Сибирский математический журнал
Июль—август, 2002. Том 43, № 4

УДК 517.9+532.59

НЕЛИНЕЙНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ НАД ПОДВОДНЫМ ХРЕБТОМ

Д. С. Кузнецов

Аннотация: Рассмотрена в точной постановке для идеальной несжимаемой тяжелой и безвихревой жидкости задача о бегущих вдоль подводного хребта поверхностных гравитационно-капиллярных волнах малой амплитуды. Показано, что при некоторых требованиях к форме дна и коэффициенту поверхностного натяжения существуют гладкие решения уравнений идеальной несжимаемой жидкости, периодические по переменной, направленной вдоль подводного хребта и экспоненциально убывающие с малым положительным показателем в перпендикулярном к хребту направлении.

Ключевые слова: подводный хребет, волновод, трехмерные поверхностные волны, капиллярность, задача ветвления, псевдодифференциальный оператор

Введение

Задача о волноводе поверхностных волн возникла в середине 1950-х гг. Возможность существования волновода для случая линейных поверхностных волн тяжелой жидкости была показана В. Мунком и Р. Арсэром [1]. Их исследования базировались на применении принципа геометрической оптики в акустическом приближении.

В 1957 г. М. А. Лаврентьев отметил, что вдоль подводного хребта может распространяться волна, значительно отличающаяся от той, которая распространяется над глубоководным участком бассейна; иными словами, что уравнения Эйлера идеальной несжимаемой жидкости допускают решения, периодические или близкие к ним по направлению хребта и быстро убывающие в поперечном направлении. Отчасти такое предположение следовало из наблюдений за волнами цунами: в местах выхода к побережью подводных архипелагов сила волн была особенно велика. Сунь Цао провел экспериментальное изучение влияния подводного хребта на поверхностные волны, а также выполнил некоторые расчеты [2]. Он показал количественное и качественное расхождение наблюдений с расчетами Мунка и Арсэра. Сунь Цао отмечал почти стационарное распространение волны вдоль хребта, чего не вытекало из акустической теории. На этой основе было сделано заключение, что принципы геометрической оптики малопригодны для изучения волн типа цунами и других больших волн на мелководье.

Работа выполнена при финансовой поддержке Интеграционного проекта СО РАН (№ 1–2000) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 01–01–00767).

В 60-е гг. Р. М. Гарипов [3–5] подробно исследовал нестационарную линейную задачу о волноводе. Была получена асимптотика решения при больших временах и доказано, что вдоль неровностей дна типа подводного хребта распространяются волны, причем при некоторых условиях скорость затухания амплитуды волны вдоль хребта значительно меньше, чем по другим направлениям.

Нелинейные эффекты этой задачи впервые были изучены Е. И. Биченковым [5]. Используя нелинейное приближение теории длинных волн, он доказал, что при некоторой форме дна может наблюдаться стационарное распространение уединенной волны над подводным хребтом.

В 70-х гг. задачей о гравитационно-капиллярных волнах над подводным хребтом занимались В. И. Налимов и П. И. Плотников [6]. В линейном приближении она представляет собой нерегулярную задачу на собственные значения. Ими была доказана теорема существования решения в пространствах непрерывно дифференцируемых функций с весом, чем был установлен степенной характер затухания амплитуды волны в направлении, перпендикулярном хребту.

В данной работе рассматривается задача о бегущих гравитационно-капиллярных волнах малой амплитуды над подводным хребтом в точной нелинейной постановке для безвихревого течения идеальной несжимаемой жидкости. Достаточное условие существования гладкого решения состоит в обратно пропорциональной зависимости между коэффициентом поверхностного натяжения и частотой волны. Основное требование к функции $h(x)$, задающей профиль хребта, заключается в положительности ее интеграла по всей оси. Физически это означает, что в сечении дна бассейна плоскостью, перпендикулярной хребту, суммарная площадь «возвышений» (относительно ровного дна на бесконечности) должна быть больше суммарной площади «впадин».

Исследование задачи проводится в специальных банаховых пространствах функций (классы типа Харди), периодических по переменной, направленной вдоль хребта, и экспоненциально убывающих в перпендикулярном направлении. При надлежащей переформулировке эта задача редуцируется к нелинейной задаче теории ветвления. Ее спецификой является то, что линейная однородная задача не является регулярной: при стремлении малого параметра, характеризующего отклонение формы дна от горизонтальной плоскости, к нулю собственная функция исчезает. Ответвление происходит от приближенного решения, получаемого конечномерной аппроксимацией оператора, к отысканию неподвижной точки которого сводится линейная задача [7].

В предположениях малости возвышения подводного хребта доказана теорема существования гладких решений уравнений идеальной несжимаемой жидкости, периодических по переменной, направленной вдоль подводного хребта, и экспоненциально убывающих с малым положительным показателем в поперечном направлении.

Метод исследования заключается в последовательной редукции (по пространственным переменным) трехмерной задачи к одномерной и доказательстве разрешимости получающейся нелинейной псевдодифференциальной задачи.

1. Постановка задачи

Формулируется точная постановка задачи о волноводе поверхностных гравитационно-капиллярных волн для модели идеальной несжимаемой тяжелой и безвихревой жидкости. При помощи оператора «нормальная производная» исходная трехмерная задача сводится к системе двух нелинейных уравнений на свободной поверхности.

Пусть область течения представляет собой «слой»

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -\infty < x, y < \infty, : \, -1 + qh(x) < z < \zeta(x,y)\right\},$$

где $q > 0$ — малый параметр, $h(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Задача о бегущих вдоль подводного хребта с постоянной скоростью a капиллярно-гравитационных волнах на поверхности тяжелой идеальной несжимаемой безвихревой жидкости в терминах потенциала течения $\Phi(x,y,z)$ и «формы» свободной поверхности $\zeta(x,y)$ в безразмерных переменных имеет следующую формулировку [8].

Требуется определить гармоническую в области Ω функцию $\Phi(x,y,z)$:

$$\Delta\Phi = 0, \quad (x,y,z) \in \Omega, \tag{1.1}$$

удовлетворяющую условию непротекания на твердой границе Ω:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial \boldsymbol{n}} = 0, \quad z = -1 + qh(x), \tag{1.2}$$

и двум краевым условиям (кинематическому и динамическому) на свободной поверхности $\zeta(x,y)$ (заранее неизвестной и также подлежащей определению):

$$\Phi_x\zeta_x + \Phi_y\zeta_y - \Phi_z - a\zeta_y = 0, \tag{1.3}$$

$$\zeta - a\Phi_y - \sigma^2\gamma + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 = 0. \tag{1.4}$$

Здесь и далее операторы Δ и ∇ берутся по переменным (x,y,z), $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к границе области, a — скорость волны, σ — капиллярное число, γ — удвоенная средняя кривизна свободной поверхности. Ускорение свободного падения g отнесено к единице.

Замечание 1.1. Величина $\gamma = 1/R_1 + 1/R_2$ (R_1, R_2 — главные радиусы кривизны) допускает представление $\gamma = \Delta\zeta + \gamma_1(\zeta)$, где $\gamma_1(\zeta)$ — аналитическая функция от производных первого и второго порядков функции $\zeta(x,y)$, причем разложение ее в степенной ряд начинается с квадратичных членов.

Замечание 1.2. Из четности функции $\zeta(x,y)$ по переменной y и уравнений (1.2)–(1.4) следует нечетность потенциала $\Phi(x,y,z)$ по y.

Сформулированная задача допускает понижение размерности по независимым переменным на единицу [9]. Для этого вводится оператор взятия нормальной производной по правилу $K(q,\zeta)\varphi = \partial\Phi/\partial z$ при $z = \zeta(x,y)$, где Φ — решение смешанной краевой задачи

$$\Delta\Phi = 0,\ (x,y,z) \in \Omega; \quad \Phi(x,y,\zeta(x,y)) = \varphi(x,y); \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{n}} = 0,\ z = -1 + qh(x). \tag{1.5}$$

На свободной поверхности $\zeta(x,y)$ имеют место формулы

$$\Phi_x = \varphi_x - \zeta_x K(q,\zeta)\varphi, \quad \Phi_y = \varphi_y - \zeta_y K(q,\zeta)\varphi,$$

поэтому из системы (1.3), (1.4) вытекает

$$a\zeta_y + K(q,\zeta)\varphi = H(q,\zeta)\varphi, \tag{1.6}$$

$$\zeta - a\varphi_y - \sigma^2\Delta\zeta = J(q,\zeta,\varphi). \tag{1.7}$$

Операторы H и J определяются формулами

$$H(q,\zeta)\varphi = \varphi_x\zeta_x + \varphi_y\zeta_y - \bigl(\zeta_x^2+\zeta_y^2\bigr)K(q,\zeta)\varphi,$$
$$J(q,\zeta,\varphi) = \sigma^2\gamma_1(\zeta) + \frac{1}{2}\bigl(1+\zeta_x^2+\zeta_y^2\bigr)\left\{K(q,\zeta)\varphi\right\}^2 - \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2.$$

Замечание 1.3. Из вида операторов H и J и замечания 1.1 следует, что эти операторы представляют собой регулярные аналитические функции от искомых функций $\zeta(x,y)$, $\varphi(x,y)$ и их производных, а члены разложения этих аналитических функций в степенные ряды имеют полную степень не менее 2.

Оператор K не имеет простого аналитического представления, что связано с его нелокальностью, но для исследования задачи достаточно будет знать первые три члена разложения оператора нормальной производной по параметру q и оценку слагаемых более высокого порядка. Сейчас лишь отметим, что в нулевом приближении $K = |\nabla|\operatorname{th}|\nabla|$ — псевдодифференциальный оператор первого порядка ($\nabla = (D_x, D_y)$). Подробно о таких операторах изложено, например, в [10]. Необходимые для изучения поставленной задачи свойства псевдодифференциальных операторов сгруппированы в п. 2.3.

Нормы функций ζ и φ в соответствующих функциональных пространствах предполагаются малыми (порядка $q^{5/2}$). Поэтому можно считать (подробное обоснование этого факта приводится в п. 4), что операторы H и J суть младшие по степеням q члены уравнений (1.6), (1.7).

2. Функциональные пространства

Преобразование Фурье

$$\hat u(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}u(x)\,dx, \quad u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\hat u(\xi)\,d\xi$$

финитных бесконечно дифференцируемых функций — целая аналитическая функция комплексного переменного ξ, убывающая быстрее любой степени $|\xi|^{-1}$ в каждой горизонтальной полосе $|\operatorname{Im}\xi| \le \rho < \infty$ (теорема Пэли — Винера [11]). Поэтому для любой $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ величина

$$\|\varphi\|^2_{E^s(\rho)} = \sup_{|\operatorname{Im}\xi|\le\rho}\int_{-\infty}^{\infty} |(1+\xi^2)^{s/2}\hat\varphi(\xi)|^2\,d\operatorname{Re}\xi \tag{2.1}$$

определена и конечна для всех $s \in \mathbb{R}$, $0 \le \rho < \infty$. Замыкание множества основных функций по норме (2.1) есть банахово пространство $E^s(\rho)$ [12].

Семейство объектов $E^s_n(\rho)$, $n \in \mathbb{Z}$, составляют пространства $E^s(\rho)$, снабженные эквивалентной (2.1) нормой

$$\|u\|^2_{E^s_n(\rho)} = \sup_{|\operatorname{Im}\xi|\le\rho}\bigl\|\hat u(\xi)\lambda_n^s(\xi)\bigr\|_2^2, \quad n\in\mathbb{Z},$$

где $\lambda_n(\xi) = (1+\xi^2+n^2)^{1/2}$. Здесь и далее через $\|\cdot\|_p$ будет обозначаться норма в соответствующем $L_p(\mathbb{R})$-пространстве, а круглые скобки $(\cdot,\cdot)$ будут означать скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R})$. Само пространство $L_2(\mathbb{R})$ будет обозначаться через L_2.

2.1. Пространства V^s.

Определение 1. *Пространство* V^s — это множество функций вида

$$f(x,y)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{in\omega y} f_n(x),$$

заданных на $\mathbb{R}^2$, для которых величина $\|f\|^2_{V^s}=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\|f_n(x)\|^2_{E^s_n(\rho)}$ конечна.

Из полноты пространств $E^s_n(\rho)$ и l_2 (пространства строк) следует, что V^s является банаховым пространством $2\pi/\omega$ периодических по переменной y и экспоненциально убывающих по переменной x функций. Подпространства нечетных (четных) по переменной y вещественнозначных функций из V^s обозначаются символами V^s_1, V^s_2 соответственно. Чтобы подчеркнуть принадлежность функции этим подпространствам, будем снабжать ее норму соответствующим индексом.

Предложение 2.1. *Пространство* V^s *при* $\rho\geq 0$, $s>1$ *является банаховой алгеброй: для любых* $f,g\in V^s$ *их произведение принадлежит* V^s *с оценкой*

$$\|fg\|_{V^s}\leq C\|f\|_{V^s}\|g\|_{V^s}.$$

Здесь и далее символом C с индексом или без будут обозначаться все несущественные постоянные.

