r в (1) может стать как угодно большим ($q = 1$ при $\mathbf{E}\xi_1 = 0$). Мы говорим «может стать», потому что малость числа m еще не гарантирует близость числа q к единице. Достаточно рассмотреть случайное

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 00–15–96178, 02–01–00358), а также INTAS (код проекта 00–265).

блуждание, построенное по последовательности вида $\xi_n = m\zeta_n$, где распределение ζ_n не зависит от m и $\mathbf{E}\zeta_n = 1$, чтобы убедиться, что число q не зависит от m в этом случае.

В то же время, воспользовавшись тождеством Вальда и (1), получим

$$r = \mathbf{E}\eta_+ = \frac{\mathbf{E}\chi_+}{m} = \frac{1}{m}\int_0^\infty U(x)\,dx \geq \frac{\mathbf{E}\xi_1^+}{m}, \tag{2}$$

где $\xi_1^+ = \max(0, \xi_1)$. Ясно, что в широких условиях на зависимость G от m правая часть (2) неограниченно растет при $m \to 0$. Зависимость величины r от m можно также наблюдать в тех случаях, когда r допускает вычисление в явном виде. Если при $x > 0$

$$\mathbf{P}(\xi_1 \geq x) = be^{-\beta x}, \quad \beta > 0,\ 1 > b > 0,$$

то (см. [3, гл. 11]) $U(x) = e^{-\beta x}$, $x > 0$, и в силу тождества Вальда $r = \mathbf{E}\eta_+ = (\beta m)^{-1}$.

Заметим, что сходимость $r \to \infty$ при $m \to 0$ не означает то или иное «вырождение» функции $U(x)$. Например, если при $m \to 0$ распределение F слабо сходится к распределению с нулевым средним, то в широких условиях $1 - U(x)$ будет слабо сходиться к функции распределения лестничной высоты, построенной по блужданию с нулевым сносом. Соответствующая теорема непрерывности содержится в [4]. Некоторые оценки для функции $U(x)$ при нулевом сносе случайного блуждания можно найти в [1], точные формулы здесь также недоступны в большинстве случаев. Сравнительно более полно исследован вопрос о предельном поведении при $m \to 0$ распределения инфимума траектории T (или случайной величины $S = \sup\{S_0, S_1, \dots\}$ при $\mathbf{E}\xi_1 < 0$), а также минимума (максимума) траектории за n шагов, см. по этому поводу [2, 5–7]. Ниже приводится соотношение (4), которое при известной асимптотике распределения случайной величины T может служить инструментом для асимптотического анализа $U(x)$ при $m \to 0$.

Таким образом, приведенная оценка сверху (1) для $U(x)$ может оказаться малополезной при малых m. Возникает необходимость поиска другой оценки для $U(x)$, действующей равномерно по всем $m > 0$. В этом состоит одна из целей заметки.

Как уже отмечалось, $r = \mathbf{E}\eta_+$, поэтому изучение данной величины имеет самостоятельный интерес. В качестве следствия из доказанной ниже оценки для $U(x)$ мы получим оценку вида $r \leq Cm^{1/(1-\alpha)}$ при $\mathbf{E}(\xi_1^+)^\alpha < \infty$, $1 < \alpha \leq 2$, где C — константа. Кроме того, мы получим оценки для моментов случайных величин χ_+ и $\chi_+(u) = S_{\eta_+(u)}$, где $\eta_+(u) = \min\{n \geq 1 : S_n \geq u\}$.