Доказательство. По определению нормы в V^s и свойствам преобразования Фурье имеем

$$\|fg\|^2_{V^s}=\sum_k \sup_{|\operatorname{Im}\xi|\leq\rho}\|v_k\|^2_2,$$

где $v_k=\lambda^s_k(\xi)\sum\limits_n \hat f_n * \hat g_{k-n}$. Здесь $*$ — оператор свертки по x; $f_n(x)$, $g_{k-n}(x)$ — коэффициенты Фурье функций f и g. Далее оценки слагаемых $|v_k|$ основаны на применении хорошо известного неравенства [9]

$$\big|\lambda^s_k(\xi)\big|\leq C\big[|\lambda^s_{k-n}(\xi-\eta)|+|\lambda^s_n(\eta)|\big],$$

верного при $s>0$, всех комплексных ξ, η и целых k, n, а также легко проверяемой оценки

$$\Big|\sum_n a_n * b_{k-n}\Big|\leq\Big(\sum_n\|a_n\|_1\Big)^{1/2}\Big(\sum_m\int|a_m(y)|\,|b_{k-m}(x-y)|^2\,dy\Big)^{1/2}.$$

Как всегда подразумевается, что интеграл без обозначения пределов интегрирования берется по всей действительной оси. Условие $s>1$ используется для обоснования сходимости получающихся интегралов.

2.2. Пространства CV^s.

Символом $\overline{\Omega}$ обозначим слой

$$\overline{\Omega}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid -\infty<x,y<\infty,\ -1<z<0\}. \tag{2.2}$$

Пусть $s>0$, $p=(p_1,p_2,p_3)$ — мультииндекс. Согласно общепринятым обозначениям $D^p=D^{p_1}_x D^{p_2}_y D^{p_3}_z$, где D_x, D_y и D_z — операторы частного дифференцирования по соответствующим переменным; $|p|=\sum\limits_{i=1}^3 p_i$.

Определение 2. *Пространство* CV^s — замыкание функций $\varphi \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ по норме

$$\|\varphi\|_{CV^s} = \sum_{0 \le |p| \le [s]} \max_{-1 \le z \le 0} \|D^p u\|_{V^{s-|p|}}.$$

Символами CV_1^s, CV_0^s, как и ранее, обозначаются подпространства пространства CV^s, состоящие из нечетных и четных по переменной y вещественнозначных функций. Основные свойства пространств CV^s содержит

Предложение 2.2. *Верны утверждения:*

(а) *если* $u \in CV^s$, *то для целых* $0 \le |k| \le s$ *производная* $D^k u$ *принадлежит* $CV^{s-|k|}$;

(б) *вложение* V^s *в* CV^s *непрерывно;*

(в) *при* $s > 1$ *пространство* CV^s *— банахова алгебра.*

Доказательство. Утверждения (а), (б) проверяются непосредственно и почти очевидны. Последнее утверждение следует из аналогичного свойства пространства $C^m[a,b]$ с любыми конечными a, b и $m \ge 0$, а также предложения 2.1.

2.3. Псевдодифференциальные операторы.

Одномерный псевдодифференциальный оператор $K(D_x)$ с символом $k(\xi)$ (оператор свертки) определяется через преобразование Фурье функции $u(x)$ по формуле $\widehat{Ku}(\xi) = k(\xi)\hat{u}(\xi)$. Далее рассматриваются только операторы с аналитическими символами в симметричной относительно действительной оси горизонтальной полосе комплексной плоскости конечной ширины 2ρ:

$$\Pi_\rho = \{\xi \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im}\xi| \le \rho < \omega/2\}. \tag{2.3}$$

Пусть величина $|K|_{E^p(\rho)} = \sup\limits_{|\operatorname{Im}\xi| \le \rho} \left|\lambda_0^{-p}(\xi) k(\xi)\right|$ конечна для некоторого $p \in \mathbb{R}$. Тогда оператор K действует из пространства $E^{s+p}(\rho)$ в $E^s(\rho)$ [12].

Двумерные псевдодифференциальные операторы $K(D_x, D_y)$, действующие на функции из V^s, определяются правилом

$$Ku(x,y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in\omega y} K_n u_n(x),$$

где $K_n = e^{-in\omega y} K e^{in\omega y}$ — одномерный псевдодифференциальный оператор с символом $k_n(\xi)$, $u_n(x)$ — коэффициенты Фурье функции u. Для таких операторов «норма» в пространстве V^p вводится равенством

$$|K|_{V^p} = \sup_{|\operatorname{Im}\xi| \le \rho,\, n \in \mathbb{Z}} \left|\lambda_n^{-p}(\xi) k_n(\xi)\right|.$$

Из очевидной оценки $\|Ku\|_{V^{s-p}} \le C|K|_{V^p}\|u\|_{V^s}$ следует, что оператор K действует из V^s в V^{s-p} и имеет порядок p. Легко проверяется, что порядок произведения операторов равен сумме порядков операторов. Согласно [10] *истинным порядком* называют точную нижнюю грань всех порядков оператора K. Норма псевдодифференциального оператора, вычисляемая на некотором подпространстве V^s, снабжается соответствующим индексом.

2.4. Классы $\boldsymbol{\Lambda}^m$.

Для сокращения выкладок при дальнейших оценках норм нелинейных операторов целесообразно ввести специальные классы отображений. Прежде всего примем следующие соглашения.

1. Замкнутые шары радиуса $\mathscr{R}$ с центром в нуле в пространствах $E^s(\rho)$, V^s, CV^s и произвольном банаховом пространстве X будем обозначать соответственно через $B^s_\rho(\mathscr{R})$, $B^s(\mathscr{R})$, $B^s_{CV}(\mathscr{R})$ и $B_X(\mathscr{R})$.

2. Символом $\mathscr{L}(X,Y)$ будем обозначать множество линейных ограниченных операторов, действующих из пространства X в Y.

Далее, пусть X, Y — банаховы пространства, $u\in V^s_2$, $v\in X$, $q_*>0$ достаточно мало и $\alpha\geq 1$ — некоторое число.

Определение 3. *Классы* $\Lambda^\alpha(X,Y)$ состоят из операторов $f:(0,q_*)\times V^s_2\times X\to Y$, удовлетворяющих следующим условиям.

1. Для любых $m\geq\alpha$, $q\in(0,q_*)$ и всех $u\in B^s(\mathscr{R}_1)$, $v\in B_X(\mathscr{R}_2)$, где $\mathscr{R}_i=O(q^m)$ $(i=1,2)$, оператор f равномерно ограничен: $\|f(q,u,v)\|_Y\leq Cq^\alpha\big(\|u\|_{V^s}+\|v\|_X\big)$. Постоянная C зависит от α, m и не зависит от q.

2. Оператор f равномерно удовлетворяет условию Липшица: для всех $m\geq\alpha$, $q\in(0,q_*)$, $u_i\in B^s(\mathscr{R}_1)$ и $v_i\in B_X(\mathscr{R}_2)$ $(i=1,2)$ справедливо неравенство

$$\|f(q,u_1,v_1)-f(q,u_2,v_2)\|_Y\leq C(q^m\|u_1-u_2\|_{V^s}+q^\alpha\|v_1-v_2\|_X).$$

Определение 4. *Классы* $\Lambda^\alpha_0(X,Y)$ состоят из операторов $f\in\Lambda^\alpha(X,Y)$, если дополнительно $f(q,u,0)=0$.

Замечание 2.1. При $\alpha=1$ верхний индекс в обозначении класса Λ опускается.

Замечание 2.2. Если $f\in\Lambda^\alpha_0$, то из 2-го условия определения 3 следует, что для любых $m\geq\alpha$, $q\in(0,q_*)$ и всех $u\in B^s(\mathscr{R}_1)$, $v\in B_X(\mathscr{R}_2)$ выполнено неравенство $\|f(q,u,v)\|_Y\leq Cq^\alpha\|v\|_X$. Здесь, как и ранее, $\mathscr{R}_i=O(q^m)$ $(i=1,2)$.

Замечание 2.3. Если $f\in\Lambda^\alpha$ с любым $\alpha\geq1$, то, полагая $m=\alpha$, получим, что неравенство

$$\|f(q,u_1,v_1)-f(q,u_2,v_2)\|_Y\leq Cq^\alpha(\|u_1-u_2\|_{V^s}+\|v_1-v_2\|_X)$$

верно для всех $\alpha\geq1$ и $q\in(0,q_*)$ при $u_i\in B^s(\mathscr{R}_1)$; $v_i\in B_X(\mathscr{R}_2)$, где $\mathscr{R}_i=O(q^\alpha)$ $(i=1,2)$.

3. Реализация оператора нормальной производной

Приводится разложение оператора $K(q,\zeta)$ по степеням малого параметра q и свойства остатка разложения. На первом этапе доказывается разрешимость задачи (1.5) в пространствах CV^s, откуда будет следовать корректность определения K на функциях из V^s.

Заменой переменных

$$x=\bar x,\quad y=\bar y,\quad z=\zeta(\bar x,\bar y)+\bar z[1+\zeta(\bar x,\bar y)-qh(\bar x)] \tag{3.1}$$

неизвестная заранее область течения Ω переходит в фиксированную область $\overline{\Omega}$ (2.2). Задача (1.5) в $\overline{\Omega}$ принимает вид (черта над переменными опущена)

$$\Delta\Phi=F(q,\zeta)\Phi,\ (x,y,z)\in\overline{\Omega};\quad \frac{\partial\Phi}{\partial z}=G(q,\zeta)\Phi,\ z=-1;\quad \Phi=\varphi,\ z=0. \tag{3.2}$$

Нелинейные по ζ операторы F и G определены формулами

$$F(q,\zeta)\Phi=\frac{(\zeta-qh)(\zeta-qh+2)-zqh'[zqh'-2\zeta_x(1+z)]-|\nabla\zeta|^2(1+z)^2}{(1+\zeta-qh)^2}\Phi_{zz}$$
$$+2\frac{\zeta_x(1+z)-zqh'}{1+\zeta-qh}\Phi_{xz}+2\frac{\zeta_y(1+z)}{1+\zeta-qh}\Phi_{yz}$$
$$+\frac{qh'\zeta_x(1+2z)+(1+z)[(1+\zeta-qh)\Delta\zeta-|\nabla\zeta|^2]-z(qh')^2-zqh''(1+\zeta-qh)}{(1+\zeta-qh)^2}\Phi_z, \tag{3.3}$$

$$G(q,\zeta)\Phi = \frac{\zeta - qh - q^2h'}{1+\zeta - qh}\Phi_z + qh'\Phi_x, \quad z=-1, \tag{3.4}$$

3.1. Существование и оценки решения задачи (3.2). При помощи специального построения эта задача может быть сведена к интегральному уравнению, разрешимость которого обосновывается методом сжимающих отображений.

Рассмотрим линейную задачу (3.2), считая правые части F и G заданными функциями.

Теорема 3.1. *Пусть $F \in CV_1^{s-2}$, $G \in V_1^{s-1}$, $\varphi \in V_1^s$. Тогда существует единственное решение $\Phi \in CV_1^s$ линейной задачи* (3.2) *с оценкой*

$$\|\Phi\|_{CV_1^s} \le C_s(\|\varphi\|_{V_1^s} + \|F\|_{CV_1^{s-2}} + \|G\|_{V_1^{s-1}}).$$

Доказательство теоремы потребует несколько вспомогательных утверждений. Рассмотрим краевую задачу для функции $u(t)$, $t\in[-1,0]$: $u'' - \lambda^2 u = f$, $u'(-1)=u_1$, $u(0)=u_2$, где λ, u_1, u_2 — постоянные, $f(t)$ — заданная на отрезке $[-1,0]$ функция. Решение $u(t)$ строится при помощи функции Грина и имеет вид

$$u(t) = u_1\frac{\operatorname{sh}\lambda t}{\lambda\operatorname{ch}\lambda} + u_2\frac{\operatorname{ch}\lambda(t+1)}{\operatorname{ch}\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_{-1}^{t}(\operatorname{sh}\lambda s\operatorname{th}\lambda + \operatorname{ch}\lambda s)\operatorname{sh}\lambda t f(s)\,ds$$
$$+ \frac{1}{\lambda}\int_{t}^{0}(\operatorname{sh}\lambda t\operatorname{th}\lambda + \operatorname{ch}\lambda t)\operatorname{sh}\lambda s f(s)\,ds.$$

Применение к обеим частям системы (3.2) преобразования Фурье по x приводит к аналогичной краевой задаче для функций $\widehat{\Phi}_n(\xi,z)$, $n\in\mathbb{Z}$. При этом ξ, n — параметры; роль переменной t играет z.

Согласно вышесказанному определим линейные операторы $A^{(j)}$, $j=1,2,3$, равенствами

$$A^{(j)}u(x,y,z) = \sum_{n\ne 0} e^{in\omega y}A_n^{(j)}u_n(x,z), \tag{3.5}$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{A_n^{(1)}u_n}(\xi,z) &= \hat{u}_n(\xi)\frac{\operatorname{sh}\{\theta_n(\xi)z\}}{\theta_n(\xi)\operatorname{ch}\{\theta_n(\xi)\}}, \\ \widehat{A_n^{(2)}u_n}(\xi,z) &= \hat{u}_n(\xi)\frac{\operatorname{ch}\{\theta_n(\xi)(z+1)\}}{\operatorname{ch}\{\theta_n(\xi)\}} \quad \text{при } u\in V_1^s, \\ \widehat{A_n^{(3)}u_n}(\xi,z) &= \int_{-1}^{0}\hat{u}_n(\xi,\gamma)a_n(\xi,z,\gamma)\,d\gamma \quad \text{при } u\in CV_1^s. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Символом $\widehat{\ }$, как и ранее, обозначено преобразование Фурье по x. Ядро оператора $A_n^{(3)}$ задается формулой

$$a_n(\xi,z,\gamma) = \begin{cases} a_n^- = \frac{\operatorname{ch}\{\theta_n(\xi)(\gamma+1)\}\operatorname{sh}\{\theta_n(\xi)z\}}{\theta_n(\xi)\operatorname{ch}\{\theta_n(\xi)\}}, & \gamma\in[-1,z], \\ a_n^+ = \frac{\operatorname{ch}\{\theta_n(\xi)(z+1)\}\operatorname{sh}\{\theta_n(\xi)\gamma\}}{\theta_n(\xi)\operatorname{ch}\{\theta_n(\xi)\}}, & \gamma\in[z,0]. \end{cases} \tag{3.7}$$

Тогда задачу (3.2) (пока формально) можно переписать в виде $\Phi = A^{(1)}G + A^{(3)}F + A^{(2)}\varphi$. При изучении операторов $A^{(j)}$, $j=1,2,3$, потребуется вспомогательное утверждение о свойствах функции $\theta_n(\xi) = \sqrt{\xi^2+n^2\omega^2}$ — символе оператора $|\nabla|$.

Пусть Π_ρ — область комплексной плоскости, определенная формулой (2.3).

Лемма 3.1. *При $\xi \in \Pi_\rho$ справедливы утверждения:*
(а) *$\theta_n(\xi)$ аналитична по ξ при всех целых n;*
(б) *$|\theta_n(\xi)|^{-1} \le C < \infty$ равномерно по ξ и $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$;*
(в) *$|\theta_n(\xi)|^p \le C_p|\lambda_n(\xi)|^p$ при всех $p \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.*

Доказательство. Аналитичность $\theta_n(\xi)$ при $\xi \in \Pi_\rho$ очевидна. Далее, нули этой функции расположены в точках $\xi = \pm in\omega$. Ближний из них к вещественной оси $\xi = \pm i\omega$ лежит за пределами рассматриваемой горизонтальной полосы комплексной плоскости, поэтому $|\theta_n(\xi)| \ge C > 0$ равномерно по $\xi \in \Pi_\rho$ и $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, что доказывает (б). Свойство (в) эквивалентно двойному неравенству

$$C_p^{-1}|\lambda_n(\xi)|^p \le |\theta_n(\xi)|^p \le C_p|\lambda_n(\xi)|^p, \quad p > 0,$$

которое проверяется непосредственно. Лемма доказана.

Свойства операторов $A^{(j)}$ содержит

Лемма 3.2. *Определенные формулами* (3.5)–(3.7) *операторы* $A^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$, *обладают свойствами* $A^{(1)} \in \mathscr{L}(V_1^{s-1}, CV_1^s)$, $A^{(2)} \in \mathscr{L}(V_1^s, CV_1^s)$, $A^{(3)} \in \mathscr{L}(CV_1^{s-2}, CV_1^s)$.

Доказательство. Поскольку нечетные по переменной y функции из пространств V^s, CV^s имеют нулевой коэффициент Фурье при $n = 0$, то операторы $A^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$, переводят нечетные функции в нечетные.

Первые два утверждения леммы проверяются элементарно: исходя из формул (3.5)–(3.7) выписываются выражения для производной p-го порядка от $\widehat{A_n^{(j)} u_n}(\xi, z)$, $j = 1, 2$, после чего производится оценка в соответствующем пространстве на основе свойств функции $\theta_n(\xi)$ (лемма 3.1) и поведения модулей гиперболических функций в «полосе» Π_ρ.

Свойства оператора $A^{(3)}$ также проверяются непосредственным вычислением, поэтому здесь приводится только схема доказательства.

Сначала устанавливается, что функции $a_n(\xi, z, \gamma)$ не имеют полюсов при всех $\xi \in \Pi_\rho$, $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $z, \gamma \in [-1, 0]$, являются бесконечно дифференцируемыми по z и удовлетворяют оценке

$$\max_{z\in[-1,0]} \int \left|\frac{\partial^p a_n^\pm}{\partial z^p}\right|^2 d\gamma \le C_p^\pm |\theta_n^{p-2}(\xi)|^2.$$

Из (3.5) следует, что

$$\frac{\partial^p \widehat{A_n^{(3)} v_n}(\xi, z)}{\partial z^p} = \int\limits_{-1}^{z} \frac{\partial^p a_n^-}{\partial z^p} \hat{v}_n(\xi, \gamma)\, d\gamma$$
$$+ \int\limits_{z}^{0} \frac{\partial^p a_n^+}{\partial z^p} \hat{v}_n(\xi, \gamma)\, d\gamma + \chi(p-2) \sum_{k=0}^{p-2} \frac{\partial^k \hat{v}_n}{\partial z^k} \tilde{a}_n(\xi, k, p). \quad (3.8)$$

Здесь χ — функция Хевисайда, $p \ge 0$; функция $\tilde{a}_n$ задается так:

$$\tilde{a}_n(\xi, k, p) = \begin{cases} \theta_n^{p-k-2}(\xi), & p-k \text{ четно}; \\ 0, & p-k \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Теперь требуемые оценки нормы $D^p A^{(3)} u$ в пространствах V_1^{s-p} вытекают из формулы (3.8), вышеперечисленных свойств и леммы 3.1.

Доказательство теоремы 3.1. Исходя из вышесказанного, решение линейной задачи (3.2) выписывается явно при помощи операторов $A^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$:

$$\Phi = A^{(1)}G + A^{(3)}F + A^{(2)}\varphi. \tag{3.9}$$

Оценка Φ следует из леммы 3.2 и свойств правых частей F, G и φ. Теорема доказана.

Теорема 3.2. *Пусть* $s > 3$. *Существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что при* q, $\|\zeta\|_{V^s}$, $\|\varphi\|_{V^s} \le \varepsilon$ *задача* (3.2) *имеет единственное решение; отображение* $\varPhi : (q, \zeta, \varphi) \mapsto \Phi$ *непрерывно по* φ *и удовлетворяет условию Липшица по* ζ*: для всех* $\zeta_i, \varphi_i \in B^s(\varepsilon)$ $(i = 1, 2)$ *выполняется оценка*

$$\|\varPhi(q,\zeta_1)\varphi_1 - \varPhi(q,\zeta_2)\varphi_2\|_{CV_1^s} \le C_s(\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{V_1^s} + \varepsilon\|\zeta_1 - \zeta_2\|_{V_2^s}).$$

Доказательство. Из теоремы 3.1 следует, что задача (3.2) сводится к операторному уравнению

$$\Phi = A^{(1)}G(q,\zeta)\Phi + A^{(3)}F(q,\zeta)\Phi + A^{(2)}\varphi.$$

Обозначим правую часть этого уравнения через $\Gamma(q, \zeta, \varphi)\Phi$. Дифференциальные нелинейные операторы F и G, входящие в уравнения (3.2), представляют собой аналитические функции от искомых функций Φ, ζ, известной функции $qh(x)$ и их производных. Поскольку $h(x) \in V_2^s$ с любым $s > 0$ (при этом из всех коэффициентов Фурье ненулевым является только $h_0 = h(x)$), из предложений 2.1, 2.2 и оценок сложных аналитических функций [13] следует, что $F \in \Lambda_0(CV_1^s, CV_1^{s-2})$, $G \in \Lambda_0(CV_1^s, V_1^{s-1})$.

По условию $s > 3$. Тогда согласно свойствам операторов F и G при достаточно малых $\varepsilon > 0$ верно неравенство

$$\begin{aligned}\|\Gamma(q,\zeta_1,\varphi_1)\Phi_1 - \Gamma(q,\zeta_2,\varphi_2)\Phi_2\|_{CV_1^s}&\\ \le C_s\varepsilon\bigl(\|\Phi_1 - \Phi_2\|_{CV_1^s} + \|\zeta_1 - \zeta_2\|_{V_2^s}\bigr) &+ C_s\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{V_1^s}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

В силу линейности Γ по Φ и φ имеет место оценка

$$\|\Gamma(q,\zeta,\varphi)\Phi\|_{CV_1^s} \le C_s(\varepsilon\|\Phi\|_{CV_1^s} + \|\varphi\|_{V_1^s}). \tag{3.11}$$

Следовательно, при достаточно малом ε оператор Γ будет сжимающим по Φ, и для заданного $\varepsilon_1 > 0$ можно подобрать ε так, чтобы для всех $\zeta, \varphi \in B^s(\varepsilon)$, $\Phi \in B^s_{CV}(\varepsilon_1)$ выполнялось $\Gamma(q,\zeta,\varphi)\Phi \in B^s_{CV}(\varepsilon_1)$.

Разрешимость задачи (3.2) вытекает из принципа сжимающих отображений; свойства отображения $\varPhi$ — из неравенств (3.10) и (3.11). Теорема доказана.

Следствие 3.1. *При выполнении условий теоремы* 3.2 *справедливо более сильное утверждение: функция* Φ *— решение задачи* (3.2) *— аналитична по* q.

Действительно, операторы F и G аналитически зависят от q. Согласно только что доказанной лемме существует тройка функций ζ, φ, Φ, обращающая (3.2) в тождество или, иными словами, оператор

$$\frac{\partial}{\partial\Phi}\{\Phi - \Gamma(q,\zeta,\varphi)\Phi\} = I - A^{(1)}G(q,\zeta) - A^{(3)}F(q,\zeta)$$

(здесь I — тождественное преобразование) имеет ограниченный обратный. Остается применить теорему о неявной функции для аналитических отображений [14].

3.2. Представление оператора K.

Теорема 3.2 о существовании и единственности решения эллиптической задачи (3.2) гарантирует корректность определения оператора K на функциях из V_1^s. В частности, из оценки решения Φ в CV_1^s следует, что K — оператор 1-го порядка: $\|K(q,\zeta)\varphi\|_{V_1^{s-1}} \le C\|\varphi\|_{V_1^s}$.

При решении уравнений на «свободной поверхности» необходимо будет выделить главную часть оператора K, первые два члена его разложения по параметру q и получить оценку для младших членов.

Обозначим через $\Lambda = \operatorname{ch}^{-1}|\nabla|$ двумерный псевдодифференциальный оператор, действующий на функции из V_1^s по правилу

$$\Lambda u(x,y) = \sum_{n\neq 0} e^{in\omega y}\Lambda_n u_n(x), \quad \text{где } \widehat{\Lambda_n u}_n(\xi) = \widehat{u}_n(\xi)/\operatorname{ch}[\theta_n(\xi)].$$

Согласно свойствам $\theta_n(\xi)$ (лемма 3.1) функция $\operatorname{ch}[\theta_n(\xi)]$ не обращается в нуль, если $\xi \in \Pi_\rho$ и $\rho \ge 0$, а модуль ее при $|\operatorname{Re}\xi| + |n| \to \infty$ ведет себя как $\exp[|\operatorname{Re}\xi| + |n|]$. Поэтому порядок Λ равен $-\infty$: этот оператор переводит функции из V_1^s в V_1^m с любыми s, m с соответствующей оценкой.

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.2. *Тогда оператор нормальной производной $K(q,\zeta)$ допускает представление*

$$K(q,\zeta) = K^{(0)} + qK^{(1)} + q^2K^{(2)} + K^{(3)}(q,\zeta),$$

где $K^{(0)} = |\nabla|\operatorname{th}|\nabla|$, $K^{(1)} = D_x\Lambda h D_x\Lambda + D_y^2\Lambda h\Lambda$, $K^{(2)} = D_x\Lambda h D_x\mathscr{K} + D_y^2\Lambda h\mathscr{K}$, $K^{(3)} \in \Lambda_0^3(V_1^s, V_1^{s-1})$; *оператор $\mathscr{K}$ ставит в соответствие каждой функции φ производную $\frac{\partial\Phi_0}{\partial q}$, вычисленную при $q=0$, $\bar z = -1$ (Φ_0 — решение задачи* (3.2) *при $\zeta = 0$).*

Доказательство отнесено в приложение 1 (п. 8).

4. Сведение задачи (1.6), (1.7) к задаче теории ветвления

Прежде всего отметим, что в силу замечания 1.3, оценок сложных аналитических функций [13], предложения 2.1 и теоремы 3.3 о представлении оператора нормальной производной при $s > 3$ операторы H и J принадлежат соответственно классам $\Lambda_0^\alpha(V_1^s, V_1^{s-1})$, $\Lambda^\alpha(V_1^s, V_2^{s-2})$ с любым $\alpha \ge 1$.

4.1. «Восстановление» формы свободной поверхности ζ по функции φ.

Задача (1.6), (1.7) может быть сведена к одному операторному уравнению на функцию φ. Имеет место

Теорема 4.1. *Пусть $\sigma \le 1/(2\rho)$. Тогда существуют числа ε_0, $\varepsilon_1 > 0$ такие, что для всех $\varphi \in B^s(\varepsilon_1) \cap V_1^s$ и $q \in (0,\varepsilon_0)$ уравнение* (4.2) *имеет единственное решение $\zeta \in V_2^s$. Задающее его отображение $\Psi : (q,a,\varphi) \mapsto \zeta$ обладает свойствами:*

(а) *уравнение* (4.2) *с $\zeta = \Psi(q,a,\varphi)$ обращается в тождество;*

(б) *для всех нечетных $\varphi_i \in B^s(\varepsilon_1)$, $|a_i| \le C_a < \infty$ $(i = 1,2)$ равномерно по q выполнена оценка*

$$\|\Psi(q,a_1,\varphi_1) - \Psi(q,a_2,\varphi_2)\|_{V_2^s} \le C(\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{V_1^s} + \varepsilon_1|a_1 - a_2|),$$

постоянная C зависит от C_a, h, s;

(в) *равенство* $\Psi(q,a,0)=0$ *выполнено для всех* $q\in(0,\varepsilon_0)$ *и* $|a|\le C_a<\infty$.