Теорема 1. *Пусть существуют не зависящие от m числа $\delta > 0$ и $l > 0$ такие, что $\mathbf{P}(\xi_1 \leq -l) \geq \delta$ при всех $m > 0$. Тогда для любого $x > 0$*

$$U(x) \leq \frac{1}{\delta}G(x) + \frac{1}{\delta l}\int_x^{x+l(\delta r-1)} G(t)\,dt \leq \frac{1}{\delta}G(x) + \frac{1}{\delta l}\int_x^\infty G(t)\,dt. \tag{3}$$

Доказательство. Обозначим $V(y) = \mathbf{P}(T > y)$. Для $x > 0$ имеет место соотношение

$$(1-q)U(x) = \int_x^\infty V(x-t)\,dF(t) \tag{4}$$

(см., например, вывод формулы (34) в [2, с. 165]). Оценка сверху для $U(x)$ в (1) получается, если заменить $V(x-t)$ на 1 в (4). Мы применим здесь другую оценку для $V(x-t)$. Хорошо известно, что значение инфимума траектории можно получить, суммируя отрицательные лестничные высоты; при этом число слагаемых есть случайная величина, имеющая геометрическое распределение с параметром q:

$$V(y) = (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^n (1 - G_n(y)).$$

Здесь $G_n(y)$ — n-кратная свертка функции распределения

$$G_1(y) = \mathbf{P}(\chi_- \le y / \eta_- < \infty).$$

Отсюда получаем

$$V(y) \le \min\left(1, (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} (1 - G_n(y))\right). \tag{5}$$

Обозначим через μ_δ квантиль порядка δ функции распределения $G_1(y)$. В силу условия теоремы

$$\begin{aligned}\delta \le \mathbf{P}(\xi_1 \le -l) \le \mathbf{P}(\chi_- &\le -l, \eta_- < \infty)\\ &= q\mathbf{P}(\chi_- \le -l/\eta_- < \infty) \le \mathbf{P}(\chi_- \le -l/\eta_- < \infty),\end{aligned}$$

что влечет неравенство $\mu_\delta \le -l$. Далее воспользуемся известной оценкой для функции восстановления [2, приложение 1], предварительно перейдя от G_1 к распределению, сосредоточенному на неотрицательной полуоси (при этом квантиль порядка δ перейдет в квантиль порядка $1-\delta$). В итоге получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - G_n(y)) \le \frac{1}{\delta} + \frac{|y|}{\delta |\mu_\delta|} \le \frac{1}{\delta} + \frac{|y|}{\delta l}.$$

Эта оценка вместе с (5) и (4) приводит к неравенству

$$\begin{aligned}U(x) &\le \int_x^{\infty} \min\left(\frac{1}{1-q}, \frac{1}{\delta} + \frac{t-x}{\delta l}\right) dF(t)\\ &= \int_{x+l(\delta r-1)}^{\infty} \frac{1}{1-q}\, dF(t) + \frac{1}{\delta} \int_x^{x+l(\delta r-1)} \left(1 + \frac{t-x}{l}\right) dF(t)\\ &= \frac{1}{\delta} G(x) + \frac{1}{\delta l} \int_x^{x+l(\delta r-1)} G(t)\, dt.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Таким образом,

$$U(x) \le \min(rG(x), D(x)),$$

где $D(x)$ обозначает правую часть неравенства (3). Заметим, что близкую к (3) оценку при $\mathbf{E}\xi_1 = 0$ можно найти в [1].

Нетрудно видеть, что приведенное в теореме условие на распределение ξ_1 выполняется для широкого класса распределений, включающего, к примеру, функции распределения вида $F(x+m)$ при малых m, где функция F от m не зависит и $F(0) > 0$.

Следствие 1. *Пусть для $x > 0$, $\alpha > 1$*

$$G(x) \le \frac{C}{x^\alpha}.$$

Тогда в условиях теоремы 1

$$U(x) \le \frac{C}{\delta x^\alpha} + \frac{C\alpha A}{\delta l(\alpha-1)x^{\alpha-1}(x+A)},$$

где $A = l(\delta r - 1)$.