Доказательство. 1. Линейная задача. Рассмотрим уравнение (1.7), считая J известной функцией. Обозначим $P=I-\sigma^2\Delta$. Тогда (1.7) принимает вид $P\zeta-a\varphi_y=J(q,\zeta,\varphi)$.

Символ $p_n(\xi)=1+\sigma^2\theta_n^2(\xi)$ оператора $P_n=e^{-in\omega y}Pe^{in\omega y}$ является регулярной аналитической в Π_ρ функцией, которая при больших $|\operatorname{Re}\xi|$, $|n|$ ведет себя как $|\lambda_n(\xi)|^2$. Следовательно, величина $|P|_{V^2}$ ограничена, откуда $P\in\mathscr{L}(V^s,V^{s-2})$ при любых $s\in\mathbb{R}$.

Нули функции $p_n(\xi)$ расположены за пределами Π_ρ (а именно в точках $\xi=\pm i\sqrt{1+\sigma^2n^2\omega^2}/\sigma)$, и при условии $\sigma\le 1/(2\rho)$ «норма» $|P^{-1}|_{V^{-2}}$ конечна. Значит, решение линейной задачи (1.7) имеет вид

$$\zeta=P^{-1}(a\varphi_y+J). \tag{4.1}$$

В силу инвариантности оператора P относительно сдвига по y при $J\in V_2^{s-2}$, $\varphi\in V_1^s$, из уравнения (4.1) следует, что $\zeta\in V_2^s$ и $\|\zeta\|_{V_2^s}\le C(\|\varphi\|_{V_1^s}+\|J\|_{V_2^{s-2}})$. Постоянная C зависит от P, C_a, s.

2. Нелинейная задача. Поскольку оператор J принадлежит классу $\Lambda^\alpha\bigl(V_1^s,V_2^{s-2}\bigr)$ с любым $\alpha\ge1$, то отображение $P^{-1}J(q,\zeta,\varphi)$ будет сжимающим по ζ тогда, когда $\zeta,\varphi\in B^s(\varepsilon_1)$, $q\in(0,\varepsilon_0)$, где $\varepsilon_1>0$ достаточно мало и $0<\varepsilon_0=O\bigl(\varepsilon_1^{1/\alpha}\bigr)$. Кроме того, помещая при необходимости функцию φ в шар меньшего радиуса ε_1^*, можно добиться, чтобы оператор

$$\mathscr{J}(q,\zeta,\varphi)=P^{-1}[a\varphi_y+J(q,\zeta,\varphi)]$$

переводил множество $(0,\varepsilon_0)\times B^s(\varepsilon_1)\times B^s(\varepsilon_1^*)$ в шар $B^s(\varepsilon_1)$.

Согласно принципу сжимающих отображений решение (1.7) существует и единственно. Свойства отображения Ψ следуют из формулы (4.1) и свойств оператора $J(q,\zeta,\varphi)$. Теорема доказана.

4.2. Уравнение на след потенциала $\boldsymbol{\varphi}$. Теорема 4.1 позволяет по функции φ однозначно восстановить форму свободной поверхности. После подстановки в уравнения (1.6), (1.7) $\zeta=\Psi(q,a,\varphi)$ приходим к следующей задаче на φ:

$$\bigl[a^2D_y^2+PK^{(0)}\bigr]\varphi=F_1(q)\varphi+F_2(q,a,\varphi), \tag{4.2}$$

где обозначено

$$F_1(q)=-qP[K^{(1)}+qK^{(2)}], \tag{4.3}$$

$$F_2(q,a,\varphi)=-aD_yJ(q,\Psi(q,a,\varphi),\varphi)+P[H(q,\Psi(q,a,\varphi))\varphi-K^{(3)}(q,\Psi(q,a,\varphi))\varphi]. \tag{4.4}$$

Операторы F_1 и F_2 являются малыми по q. Действительно, как отмечалось ранее, порядок произведения псевдодифференциальных операторов равен сумме их порядков. Из разложения оператора нормальной производной (теорема 3.3) следует, что порядки операторов $K^{(1)}$ и $K^{(2)}$ равны $-\infty$, в силу чего для всех действительных p справедлива оценка $|F_1(q)|_{V_1^p}\le C_pq$.

Далее, с учетом свойств отображений H, J, Ψ и оператора K нелинейный оператор F_2 при условии $\|\varphi\|_{V_1^s}=O(q^\alpha)$, где $1\le\alpha\le3$, является малым порядка q^α: $|F_2(q,a,\varphi)|_{V_1^{s-3}}\le C_sq^\alpha\|\varphi\|_{V_1^s}$.

Стандартный метод решения уравнений типа (4.2) заключается в том, что сначала обращается линейный оператор из левой части, после чего задача сводится к нахождению неподвижной точки некоторого оператора.

Ниже будет показано, что при определенном выборе параметра a линейный оператор $a^2D_y^2 + PK^{(0)} : V_1^s \to V_1^{s-3}$ обратим, но норма обратного оператора неограниченно возрастает с уменьшением параметра q. Это свойство, в частности, позволит доказать существование нетривиальных решений уравнения (4.2). В противном случае (при равномерной по q ограниченности нормы обратного оператора) согласно теореме Неймана решением будет только нуль.

Таким образом, исходная задача (1.1)–(1.4) редуцируется к следующей: для положительных q доказать существование малых по норме нетривиальных решений уравнения (4.4) в классах функций V_1^s.

5. Линейная задача

Изучается линейная неоднородная задача (4.2) с фиксированной функцией F_2 в правой части. Формулируются достаточные условия однозначной разрешимости этого уравнения в классах V^s, выводится оценка решения.

После введения обозначения $N = a^2D_y^2 + PK^{(0)}$ исследуемое уравнение принимает вид

$$N\varphi = F_1(q)\varphi + F_2. \tag{5.1}$$

Пространство V_1^s представимо в виде прямой суммы: $V_1^s = V_{(0)}^s \oplus V_{(1)}^s$, где

$$V_{(0)}^s = \Big\{u \in V^s | u(x,y) = \sum_{n=\pm 1} e^{in\omega y} u_n(x)\Big\},$$
$$V_{(1)}^s = \Big\{u \in V^s | u(x,y) = \sum_{|n|\geq 2} e^{in\omega y} u_n(x)\Big\}.$$

Лемма 5.1. *Пусть числа a, σ и ω удовлетворяют соотношениям*

$$a^2\omega^2 = \big[\sigma^2\theta_1^2(i\varrho) + 1\big]\theta_1(i\varrho)\operatorname{th}\theta_1(i\varrho), \quad \sigma^2\omega^2 \geq 2,$$

где $0 \leq \varrho < \omega/2$. Тогда при ρ таких, что $0 \leq \rho \leq \varrho$, оператор $N : V_{(1)}^s \to V_{(1)}^{s-3}$ обратим в подпространстве $V_{(1)}^s$ с равномерной по ϱ оценкой: $|N^{-1}|_{V_{(1)}^{-3}} \leq C$.

Доказательство. Для проверки утверждений леммы достаточно установить:

(а) модуль функции $n_m(\xi) = -a^2m^2\omega^2 + p_m(\xi)k_m^{(0)}(\xi)$ равномерно по ϱ отделен от нуля при $\xi \in \Pi_\varrho$ и $|m| \geq 2$ (функции $p_m(\xi)$, $k_m^{(0)}(\xi) = \theta_m(\xi)\operatorname{th}\theta_m(\xi)$ — символы операторов P_m и $K_m^{(0)}$ соответственно);

(б) $|n_m(\xi)| = O(|\lambda_m(\xi)|^3)$ при $|\operatorname{Re}\xi| + |m| \to \infty$.

Функция $n_m(\xi)$ может обращаться в нуль в Π_ϱ, только если $\operatorname{Im}[p_m(\xi)k_m^{(0)}(\xi)] = 0$. Множество точек ξ, удовлетворяющих этому уравнению, — это либо действительная ось, либо мнимая ось.

Если $\operatorname{Re}\xi = 0$, то задача сводится к исследованию знакопостоянства функции

$$n_m(i\eta) = \big[\sigma^2\theta_m^2(i\eta) + 1\big]\theta_m(i\eta)\operatorname{th}\theta_m(i\eta) - m^2\big[\sigma^2\theta_1^2(i\varrho) + 1\big]\theta_1(i\varrho)\operatorname{th}\theta_1(i\varrho) \tag{5.2}$$

на отрезке $0 \leq \eta \leq \varrho$.

Если $m \geq 2$ фиксировано, то $n_m(i\eta)$ строго убывает по η. Следовательно, достаточно установить справедливость неравенства $n_m(i\varrho) \geq C > 0$, в котором постоянная C не зависит от ϱ и m.

Так как при фиксированном ϱ функция $\operatorname{th}\theta_m(i\varrho)$ строго возрастает по m, из (5.2) вытекает неравенство

$$n_m(i\varrho) \geq \operatorname{th}\theta_m(i\varrho)\bigl\{\theta_m(i\varrho)\bigl[\sigma^2\theta_m^2(i\varrho)+1\bigr] - m^2\theta_1(i\varrho)\bigl[\sigma^2\theta_1^2(i\varrho)+1\bigr]\bigr\}. \qquad (5.3)$$

Значение $\operatorname{th}\theta_m(i\varrho)$ положительно. Установим положительность слагаемого в фигурных скобках (5.3).

Имеем

$$\theta_m(i\varrho) = (m^2\omega^2 - \varrho^2)^{1/2} \equiv [\omega^2(m^2-1) + (\omega^2-\varrho^2)]^{1/2} > \omega(m^2-1)^{1/2},$$
$$\theta_1(i\varrho) \leq \theta_1(0) = \omega.$$

Используя условие леммы, получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned}\theta_m(i\varrho)[\sigma^2\theta_m^2(i\varrho)+1] &- m^2\theta_1(i\varrho)[\sigma^2\theta_1^2(i\varrho)+1]\\ &> \omega\left\{(m^2-1)^{1/2}[\sigma^2\omega^2(m^2-1)+1] - m^2(\sigma^2\omega^2+1)\right\}\\ &= \omega\{\sigma^2\omega^2[m^2(\sqrt{m^2-1}-1) - \sqrt{m^2-1}] - [m^2 - \sqrt{m^2-1}]\}\\ &\geq \omega[\sqrt{m^2-1}(2m^2-1) - 3m^2] > 0.\end{aligned}$$

Таким образом, $n_m(i\varrho) > 0$.

Если $\operatorname{Im}\xi = 0$, то $n_m(\xi)$ строго возрастает по ξ при неотрицательных ξ, четна и ее значение в нуле положительно.

Свойство (б) следует из леммы 3.1 и поведения $\operatorname{th}\theta_m(\xi)$: $|\operatorname{th}\theta_m(\xi)| = O(1)$ при больших $|\operatorname{Re}\xi| + |m|$, где $\xi \in \Pi_\varrho$ и $|m| \geq 2$.

Замечание 5.1. Из непрерывной зависимости параметра a от ϱ и строгости неравенства $n_m(i\varrho) > 0$ следует, что утверждение леммы 5.1 справедливо также в случае, если

$$a^2\omega^2 = \bigl[\sigma^2\theta_1^2(i\varrho)+1\bigr]\theta_1(i\varrho)\operatorname{th}\theta_1(i\varrho) + \delta$$

с достаточно малым $|\delta| \geq 0$.

Замечание 5.2. В случае отсутствия капиллярности ($\sigma = 0$) у функций $n_m(\xi)$ появляются нули на действительной оси при всех $|m| \geq 2$. Вследствие этого оператор N^{-1} становится неограниченным в подпространстве $V_{(1)}^s$ и от правой части уравнения (5.1) необходимо будет требовать выполнения бесконечного числа (по количеству «высших» гармоник) условий разрешимости.

Теорема 5.1. *Пусть F_2 удовлетворяет условию «ортогональности»: $F_2 \in V_{(1)}^{s-3}$. Тогда для достаточно малых $q > 0$ уравнение* (5.1) *имеет единственное решение $\varphi \in V_1^s$, удовлетворяющее равномерной по q оценке $\|\varphi\|_{V_1^s} \leq C\|F_2\|_{V_1^{s-3}}$.*

Доказательство. Ищем $\varphi \in V_{(1)}^s$. Тогда, очевидно, $N\varphi \in V_{(1)}^{s-3}$ и $F_1(q)\varphi \in V_{(1)}^{s-3}$. Согласно лемме 5.1 оператор N обратим на функциях из $V_{(1)}^s$.