Доказательство следует из (3) и оценки

$$\int\limits_x^{x+A} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}\left(1 - \left(\frac{x}{x+A}\right)^{\alpha-1}\right) \le \frac{\min(1,\alpha-1)A}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}(x+A)}.$$

Далее займемся нахождением оценок сверху для числа r и моментов случайной величины χ_+. Обозначим $h_m(\alpha) = \mathbf{E}(\xi_1^+)^\alpha$ и будем предполагать, что в случае существования этот момент ограничен равномерно по m некоторым числом $K = K(\alpha)$.

Воспользовавшись первым из неравенств (3), получаем

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и* $h_m(\alpha) < \infty$ *при некотором* $\alpha \ge 1$. *Тогда для любого* $0 < \beta \le \alpha$

$$\mathbf{E}\chi_+^\beta \le \frac{h_m(\beta)}{\delta} + \frac{1}{\delta l}\left(\int\limits_0^A t^\beta G(t)\,dt + \beta A \int\limits_A^\infty t^{\beta-1}G(t)\,dt\right). \tag{6}$$

Доказательство. Имеем

$$\mathbf{E}\chi_+^\beta = \beta\int\limits_0^\infty x^{\beta-1}U(x)\,dx \le \beta\int\limits_0^\infty x^{\beta-1}\left(\frac{1}{\delta}G(x) + \frac{1}{\delta l}\int\limits_x^{x+A} G(t)\,dt\right)dx$$

$$= \frac{h_m(\beta)}{\delta} + \frac{1}{\delta l}\left(\int\limits_0^A t^\beta G(t)\,dt + \int\limits_A^\infty (t^\beta - (t-A)^\beta)G(t)\,dt\right),$$

и остается воспользоваться неравенством

$$t^\beta - (t-A)^\beta = t^\beta\left(1 - \left(1 - \frac{A}{t}\right)^\beta\right) \le \beta A t^{\beta-1}, \quad t \ge A.$$

Утверждение доказано.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и* $h_m(\alpha) \le K < \infty$ *для некоторого* $\alpha > 1$. *Тогда существует постоянная* $C_1 = C_1(l, \delta, \alpha, K)$ *такая, что*

$$r = \mathbf{E}\eta_+ \le \frac{C_1}{m^\gamma}, \tag{7}$$

где $\gamma = \max\bigl(1, \frac{1}{\alpha-1}\bigr)$.

Доказательство. Воспользовавшись вторым из неравенств (3), получим оценку

$$\mathbf{E}\chi_+^\beta \le \frac{h_m(\beta)}{\delta} + \frac{h_m(\beta+1)}{\delta l(\beta+1)}, \quad \beta + 1 \le \alpha. \tag{8}$$

Если $\alpha \geq 2$, то можно положить $\beta = 1$ в (8) и применить тождество Вальда:

$$\mathbf{E}\chi_+ = rm \leq \frac{h_m(1)}{\delta} + \frac{h_m(2)}{2\delta l} \leq C_1 = \frac{(K+1)(2l+1)}{2l\delta},$$

что доказывает (7) для случая $\alpha \geq 2$.

Пусть, далее, $\alpha \in (1, 2)$. В силу неравенства Чебышева

$$G(t) \leq \frac{h_m(\alpha)}{t^\alpha}, \quad t > 0,$$

поэтому мы можем продолжить оценивание в (6). Не уменьшая общности, будем считать в дальнейшем, что $A \geq 1$ и $r \geq 1$. Имеем при $\alpha - 1 < \beta < \alpha$

$$\int_0^A t^\beta G(t)\,dt \leq \int_0^1 t^\beta\,dt + h_m(\alpha)\int_1^A t^{\beta-\alpha}\,dt = \frac{1}{\beta+1} + \frac{h_m(\alpha)}{\beta-\alpha+1}(A^{\beta-\alpha+1} - 1),$$

$$\int_A^\infty t^{\beta-1}G(t)\,dt \leq \frac{h_m(\alpha)}{(\alpha-\beta)}A^{\beta-\alpha}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{E}\chi_+^\beta \leq \frac{h_m(\alpha)}{\delta} + \frac{1}{\delta l}\left(\frac{1}{\beta+1} - \frac{h_m(\alpha)}{\beta-\alpha+1}\right) + \frac{h_m(\alpha)A^{\beta-\alpha+1}}{\delta l}\left(\frac{\alpha}{\alpha-\beta} + \frac{1}{\beta-\alpha+1}\right) \leq KC(\beta)r^{\beta-\alpha+1}, \quad (9)$$