Из (5.1) следует, что $\varphi - N^{-1}F_1(q)\varphi = N^{-1}F_2$. Согласно свойствам оператора P, лемме 5.1 и теореме 3.3 о представлении оператора нормальной производной оператор $N^{-1}F_1(q)$ принадлежит $\mathscr{L}(V_1^s, V_1^s)$, и его норма — величина порядка $O(q)$. По теореме Неймана об обратном операторе при достаточно малых $q > 0$ оператор $(I - N^{-1}F_1(q))^{-1}$ существует и ограничен. Если потребовать дополнительно $|N^{-1}F_1(q)|_{V_{(1)}^0} < 1/2$, то $\|(I - N^{-1}F_1(q))^{-1}\| \leq 2$. Таким образом, формула для решения линейной задачи имеет вид

$$\varphi = (I - N^{-1}F_1(q))^{-1}N^{-1}F_2. \qquad (5.4)$$

Оценка функции φ следует из (5.4) и свойств операторов N и $F_1(q)$. Теорема доказана.

6. Определение высших гармоник по $\varphi_0 \in V^s_{(0)}$

Рассматривается нелинейная задача (4.2) $[N - F_1(q)]\varphi = F_2(q, a, \varphi)$.

Решение этого уравнения ищется в виде $\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)}$, где $\varphi^{(i)} \in V^s_{(i)}$, $i = 0, 1$. При помощи представления $F_2(q, a, \varphi) = F_2^{(0)}(q, a, \varphi_0, \varphi_1) + F_2^{(1)}(q, a, \varphi_0, \varphi_1)$, где $F_2^{(i)} \in V_i^{s-3}$, получается эквивалентная (4.2) система уравнений ($i = 0, 1$)

$$[N - F_1(q)]\varphi^{(i)} = F_2^{(i)}(q, a, \varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}). \tag{6.1}$$

Цель данного раздела — изучить уравнение (6.1) с $i = 1$.

Согласно оценкам решения линейной задачи оператор $(N - F_1(q))^{-1}$ принадлежит $\mathscr{L}(V^{s-3}_{(1)}, V^s_{(1)})$, и его норма не зависит от q. Уравнение на $\varphi^{(1)}$ сводится к следующему:

$$\varphi^{(1)} = (N - F_1(q))^{-1} F_2^{(1)}(q, a, \varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}). \tag{6.2}$$

Необходимые для однозначной разрешимости задачи (6.2) свойства нелинейного отображения $R(q, a, \varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}) = (N - F_1(q))^{-1} F_2^{(1)}(q, a, \varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})$ содержит

Лемма 6.1. *Пусть $s > 4$. Существуют числа $\varepsilon_0, \varepsilon_1 > 0$ такие, что*

(а) *для всех $q \in (0, \varepsilon_0)$, $\varphi_i^{(0)} \in B^s(\varepsilon_1) \cap V^s_{(0)}$, $\varphi_i^{(1)} \in B^s(\varepsilon_1) \cap V^s_{(1)}$, $|a_i| \le C_a < \infty$ ($i = 1, 2$) справедливо ($\varepsilon = \max\{\varepsilon_0^3, \varepsilon_1\}$)*

$$\begin{aligned} &\big\| R\big(q, a_1, \varphi_1^{(0)}, \varphi_1^{(1)}\big) - R\big(q, a_2, \varphi_2^{(0)}, \varphi_2^{(1)}\big) \big\|_{V^s_{(1)}} \\ &\qquad \le C\varepsilon\big(\big\|\varphi_1^{(0)} - \varphi_2^{(0)}\big\|_{V^s_{(0)}} + \big\|\varphi_1^{(1)} - \varphi_2^{(1)}\big\|_{V^s_{(1)}} + \varepsilon|a_1 - a_2|\big); \end{aligned}$$

(б) *оператор $R(q, a, \cdot, \cdot)$ отображает множество $B_{V^s_{(0)}}(\varepsilon_1) \times B_{V^s_{(1)}}(\varepsilon_1)$ в шар $B_{V^s_{(1)}}(\varepsilon_1)$.*

Доказательство следует из принадлежности операторов H, J соответствующим классам Λ^α с любым $\alpha \ge 1$, включения $K^{(3)} \in \Lambda_0^3\big(V_1^s, V_1^{s-1}\big)$, свойств отображения Ψ (теорема 4.1), а также формул (4.3), (4.4) и не зависящей от q оценки нормы оператора $(N - F_1(q))^{-1}$ в $V^{-3}_{(1)}$. Лемма доказана.

Теорема 6.1. *Для указанных в лемме 6.1 $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ существует единственное решение уравнения (6.2) $\varphi_1 \in V_1^s$. Отображение $\Theta : (q, a, \varphi^{(0)}) \mapsto \varphi^{(1)}$ обладает свойствами:*

(а) *при $q \in (0, \varepsilon_0)$ и $\varphi^{(0)} \in B^s(\varepsilon_1) \cap V^s_{(0)}$ уравнение (6.2) с $\varphi^{(1)} = \Theta(q, a, \varphi^{(0)})$ обращается в тождество;*

(б) *отображение Θ равномерно удовлетворяет условию Липшица по всем аргументам, точнее,*

$$\|\Theta(q, a_1, \varphi_1^{(0)}) - \Theta(q, a_2, \varphi_2^{(0)})\|_{V^s_{(1)}} \le C\varepsilon\Big(\|\varphi_1^{(0)} - \varphi_2^{(0)}\|_{V^s_{(0)}} + \varepsilon|a_1 - a_2|\Big),$$

где $\varepsilon = \max\{\varepsilon_0^3, \varepsilon_1\}$;

(в) $\Theta(q, a, 0) = 0$.

Доказательство следует из леммы 6.1 и принципа сжатых отображений для уравнения (6.2).

7. Ветвление решения в пространстве $V^s_{(0)}$

В этом разделе изучается задача (6.1) ($i = 0$) в пространстве $V^s_{(0)}$. Существование решения у этого уравнения, а также оценки функции $\varphi^{(0)}$ в $V^s_{(0)}$ будут гарантировать разрешимость задач (3.2), (1.7) и (6.2) для всех достаточно малых $q > 0$, откуда будет следовать существование решения задачи, поставленной в п. 1.

В силу замечания 1.2 о нечетности потенциала Φ по y следует, что в представлении $\varphi^{(0)}(x,y) = e^{i\omega y}u(x) + e^{-i\omega y}v(x)$ функции u и v связаны соотношением $u(x) = -v(x)$. Условие вещественнозначности φ влечет $\operatorname{Re}\{u(x)\} = 0$.

Пусть, далее, $F_2^{(0)\pm}$ — коэффициенты, стоящие в разложении $F_2^{(0)}$ при гармониках с $n = \pm 1$ соответственно. Определив операторы T, P_1, L, M и $\mathscr{F}_0$ равенствами

$$\begin{aligned} T = e^{-i\omega y} P K^{(0)} e^{i\omega y}; \quad P_1 = e^{-i\omega y} P e^{i\omega y};\\ L = -e^{-i\omega y} K^{(1)} e^{i\omega y}; \quad M = -e^{-i\omega y} K^{(2)} e^{i\omega y}; \end{aligned} \tag{7.1}$$

$$\mathscr{F}_0(q,a,u) = F_2^{(0)+}(q,a,\varphi^{(0)},\Theta(q,a,\varphi^{(0)})), \tag{7.2}$$

из (6.1) получим уравнение на искомую функцию $u(x)$ и собственное число $\lambda = -a^2\omega^2$:

$$(\lambda + T)u = P_1\{qLu + q^2 Mu\} + \mathscr{F}_0(q,a,u). \tag{7.3}$$

В силу однородности по u оператора $\mathscr{F}_0$ функция $u \equiv 0$ является решением (7.2). Задача заключается в отыскании нетривиальных решений уравнения (7.3) с операторами, определенными формулами (7.1) и (7.2).

Рассмотрим линейное уравнения (7.3) с целью получения приближенного решения. Точное решение нелинейного уравнения (7.3) затем ищется методом возмущения в окрестности собственной функции и собственного числа линейной задачи.

При общих требованиях к операторам T, P_1, L и M была изучена задача на собственные значения [7]:

$$(\lambda_0 + T)u = P_1\{qLu + q^2 Mu\}. \tag{7.4}$$

Ее особенностью является то, что в пределе при $q \to 0$ собственных функций нет. В качестве примера была приведена линейная задача о распространении бегущих вдоль подводного хребта волн малой амплитуды, при этом в операторе «нормальная производная» были удержаны члены нулевой и первой степеней по q. Отправляясь от результатов из [7], можно доказать утверждение.

Теорема 7.1. *Пусть $\int h(x)\,dx > 0$. Тогда при достаточно малых $q > 0$ уравнение (7.4) имеет нетривиальное решение u_0 из пространства $E^s(\rho)$, где s и ρ — любые числа, удовлетворяющие условиям $s \ge 0$, $0 \le \rho \le q\nu_*/4$;*

$$\nu_* = 8\pi\omega^3 \frac{(1+\sigma^2\omega^2)\hat{h}(0)}{2\omega(1+\sigma^2\omega^2) + (1+3\sigma^2\omega^2)\operatorname{sh} 2\omega}.$$

Собственное число $\lambda_0 < 0$ — непрерывно дифференцируемая функция параметра q.

Доказательство вынесено в приложение 2 (п. 9).

7.1. Двусторонние оценки собственной функции линейной задачи (7.4).

Было установлено [7], что собственная функция (7.4) имеет вид $u_0 = v_0 + v_1$. Функция v_0 является главным слагаемым, поскольку для $s \geq 0$ будет $\|v_1\|_{E^s(\rho)} \leq C_s q^{1/2} \|v_0\|_{E^s(\rho)}$ [7]. Из свойств функции $t(\xi)$, изученных в [7], следует взаимно однозначная зависимость между параметрами λ_0 и μ, связанными соотношением $\lambda_0 = -t(iq\mu)$. «Собственное число» μ является гладкой функцией от q и представимо в виде $\mu(q) = \nu(q) + \tau(q)$, причем $\lim\limits_{q\to 0} \nu(q) = \nu_*$, $\lim\limits_{q\to 0} \tau(q) = 0$.

Приближенное решение v_0 линейной задачи с точностью до мультипликативной постоянной совпадает с функцией $(\tilde\lambda_0 + T)^{-1} P_1 \langle \mathscr{H} \rangle$, где $\sqrt{2\pi}\mathscr{H}(x) = L\langle 1\rangle(x)$, $\tilde\lambda_0 = -t(iq\nu(q))$. Пусть v_0 лежит на сфере радиуса $O(q^2\sqrt{q})$ пространства L_2. Тогда $v_0 = C_v q^4 (\tilde\lambda_0 + T)^{-1} P_1 \langle \mathscr{H} \rangle$, где C_v — некоторая положительная постоянная, не зависящая от q. При малых $q > 0$ имеем

$$\frac{C_v^2 q^5}{\nu^3(q)} X(q) \leq \|u_0\|_2^2 \leq \frac{3C_v^2 q^5}{2\nu^3(q)} X(q), \tag{7.5}$$

где

$$X(q) = (q\nu)^3 \int \frac{|p(\xi)\widehat{\mathscr{H}}(\xi)|^2}{|(\xi^2 + q^2\nu^2) t_1(\xi, q\nu)|^2}\, d\xi. \tag{7.6}$$

Функция $t_1(\xi,\eta) = [t(\xi) - t(i\eta)]/[\xi^2 + \eta^2]$ аналитична в области $\Pi_\rho \times (0,\rho)$, а ее модуль равномерно по $(\xi,\eta) \in \Pi_\rho \times (0,\rho)$ ограничен снизу [7]. В силу равномерной сходимости интеграла (7.6) при достаточно малых $q > 0$ и $\nu = \nu(q)$ функция $X(q)$ непрерывна. Из условия положительности интеграла от функции h следует, что $\widehat{\mathscr{H}}(0) > 0$, поэтому переход к пределу в (7.6) при $q \to 0$ дает

$$\lim_{q\to 0} X(q) = \frac{p^2(0)\widehat{\mathscr{H}}^2(0)}{t_1^2(0,0)} \int \frac{d\kappa}{(\kappa^2+1)^2} = \mathscr{M} > 0. \tag{7.7}$$

Также ввиду непрерывности $X(q)$ и (7.7) очевидно, что для достаточно малых $q > 0$ выполняется двойное неравенство $\mathscr{M}/2 \leq X(q) \leq 2\mathscr{M}$. Согласно этому и (7.5)

$$\frac{\mathscr{M} C_v^2 q^5}{8\nu_*} \leq \|u_0\|_2^2 \leq \frac{8\mathscr{M} C_v^2 q^5}{\nu_*}. \tag{7.8}$$

Аналогично устанавливается, что для неотрицательных s при вышеуказанном выборе v_0 справедлива оценка

$$\|u_0\|_{E^s(\rho)} \leq C_s q^{5/2}. \tag{7.9}$$

7.2. Вид точного решения и условие разрешимости.

Решение уравнения (7.3) ищется в виде

$$u = u_0 + u_1, \quad a = a_0 + a_1, \tag{7.10}$$

где u_0, $\lambda_0 = -a_0^2\omega^2$ — собственная функция и собственное число задачи (7.4). Из (7.3) с учетом (7.10) следует уравнение на u_1:

$$\{(\lambda_0 + T) - P(qL + q^2 M)\} u_1 = \omega^2 (a_1^2 + 2a_0 a_1)(u_0 + u_1) + \mathscr{F}_0(q, a_0 + a_1, u_0 + u_1). \tag{7.11}$$

Линейный оператор из левой части (7.11) самосопряжен и фредгольмов в L_2 [7]; его ядро одномерно и порождено функцией u_0. Следовательно, условие разрешимости задачи (7.11) имеет вид

$$\omega^2 \big(a_1^2 + 2a_0 a_1\big) \|u_0\|_2^2 + (\mathscr{F}_0(q, a_0 + a_1, u_0 + u_1), u_0) = 0. \tag{7.12}$$

Здесь учтено, что $(u_0, u_1) = 0$. Поскольку оператор $\mathscr{F}_0$ определен только на функциях из $E^s(\rho)$ с $s > 4$, решение (7.3) ищется в подпространстве $E^s(\rho)$ пространства L_2.

Схема решения задачи (7.11), (7.12) такова: сначала устанавливаются существование и единственность функции $a_1(q, u_1)$, обращающей (7.12) в тождество при достаточно малых $q > 0$ и $u_1 \in B^s_\rho(\mathscr{R})$, где $\mathscr{R} = O(q^{5/2})$. Затем к уравнению (7.11) (с учетом зависимости a_1 от q и u_1) применяется метод сжимающих отображений.

7.3. Оценки операторов.

Лемма 7.1. *При отличных от нуля q оператор $\lambda_0 + T : E^s(\rho) \to E^{s-3}(\rho)$ имеет ограниченный обратный:*

$$|(\lambda_0 + T)^{-1}|_{E^{-3}(\rho)} \leq C/q^2,$$

где $0 \leq \rho \leq q\nu_*$.

Доказательство. Существование $(\lambda_0 + T)^{-1}$ было установлено в [7]. Там же было показано, что собственное число линейной задачи определяется из уравнения $\lambda_0 = -t(iq\mu)$, где $\mu = \mu(q)$ — гладкая функция с областью значений $(\nu_*/2, 3\nu_*/2)$, а показатель экспоненциального убывания ρ лежит в $[0, q\nu_*/4]$.

Для символа $t(\xi) = \left[1 + \sigma^2\theta_1^2(\xi)\right]\theta_1(\xi)\,\mathrm{th}\,\theta_1(\xi)$ оператора T справедлива оценка $|t(\xi)| = O(|\lambda_1^3(\xi)|)$ при $|\operatorname{Re}\xi| \to \infty$. Следовательно, величина $|(\lambda_0 + T)^{-1}|_{E^{-3}(\rho)}$ ограничена. Из принципа максимума для аналитических функций вытекают неравенства

$$|(\lambda_0 + T)^{-1}|_{E^{-3}(\rho)} \leq \sup_{|\operatorname{Im}\xi| \leq q\nu_*/4} \left| \frac{\lambda_1^3(\xi)}{t(iq\mu) - t(\xi)} \right| \leq \frac{C}{q^2}.$$

Лемма доказана.

Лемма 7.2. *Пусть $s > 4$. Тогда*

(а) *существует $q_* > 0$ такое, что для всех $q \in (0, q_*)$, $u^i \in B^s_\rho(\mathscr{R})$ $(i = 1, 2)$, где $\mathscr{R} = O(q^{5/2})$, и ограниченных некоторой конечной постоянной C_a чисел a_i, определено отображение $\mathscr{F}_0$, для которого выполняется равномерная оценка*

$$\|\mathscr{F}_0(q, a_1, u^1) - \mathscr{F}_0(q, a_2, u^2)\|_{E^s(\rho)} \leq Cq^{5/2}(\|u^1 - u^2\|_{E^s(\rho)} + q^{5/2}|a_1 - a_2|);$$

(б) *$\mathscr{F}_0(q, a, 0) = 0$ для всех $q \in (0, q_*)$, $|a| \leq C_a < \infty$.*

Доказательство. Уменьшая q, можно добиться, что задачи (1.7), (3.2) и (6.2) будут разрешимы в соответствующих пространствах при указанных u^i $(i = 1, 2)$. Действие оператора $\mathscr{F}_0$ на тройку (q, a, u) представимо в виде $\mathscr{F}_0(q, a, u) = \sum_{i=1}^{3} Y_i$, где

$$\begin{aligned}
Y_1 &= -ia\omega J(q, \Psi(q, a, \varphi^{(0)} + \Theta(q, a, \varphi^{(0)})), \varphi^{(0)} + \Theta(q, a, \varphi^{(0)})),\\
Y_2 &= PH(q, \Psi(q, a, \varphi^{(0)} + \Theta(q, a, \varphi^{(0)})))\langle \varphi^{(0)} + \Theta(q, a, \varphi^{(0)})\rangle,\\
Y_3 &= -PK^{(3)}(q, \Psi(q, a, \varphi^{(0)} + \Theta(q, a, \varphi^{(0)})))\langle \varphi^{(0)} + \Theta(q, a, \varphi^{(0)})\rangle,
\end{aligned}$$

$\varphi^{(0)}(x, y) = (e^{i\omega y} - e^{-i\omega y})u(x)$. Для сокращения выкладок введем классы нелинейных отображений $\Gamma^\alpha(s, m)$.

Функция $\mathscr{A}(q,a,u)$, заданная в области $(0,q_*)\times(-C_a,C_a)\times B^s_\rho(Cq_*^\alpha)$, где $q_*>0$ достаточно мало, C и C_a — положительные конечные константы, принадлежит классу $\Gamma^\alpha(s,m)$, если

(а) для всех допустимых q, a_i, u^i $(i=1,2)$

$$\|\mathscr{A}(q,a_1,u^1)-\mathscr{A}(q,a_2,u^2)\|_{E^{s-m}(\rho)}\le Cq^\alpha(q^\alpha|a_1-a_2|+\|u^1-u^2\|_{E^s(\rho)});$$

(б) $\mathscr{A}(q,a,0)=0$ при $q\in(0,q_*)$, $|a|\le C_a$.

Поскольку операторы J, H лежат в соответствующих классах Λ_0^α, а $K^{(3)}\in\Lambda_0^3(V_1^s,V_1^{s-1})$, то в силу теорем 3.3, 4.1 и 6.1 справедливы включения $Y_1\in\Gamma^{5/2}(s,2)$, $Y_2,Y_3\in\Gamma^{5/2}(s,3)$, что доказывает лемму.

7.4. Уравнение на «собственное число».

Условие разрешимости (7.12) может быть записано в виде

$$a_1=\Upsilon(q,a_1,u_1) \tag{7.13}$$

с функцией

$$\Upsilon(q,a_1,u_1)=-\frac{a_1^2}{2a_0\omega^2}-\frac{1}{2a_0\omega^2\|u_0\|_2^2}(\mathscr{F}_0(q,a_0+a_1,u_0+u_1),u_0).$$

Лемма 7.3. *Существует $q_*>0$ такое, что при $q\in(0,q_*)$ отображение $\Upsilon(q,\cdot,u_1)$ является сжимающим для $u_1\in B^s_\rho(\mathscr{R})$, где $\mathscr{R}=O(q^{5/2})$, и переводит отрезок $[-Cq^{5/2},Cq^{5/2}]$ с некоторым $C>0$ в себя.*

Доказательство. Приближенная скорость волны a_0 равна $\sqrt{t(iq\mu)}/\omega$, где $\mu=\mu(q)$. При малых q это величина порядка $\sqrt{[(1+\sigma^2\omega^2)\,\mathrm{th}\,\omega]/\omega}$. Таким образом, если ω положительна, то скорость a_0 ограничена снизу некоторой постоянной, не зависящей от q. Применяя к модулю разности значений функции Υ лемму 7.2, а также неравенства (7.8), (7.9) и Коши — Шварца, приходим к оценке

$$|\Upsilon(q,a_1,u_1)-\Upsilon(q,\tilde a_1,\tilde u_1)|\le C(q^{5/2}|a_1-\tilde a_1|+\|u_1-\tilde u_1\|_{E^s(\rho)}).$$

Константа C не зависит от q, поэтому функция Υ является сжимающей по a_1 при малых q. Аналогично получаем, что для указанных q,a_1,u_1 верно неравенство

$$|\Upsilon(q,a_1,u_1)|\le C(q^{5/2}|a_1|+\|u_0\|_{E^s(\rho)}+\|u_1\|_{E^s(\rho)}).$$

Отсюда ясно, что при малых $q>0$ отображение $\Upsilon(q,\cdot,u_1)$ переводит отрезок $[-Cq^{5/2},Cq^{5/2}]$ с некоторым $0<C<\infty$ в себя для всех u_1 из указанного шара. Лемма доказана.

Применим к уравнению (7.13) метод сжимающих отображений. Справедлива

Теорема 7.2. *Уравнение (7.13) разрешимо относительно a_1 для всех достаточно малых $q>0$ и $u_1\in B^s_\rho(\mathscr{R})$, где $\mathscr{R}=O(q^{5/2})$. При этом функция $a_1=a_1(q,u_1)$ равномерно непрерывна по u_1 : $|a_1(q,u_1)-a_1(q,\tilde u_1)|\le C\|u_1-\tilde u_1\|_{E^s(\rho)}$ и удовлетворяет оценке $|a_1(q,u_1)|\le q^{5/2}$. Постоянная C не зависит от q.*

7.5. Собственная функция задачи (7.11).

Положив $a_1 = a_1(q, u_1)$, уравнение (7.11) можно решать независимо от (7.12). Применение линейного оператора $(\lambda_0 + T)^{-1}$ к обеим частям уравнения (7.11) дает равенство

$$u_1 = \mathscr{Z}(q, u_1). \tag{7.14}$$

Нелинейный оператор $\mathscr{Z}$ определяется так:

$$\mathscr{Z}(q, u_1) = T_0(q, \mu)u_1 + T_1(q, \mu)u_1 \\ + \omega^2\big(a_1^2 + 2a_0a_1\big)(\lambda_0 + T)^{-1}\langle u_0 + u_1\rangle + \mathscr{G}(q, a_0 + a_1, u_0 + u_1),$$

где $\mathscr{G} = (\lambda_0 + T)^{-1}\mathscr{F}_0$.

Лемма 7.4. *Пусть $s > 4$. Существует $q_* > 0$ такое, что при $q \in (0, q_*)$, $u_1 \in B^s_\rho(\mathscr{R})$, где $\mathscr{R} = O(q^{5/2})$, определен оператор $\mathscr{Z} : (0, q_*) \times B^s_\rho(\mathscr{R}) \to E^s(\rho)$, который для каждого фиксированного q является сжимающим по u_1; его значение на паре (q, u_1) принадлежит замкнутому шару $B^s_\rho(\mathscr{R})$.*

Доказательство. К уравнению (7.14) будет применен метод сжимающих отображений. Наибольшую сложность при доказательстве сжимающих свойств $\mathscr{Z}$ представляет оценка оператора T_0 в классах $E^s(\rho)$. Это связано с тем, что на произвольных функциях из L_2 норма этого оператора растет с уменьшением q как $q^{-1/2}$ [7]. В связи с этим доказательство разбивается на несколько шагов.

1. Оценка оператора T_0. Имеем

$$T_0(q, \mu)u_1 = \frac{q(\lambda_0 + T)^{-1}P_1\langle\mathscr{H}\rangle}{\widehat{\mathscr{H}}(0)}(u_1, \mathscr{H}).$$

Как уже отмечалось при выводе неравенства (7.8), модуль функции $t_1(\xi, q\mu)$ ограничен снизу. Используя неравенство $\widehat{\mathscr{H}}(0) > 0$, получаем

$$\|T_0(q, \mu)u_1\|^2_{E^s(\rho)} \le C|(u_1, \mathscr{H})|^2 \sup_{\xi\in\Pi_\rho} \int \frac{|q\lambda_1^s(\xi)p_1(\xi)\widehat{\mathscr{H}}(\xi)|^2}{|\xi^2 + q^2\mu^2|^2}\, d\operatorname{Re}\xi.$$

Оценим сверху $|(u_1, \mathscr{H})|$. Поскольку $(u_1, u_0) = 0$, из уравнения (7.14) вытекает равенство

$$-\frac{\big(q(\lambda_0 + T)^{-1}P_1\langle\mathscr{H}\rangle, u_0\big)}{\widehat{\mathscr{H}}(0)}(u_1, \mathscr{H}) = \omega^2\big(a_1^2 + 2a_0a_1\big)\big((\lambda_0 + T)^{-1}\langle u_0 + u_1\rangle, u_0\big) \\ + (T_1(q, \mu)u_1, u_0) + (\mathscr{G}(q, a_0 + a_1, u_0 + u_1), u_0). \tag{7.15}$$

Переходом к записи скалярного произведения в L_2 через образы Фурье с учетом равномерной сходимости соответствующих интегралов устанавливается, что функция $Y(q) = q^{-1}((\lambda_0 + T)^{-1}P_1\langle\mathscr{H}\rangle, v_0)$ непрерывна и $\lim\limits_{q\to 0}|Y(q)| = Y_0 > 0$. Следовательно, при малых $q > 0$ справедлива оценка $0 < Y_0/2 \le |Y(q)| \le 2Y_0 < \infty$.