где

$$C(\beta) = 2\max\left((\delta l)^{\beta-\alpha}\left(\frac{\alpha}{\alpha-\beta} + \frac{1}{\beta-\alpha+1}\right), \frac{1}{\delta} + \frac{1}{l\delta(\beta+1)}\right).$$

Полагая в этом неравенстве $\beta = 1$ и вновь применяя тождество Вальда, получим

$$\mathbf{E}\chi_+ = rm \leq KC(1)r^{2-\alpha}. \quad (10)$$

Отсюда сразу получаем

$$r \leq (KC(1))^{\frac{1}{\alpha-1}} m^{-\frac{1}{\alpha-1}} = C_1 m^{-\frac{1}{\alpha-1}}.$$

Теорема доказана.

Далее обратимся к нахождению оценок для моментов случайной величины χ_+ в условиях, когда снос случайного блуждания может быть как угодно малым.

Известное неравенство Лордена [8] дает оценку

$$\mathbf{E}\chi_+^\alpha(u) \leq \frac{\alpha+2}{\alpha+1}\frac{h_m(\alpha+1)}{m} \quad (11)$$

равномерно по всем $u \geq 0$ (здесь обозначено $\chi_+(u) = S_{\eta_+(u)}$, $\eta_+(u) = \min\{n \geq 1 : S_n \geq u\}$). В правой части этого неравенства, как мы видим, требуется существование момента случайной величины ξ_1^+ порядка, на единицу большего, чем в левой части, и, кроме того, малое число m располагается в знаменателе. А. А. Могульским [4] найдена равномерная оценка

$$\mathbf{E}\chi_+^\alpha(u) \leq C\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\frac{\mathbf{E}|X_1|^{\alpha+2}}{\mathbf{E}X_1^2},$$

где C — абсолютная константа, $C \leq 2$, $u \geq 0$, $\alpha \geq 0$, и в отличие от нашей работы допускается возможность $m = 0$. Здесь в знаменателе правой части уже нет числа m, но это достигается предположением о существовании большего числа моментов. Мы рассматриваем ситуацию, когда $u = 0$. Наша задача будет состоять в уточнении этих неравенств в условиях данной работы.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и* $h_m(\alpha) \le K < \infty$ *при некотором* $\alpha > 1$. *Тогда существует постоянная* $C = C(l, \delta, \alpha, \beta, K) > 0$ *такая, что при* $0 < \beta \le \alpha$

$$\mathbf{E}\chi_+^\beta \le \frac{C}{m^\varepsilon}, \tag{12}$$

где

$$\varepsilon = \begin{cases} \max(0, \beta - \alpha + 1), & \alpha \ge 2, \\ \max\left(0, \frac{\beta-\alpha+1}{\alpha-1}\right), & 1 < \alpha < 2. \end{cases}$$

Доказательство. Утверждение теоремы для $0 < \beta \le \alpha - 1$ следует из (8), в этом случае

$$C = \frac{K+1}{\delta}\left(1 + \frac{1}{l(\beta+1)}\right).$$

В случае $\beta = \alpha$ воспользуемся неравенством $\mathbf{E}\chi_+^\alpha \le rh_m(\alpha)$, которое вытекает из (1), и оценкой (7) для r; здесь полагаем $C = KC_1$. И, наконец, при $\alpha - 1 < \beta < \alpha$ искомая оценка следует из (9) и (7); при этом $C = KC(\beta)C_1^{\beta-\alpha+1}$. Теорема доказана.

Следствие 3. *Пусть дополнительно к условиям теоремы* 3 *существуют не зависящие от* m *положительные числа* l_1 *и* δ_1 *такие, что* $\mathbf{P}(\xi_1 \ge l_1) \ge \delta_1$ *при всех* $m > 0$. *Тогда для каждого* $u \ge 0$

$$\mathbf{E}\chi_+^\beta(u) \le \frac{C}{m^\varepsilon}\left(\frac{u}{l_1\delta_1} + \frac{1}{\delta_1}\right), \tag{13}$$

постоянные C *и* ε *те же, что и в теореме* 3.

Доказательство. Будем рассматривать последовательность неотрицательных лестничных высот. Пусть $\chi_+^{(i)}$, $i \ge 1$, — независимые случайные величины, распределенные одинаково с χ_+. Тогда для $u \ge 0$, $x \ge 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\chi_+(u) \ge x) &= \mathbf{P}\big(\chi_+^{(1)} \ge x + u\big) + \mathbf{P}\big(\chi_+^{(1)} < u, \chi_+^{(1)} + \chi_+^{(2)} \ge x + u\big) + \dots \\ &\le \mathbf{P}\big(\chi_+^{(1)} \ge x\big) + \mathbf{P}\big(\chi_+^{(1)} < u, \chi_+^{(2)} \ge x\big) + \mathbf{P}\big(\chi_+^{(1)} + \chi_+^{(2)} < u, \chi_+^{(3)} \ge x\big) + \dots \\ &= \mathbf{P}\big(\chi_+^{(1)} \ge x\big)H_1(u), \end{aligned}$$

где H_1 — функция восстановления, соответствующая случайной величине χ_+. Как и в доказательстве теоремы 1, из условий следствия выводим оценку

$$H_1(u) \le \frac{u}{l_1\delta_1} + \frac{1}{\delta_1},$$

которая и обеспечивает выполнение (13).

В завершение подчеркнем, что полученные в теоремах 1–3 оценки являются равномерными по достаточно широкому классу распределений, определяемому константами l, δ, α, β, K. Сравнивая оценку (12) с (11), можно видеть, что, во-первых, для получения равномерной оценки момента порядка β случайной величины χ_+ может использоваться момент случайной величины ξ_1^+ того же порядка или порядка, как угодно мало превышающего число β. Во-вторых, показатель степени у m в правой части (12) меньше единицы при $\beta < 2(\alpha - 1)$, если $\alpha \in (1, 2)$, и при любом $\beta < \alpha$, если $\alpha \ge 2$. Если же, как в (11), число α отличается от β на единицу или более, то полученная в теореме 3 оценка вообще не содержит степени m в знаменателе.

Автор выражает благодарность А. А. Боровкову и С. Г. Фоссу за полезные обсуждения и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рогозин Б. А.* О распределении величины первого перескока // Теория вероятностей и ее применения. 1964. Т. 9, № 3. С. 498–515.
2. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972.
3. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.
4. *Могульский А. А.* Абсолютные оценки для моментов некоторых граничных функционалов // Теория вероятностей и ее применения. 1973. Т. 18, № 2. С. 350–357.
5. *Kingman J. F. C.* On queues in heavy traffic // J. Roy. Statist. Soc. Ser. B. 1962. V. 24, N 2. P. 383–392.
6. *Прохоров Ю. В.* Переходные явления в процессах массового обслуживания. I // Литовский мат. сб. 1963. Т. 3, № 1. С. 199–205.
7. *Cohen J. W.* Random walk with a heavy-tailed jump distribution. Report PNA–R0010, CWI, Amsterdam, 2000.
8. *Lorden G.* On excess over the boundary // Ann. Math. Statist. 1970. V. 41, N 2. P. 520–527.

Статья поступила 28 ноября 2001 г.

Лотов Владимир Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
lotov@math.nsc.ru