Далее, поскольку $v_1 \in E^s(\rho)$, то для всех $\xi \in \mathbb{R}$

$$|\hat{v}_1(\xi)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-q\nu_*|x|/4}|e^{q\nu_*|x|/4}v_1(x)|\, dx \\ \le \frac{C}{\sqrt{q\nu_*}}\|v_1\|_{E^s(\rho)} \le C\|v_0\|_{E^s(\rho)} \le Cq^{5/2}.$$

В силу экспоненциального убывания модуля $\widehat{\mathscr{H}}(\xi)$ на бесконечности и последнего неравенства имеем

$$|(q(\lambda_0+T)^{-1}P_1\langle\mathscr{H}\rangle, v_1)| \le \int \left|\frac{qp_1(\xi)\widehat{\mathscr{H}}(\xi)\hat{v}_1(\xi)}{(\xi^2+q^2\mu^2)t_1(\xi,q\mu)}\right| d\xi \le C\sup_{\xi\in\mathbb{R}}|\hat{v}_1(\xi)| \le Cq^{5/2}.$$

При выводе этой оценки в интеграле была сделана замена переменных $\xi = q\mu\kappa$.

Из вышесказанного следует, что при малых $q>0$ верно неравенство

$$\left|\frac{(q(\lambda_0+T)^{-1}P_1\langle\mathscr{H}\rangle, u_0)}{\widehat{\mathscr{H}}(0)}\right| \ge Cq^2(1-\sqrt{q}) \ge Cq^2. \tag{7.16}$$

Разделив уравнение (7.15) на отличный от нуля коэффициент при $(u_1,\mathscr{H})$, из равенства (7.15) в силу оценки (7.16) получаем неравенство

$$|(u_1,\mathscr{H})| \le Cq^{-2}\big|(T_1(q,\mu)u_1,u_0) + \omega^2(a_1^2+2a_0a_1)((\lambda_0+T)^{-1}\langle u_0+u_1\rangle, u_0) \\ + (\mathscr{G}(q,a_0+a_1,u_0+u_1),u_0)\big|. \tag{7.17}$$

Применяя к скалярным произведениям из правой части (7.17) неравенство Коши — Шварца и используя леммы 7.1 и 7.2, приходим к оценке

$$|(u_1,\mathscr{H})| \le Cq(\|u_0\|_{E^s(\rho)} + \|u_1\|_{E^s(\rho)}). \tag{7.18}$$

Для разности $w = u_1 - \tilde{u}_1$ путем аналогичных рассуждений можно получить, что $|(w,\mathscr{H})| \le Cq\|w\|_{E^s(\rho)}$.

Таким образом, если $(u_1,u_0)=0$, то для оператора T_0 одновременно выполнены неравенства

$$\|T_0(q,\mu)u_1\|_{E^s(\rho)} \le C\sqrt{q}\big(\|u_0\|_{E^s(\rho)} + \|u_1\|_{E^s(\rho)}\big),$$
$$\|T_0(q,\mu)w\|_{E^s(\rho)} \le C\sqrt{q}\|w\|_{E^s(\rho)},$$

где $w = u_1 - \tilde{u}_1$, т. е. на подпространстве, ортогональном собственным функциям линейной задачи, норма T_0 уменьшается со скоростью $q^{1/2}$.

2. Сжатие по u_1. Разность $\mathscr{Z}(q,u_1) - \mathscr{Z}(q,\tilde{u}_1)$ запишем в виде

$$\mathscr{Z}(q,u_1) - \mathscr{Z}(q,\tilde{u}_1) = \sum_{i=1}^{6} X_i(q,u_1,\tilde{u}_1),$$

где

$$X_1(q,u_1,\tilde{u}_1) = T_0(q,\mu)\langle u_1-\tilde{u}_1\rangle, \quad X_2(q,u_1,\tilde{u}_1) = T_1(q,\mu)\langle u_1-\tilde{u}_1\rangle,$$

$$X_3(q,u_1,\tilde{u}_1) = \omega^2\{[2a_0 + a_1(q,u_1) + a_1(q,\tilde{u}_1)] \\ \times (a_1(q,u_1) - a_1(q,\tilde{u}_1))\}(\lambda_0+T)^{-1}\langle u_0+u_1\rangle,$$

$$X_4(q,u_1,\tilde{u}_1) = \omega^2[a_1^2(q,\tilde{u}_1) + 2a_0a_1(q,\tilde{u}_1)](\lambda_0+T)^{-1}\langle u_1-\tilde{u}_1\rangle,$$
$$X_5(q,u_1,\tilde{u}_1) = \mathscr{G}(a_0+a_1(q,u_1),u_0+u_1) - \mathscr{G}(a_0+a_1(q,\tilde{u}_1),u_0+u_1),$$
$$X_6(q,u_1,\tilde{u}_1) = \mathscr{G}(a_0+a_1(q,\tilde{u}_1),u_0+u_1) - \mathscr{G}(a_0+a_1(q,\tilde{u}_1),u_0+\tilde{u}_1).$$

Оценим каждое слагаемое $X_i(q,u_1,\tilde{u}_1)$, $i=1\div 6$. Как и ранее, для сокращения выкладок введем классы нелинейных сжимающих отображений.

Будем говорить, что функция $f(q,u_1,u_2)$ со значениями из $E^s(\rho)$ и областью определения $(0,q_*)\times B^s_\rho(\mathscr{R})\times B^s_\rho(\mathscr{R})$, где $q_*\in(0,1)$ и $\mathscr{R}>0$ — некоторое положительное число, *принадлежит классу* $\mathscr{C}_\rho^s(\alpha)$, если при всех допустимых q, u_1, u_2 выполняется неравенство

$$\|f(q, u_1, u_2)\|_{E^s(\rho)} \le C q^\alpha \|u_1 - u_2\|_{E^s(\rho)}$$

с не зависящей от q постоянной C.

Таким образом, для доказательства сжимающих по u_1 свойств отображения $\mathscr{Z}(q, u_1)$ достаточно проверить, что при $u_1, \tilde u_1 \in B_\rho^s(\mathscr{R})$, где $\mathscr{R} = O(q^{5/2})$, справедливы включения $X_i \in \mathscr{C}_\rho^s(\alpha_i)$ с $\alpha_i > 0$, $i = 1 \div 6$.

Из оценок оператора T_0 следует, что $\|X_1\|_{E^s(\rho)} \le C_s\sqrt{q}\|u_1 - \tilde u_1\|_{E^s(\rho)}$, или $X_1 \in \mathscr{C}_\rho^s(1/2)$. Для оператора T_1 была получена оценка [7] $\|T_1(q,\mu)u\|_{E^s(\rho)} \le C_s\sqrt{q}\|u\|_2$. Поскольку при $s \ge 0$ и $0 \le \rho \le q\nu_*/4$ L_2-норма оценивается через норму в $E^s(\rho)$, имеем $X_2 \in \mathscr{C}_\rho^s(1/2)$.

Далее, в силу равномерной непрерывности a_1 по u_1 и оценки нормы оператора $(\lambda_0 + T)^{-1}$ (лемма 7.1 и теорема 7.2) имеем $X_3 \in \mathscr{C}_\rho^s(1/2)$. Также из оценки модуля функции a_1 вытекает, что

$$\|X_4\|_{E^s(\rho)} \le C\sqrt{q}\|u_1 - \tilde u_1\|_{E^{s-3}(\rho)} \le C\sqrt{q}\|u_1 - \tilde u_1\|_{E^s(\rho)},$$

или $X_4 \in \mathscr{C}_\rho^s(1/2)$.

Оценка слагаемых X_5, X_6 следует из свойств операторов $\mathscr{F}_0$ и $(\lambda_0 + T)^{-1}$ (леммы 7.1, 7.2): $X_5, X_6 \in \mathscr{C}_\rho^s(1/2)$. Таким образом, при достаточно малых $q > 0$ оператор $\mathscr{Z}$ является сжимающим по u_1.

Из определения $\mathscr{Z}$, оценок операторов T_0, T_1, лемм 7.1, 7.2 и теоремы 7.2 следует, что $\|\mathscr{Z}(q, u_1)\|_{E^s(\rho)} \le C\sqrt{q}(\|u_0\|_{E^s(\rho)} + \|u_1\|_{E^s(\rho)})$. Если $u_0 \in B_\rho^s(\mathscr{R})$, то при фиксированном $0 < q \le 1/(9C^2)$ (здесь C — константа из последней оценки) оператор $\mathscr{Z}(q, \cdot)$ переводит шар радиуса $\mathscr{R}/2$ пространства $E^s(\rho)$ в себя. Лемма доказана.

Теорема 7.3. *При всех достаточно малых* $q > 0$ *и* $s > 4$ *задача* (7.3) *имеет нетривиальное решение из шара* $B_\rho^s(\mathscr{R})$, *где* $\mathscr{R} = O(q^{5/2})$ *и* $0 < \rho \le q\nu_*/4$.

Доказательство. Существование следует из теоремы 7.2, леммы 7.4 и принципа сжимающих отображений для уравнения (7.14). При этом функция u_1 определяется однозначно. Покажем, что $u_1 \ne 0$.

Ранее установлено [7], что функция u_0 принадлежит пространствам $E^s(\rho)$ с $s \ge 0$ и $0 \le \rho \le q\nu_*/4$. Согласно этому, теореме 7.2 и уравнению (7.14) при $s > 4$ имеем

$$\|u_1\|_{E^s(\rho)} \le C_s\sqrt{q}\|u_0\|_{E^s(\rho)}.$$

Последняя оценка и условие ортогональности $(u_0, u_1) = 0$ гарантируют, что при малых $q > 0$ решение $u = u_0 + u_1$ уравнения (7.3) нетривиально. Теорема доказана.

В результате показано, что для тяжелой безвихревой идеальной жидкости с капиллярностью при выполнении условий

$$\sigma^2\omega^2 \ge 2, \qquad \int h(x)\,dx > 0$$

подводный хребет является волноводом для нелинейных стационарных поверхностных волн малой (порядка $q^{5/2}$) амплитуды, величина которой экспоненциально убывает в поперечном к хребту направлении. Показатель убывания ρ мал по q и оценивается сверху величиной $q\nu_*/4$, где

$$\nu_* = 8\pi\omega^3 \frac{(1 + \sigma^2\omega^2)\,\hat h(0)}{2\omega(1 + \sigma^2\omega^2) + (1 + 3\sigma^2\omega^2)\operatorname{sh} 2\omega},$$

. Для скорости волны a справедливо представление

$$a^2 = \frac{[\sigma^2(\omega^2 - q^2\nu_*^2) + 1]\sqrt{\omega^2 - q^2\nu_*^2}\,\mathrm{th}\,\sqrt{\omega^2 - q^2\nu_*^2}}{\omega^2} + O\left(\frac{q^5}{\omega^2}\right).$$

8. Приложение 1

Доказательство теоремы 3.3 построено на применении формулы Грина и разложении функций и операторов по малому параметру q. В связи с этим будут востребованы некоторые дополнительные свойства потенциала Φ и операторов F, G. Эти свойства сформулированы в виде двух лемм, которые предшествуют основной части доказательства.

Лемма 8.1. *Относительно операторов F и G верны утверждения:*

1) *в разложениях $F(q,\zeta) = F_0(q) + F_1(q,\zeta)$, $G(q,\zeta) = G_0(q) + G_1(q,\zeta)$, где $F_0(q) = F(q,0)$, $G_0(q) = G(q,0)$, имеют место включения*

$$F_0 \in \Lambda_0(CV_1^s, CV_1^{s-2}), \quad G_0 \in \Lambda_0(CV_1^s, V_1^{s-1}),$$
$$F_1 \in \Lambda_0^\alpha(CV_1^s, CV_1^{s-2}), \quad G_1 \in \Lambda_0^\alpha(CV_1^s, V_1^{s-1})$$

с любым $\alpha \geq 1$,

2) *при $p = 1 \div 3$ для коммутаторов справедливы включения*

$$[D_q^p, F_0(q)] \in \mathscr{L}(CV_1^s, CV_1^{s-2}), \quad [D_q^p, G_0(q)] \in \mathscr{L}(CV_1^s, V_1^{s-1}),$$

где символом D_q обозначен оператор дифференцирования по q.

Доказательство. Уже отмечалось, что операторы F и G представляют собой аналитические функции от искомых функций Φ, ζ, известной функции $qh(x)$ и их производных. Полагая в формулах (3.3), (3.4) $\zeta = 0$, получаем операторы F_0 и G_0, зависящие только от параметра q и функции h. Ясно, что операторы F_1 и G_1 суть также аналитические функции и члены их разложений в степенные ряды по ζ, Φ имеют полную степень не ниже 2. Из вышесказанного вместе со свойствами используемых функциональных пространств (предложения 2.1, 2.2) и оценок сложных аналитических функций [13] следует первое утверждение леммы.

Второе свойство проверяется вычислением. Действительно,

$$\begin{aligned} D_qG_0(q)\Phi = -\frac{\partial}{\partial q}\left\{\frac{qh + q^2h'}{1 - qh}\right\}\Phi_z\bigg|_{z=-1} + \frac{\partial}{\partial q}\{qh'\}\Phi_x\bigg|_{z=-1} \\ - \frac{qh + q^2h'}{1 - qh}D_q\Phi_z\bigg|_{z=-1} + qh'D_q\Phi_x|_{z=-1} \\ = G_0(q)D_q\Phi + \frac{q^2hh' - h - 2qh'}{(1 - qh)^2}\Phi_z\bigg|_{z=-1} + h'\Phi_x|_{z=-1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$[D_q, G_0(q)]\Phi = \frac{q^2hh' - h - 2qh'}{(1 - qh)^2}\Phi_z|_{z=-1} + h'\Phi_x|_{z=-1}.$$

Как и ранее, используя свойства пространств V^s, CV^s и рассматривая оператор $[D_q, G_0(q)]$ как аналитическую функцию от Φ, h и их производных, убеждаемся, что $\big[D_q^p, G_0(q)\big] \in \mathscr{L}\big(CV_1^s, V_1^{s-1}\big)$. Свойства остальных коммутаторов проверяются аналогично. Лемма доказана.

Представим потенциал Φ в виде $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1$, где Φ_0 — решение уравнений (3.2) в частном случае $\zeta = 0$:

$$\Phi_0 = A^{(1)}G_0(q)\Phi_0 + A^{(3)}F_0(q)\Phi_0 + A^{(2)}\varphi.$$

Лемма 8.2. *Производные $D_q^\alpha \Phi_0$, $\alpha = 0 \div 3$, решения задачи (3.2) принадлежат подпространству CV_1^s с оценками $\left\| D_q^\alpha \Phi_0 \right\|_{CV_1^s} \le C_\alpha \|\Phi_0\|_{CV_1^s}$. Постоянная C не зависит от q.*

Доказательство. Согласно замечанию 3.1 функция Φ_0 дифференцируема по параметру q. Из уравнения (3.9) в силу линейности F_0, G_0 по Φ и независимости $A^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$, от q следует равенство

$$D_q\Phi_0 = \{A^{(1)}G_0(q) + A^{(3)}F_0(q)\}D_q\Phi_0 + \{A^{(1)}[D_q, G_0(q)] + A^{(3)}[D_q, F_0(q)]\}\Phi_0. \tag{8.1}$$

Операторы F_0 и G_0 сжимающие при малых q, поэтому для достаточно малых $\varepsilon > 0$ и $v \in CV_1^s$ будет справедливо неравенство

$$\|\{A^{(1)}G_0(q) + A^{(3)}F_0(q)\}v\|_{CV_1^s} \le 1/2\|v\|_{CV_1^s}. \tag{8.2}$$

Используя свойства коммутаторов $[D_q, G_0(q)]$, $[D_q, F_0(q)]$, оценку (8.2) и уравнение (8.1), приходим к утверждению леммы относительно $D_q\Phi_0$.

Проведенные выше рассуждения годятся и для оценки норм $D_q^\alpha\Phi_0$, $\alpha = 2, 3$. Лемма доказана.

Подставляя $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1$ в (3.8), получаем уравнение для функции Φ_1:

$$\Phi_1 = A^{(1)}G(q,\zeta)\Phi_1 + A^{(3)}F(q,\zeta)\Phi_1 + A^{(1)}G_1(q,\zeta)\Phi_0 + A^{(3)}F_1(q,\zeta)\Phi_0. \tag{8.3}$$

Согласно лемме 8.1 операторы F_1, G_1 лежат в соответствующих классах Λ_0^α, откуда вытекает справедливость неравенства

$$\|A^{(1)}G_1(q,\zeta)\Phi_0 + A^{(3)}F_1(q,\zeta)\Phi_0\|_{CV_1^s} \le C_m\varepsilon_*\|\Phi_0\|_{CV_1^s} \le C_m\varepsilon_*\|\varphi\|_{V_1^s}.$$

Здесь $\varepsilon_* = \max\{\|\zeta\|_{V_2^s}, \|\varphi\|_{V_1^s}\} = O(q^\alpha)$, где α — любое число, большее 1.

Из (8.3) вместе с (8.2) и последнего неравенства следует оценка на Φ_1:

$$\|\Phi_1\|_{CV_1^s} \le C\varepsilon_*\|\varphi\|_{V_1^s}. \tag{8.4}$$

Далее, в силу свойств операторов F и G из уравнения (8.3) получим оценку для функции $\Phi_1 = \Phi_1(q,\zeta,\varphi)$:

$$\|\Phi_1(q,\zeta_1,\varphi_1) - \Phi_1(q,\zeta_2,\varphi_2)\|_{CV_1^s} \le C\varepsilon^*(\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{V_1^s} + \|\zeta_1 - \zeta_2\|_{V_2^s}).$$

Доказательство теоремы 3.3.

1. Частный случай $\zeta = 0$. Функция

$$\Phi_0 = \sum_{k\ne 0} e^{ik\omega y}\Phi_k^0(x,z)$$

в Ω удовлетворяет уравнениям

$$\Delta\Phi_0 = 0,\ (x,y,z) \in \Omega; \quad \Phi_0 = \varphi,\ z = 0; \quad \frac{\partial\Phi_0}{\partial\boldsymbol{n}} = 0, \quad z = -1 + qh(x).$$

Введем вспомогательную функцию

$$E_m(x,y,z,\xi) = \frac{\omega}{(2\pi)^{3/2}}e^{-i(m\omega y + x\xi)}\frac{\operatorname{ch}\{\theta_m(\xi)(1+z)\}}{\operatorname{ch}\theta_m(\xi)}.$$

Легко убедиться в том, что для целых $m \ne 0$ будет $\Delta E_m = 0$ в Ω. По формуле Грина имеем

$$0 = \int\limits_\Sigma (E_m\Delta\Phi_0 - \Phi_0\Delta E_m)\,d\Sigma = \int\limits_{\partial\Sigma}\left\{E_m\frac{\partial\Phi_0}{\partial\boldsymbol{n}} - \Phi_0\frac{\partial E_m}{\partial\boldsymbol{n}}\right\}dS,$$

где $\Sigma = \{(x,y,z) \in \Omega | y \in (0, 2\pi/\omega)\}$.

Заметим, что в силу периодичности подынтегральных функций по переменной y интеграл по границе области Σ есть сумма интегралов по невозмущенной свободной поверхности $\partial^+\Sigma = \{(x,y,z) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in (0,2\pi/\omega),\ z = 0\}$ и дну $\partial^-\Sigma = \{(x,y,z) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in (0,2\pi/\omega),\ z = -1 + qh(x)\}$.

Поскольку

$$\int_0^{2\pi/\omega} e^{i\omega y(k-m)}\, dy = \frac{2\pi}{\omega}\delta_{km},$$

где δ_{km} — символ Кронекера, то

$$\int_{\partial^+\Sigma} \left\{E_m \frac{\partial \Phi_0}{\partial \boldsymbol{n}} - \Phi_0 \frac{\partial E_m}{\partial \boldsymbol{n}}\right\} dS = D_z \widehat{\Phi}^0_m\big|_{z=0} - \widehat{\varphi}_m(\xi)\theta_m(\xi)\,\mathrm{th}\,\theta_m(\xi).$$

Аналогично

$$\int_{\partial^-\Sigma} \left\{E_m \frac{\partial \Phi_0}{\partial \boldsymbol{n}} - \Phi_0 \frac{\partial E_m}{\partial \boldsymbol{n}}\right\} dS$$
$$= \int_{z=-1+qh(x)} \Phi^0_m \left\{\frac{\partial E_m}{\partial z} - qh' \frac{\partial E_m}{\partial x}\right\} (1 + q^2 h'^2)^{1/2}\, dx.$$

Представим

$$K(q,0)\varphi = \sum_{m\neq 0} e^{im\omega y} K_m \varphi_m(x),$$

где операторы K_m зависят только от q и $h(x)$. «Распрямляя» границу области интегрирования согласно формулам замены переменных (3.1) (положив в них $\zeta = 0$), получаем выражение для $\widehat{K_m\varphi}_m(\xi)$:

$$\widehat{K_m\varphi}_m(\xi) = \hat{\varphi}_m(\xi)\theta_m(\xi)\,\mathrm{th}\,\theta_m(\xi)$$
$$- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\bar{z}=-1} \frac{\Phi^0_m(x,z)}{\mathrm{ch}\,\theta_m(\xi)} \{\theta_m(\xi)\,\mathrm{sh}[qh(\bar{x})\theta_m(\xi)]$$
$$+ iq\xi h'(\bar{x})\,\mathrm{ch}[qh(\bar{x})\theta_m(\xi)]\}(1 + q^2 h(\bar{x}))^{1/2} e^{-i\bar{x}\xi}\, d\bar{x}.$$

Разложение правой части этого равенства по степеням q до квадратичных членов и интегрирование по частям «коэффициентов» разложения с учетом введенных обозначений дают

$$K^{(0)} = |\nabla|\,\mathrm{th}\,|\nabla|,\ K^{(1)} = D_x\Lambda h D_x \Lambda + D_y^2 \Lambda h \Lambda,\ K^{(2)} = D_x \Lambda h D_x \mathscr{K} + D_y^2 \Lambda h \mathscr{K},$$

где $\mathscr{K}\varphi = D_q \Phi_0$ при $q = 0$, $z = -1$. При получении этих формул была использована непрерывная зависимость функции Φ_0 от параметра q. Свойства функции Φ_0 (теорема 3.1 и лемма 8.2) гарантируют корректность определения $\mathscr{K}$ на функциях из V_1^s с оценкой $\|\mathscr{K}\varphi\|_{V_1^s} \leq C_s \|\varphi\|_{V_1^s}$. Также следует отметить, что в силу свойств оператора Λ порядок $K^{(1)}$ и $K^{(2)}$ равен $-\infty$.

Остаточный член разложения записывается в интегральной форме $q^2 \widehat{S_m\varphi}_m(\xi)$, где

$$\widehat{S_m\varphi}_m(\xi) = \int_0^q \int_{\bar{z}=-1} S^{(1)}_m S^{(2)}_m e^{-i\bar{x}\xi}\, d\bar{x} d\bar{q}.$$

Сложные функции $S_m^{(j)}$, $j=1,2$, имеют свойства:

(а) $S_m^{(1)}$ — аналитическая функция параметра $\bar q\in[0,q]$, производных функции Φ_m^0 по $\bar q$ до третьего порядка включительно, функции $h(x)$ и ее производной;

(б) $S_m^{(1)}$ линейно зависит от $D_q^\alpha\Phi_m^0$, $0\le\alpha\le3$, и для $\bar q\in[0,q]$ справедлива равномерная оценка

$$\big\|S_m^{(1)}\big\|_2\le C_s\sum_{\alpha=0}^{3}\big\|D_{\bar q}^\alpha\Phi_m^0\big\|_{E_m^s(\rho)};$$

(в) $S_m^{(2)}$ — функция от h, h', переменных ξ, x и параметра $\bar q$; ее носитель содержится в носителе функции $h(x)$ при всех $\bar q\in[0,q]$;

(г) равномерно по $\xi\in\Pi_\rho$ и $\bar q\in[0,q]$, где $0\le\rho<\omega/2$, выполняется неравенство

$$\big\|S_m^{(2)}e^{\tau\bar x}\big\|_2\le C_{h,\tau}\frac{|\theta_m(\xi)|^4}{|\operatorname{ch}\{\theta_m(\xi)/2\}|}.$$

Пусть $\xi\in\Pi_\rho$, $\tau=\operatorname{Im}\xi$. Согласно вышеперечисленным свойствам функций $S_m^{(j)}$, $j=1,2$, имеем

$$|\widehat{S_m\varphi}_m(\xi)|\le\int_0^q\big\|S_m^{(1)}\big\|_2\big\|S_m^{(2)}e^{\tau\bar x}\big\|_2\,d\bar q\le qC_{s,h}\frac{|\theta_m(\xi)|^4}{|\operatorname{ch}\{\theta_m(\xi)/2\}|}\sum_{\alpha=0}^{3}\big\|D_{\bar q}^\alpha\Phi_m^0\big\|_{E_m^s(\rho)}.$$

В силу того, что норма в $E_m^s(\rho)$ не превосходит нормы в CV^s, используя теорему 3.2 и лемму 8.2, получаем оценку

$$\|S\varphi\|^2_{V_1^{s-1}}\le q^2C_{s,h}\|\varphi\|^2_{V_1^s}\sum_{m\ne0}\varkappa_m^2,$$

где

$$\varkappa_m=\sup_{|\operatorname{Im}\xi|\le\rho}\left\|\lambda_m^{s-1}(\xi)\frac{\theta_m^4(\xi)}{\operatorname{ch}\{\theta_m(\xi)/2\}}\right\|_2,$$

и за счет экспоненциального стремления $|\operatorname{ch}\{\theta_m(\xi)/2\}|^{-1}$ к нулю при $|\operatorname{Re}\xi|+|n|\to\infty$ ряд $\sum\limits_m\varkappa_m^2$ сходится. Отсюда вытекает неравенство

$$\|S\varphi\|_{V_1^{s-1}}\le qC_{h,s}\|\varphi\|_{V_1^s}.$$

Используя линейную зависимость функции $S_m^{(1)}$ от $D_{\bar q}^\alpha\Phi_m^0$, приходим к заключению, что

$$q^2S\in\Lambda_0^3(V_1^s,V_1^{s-1}).\tag{8.5}$$

Таким образом, разложение оператора $K(q,\zeta)$ в частном случае $\zeta=0$ получено.

2. Общий случай. Ввиду разложения $\Phi=\Phi_0+\Phi_1$ и тождества

$$\frac{1}{1+\zeta-qh}=\frac{1}{1-qh}-\frac{\zeta}{(1-qh)(1-qh+\zeta)}$$

имеем

$$\begin{aligned}K(q,\zeta)\varphi&\equiv(1+\zeta-qh)^{-1}D_{\bar z}\Phi|_{\bar z=0}\\&=K(q,0)\varphi-\frac{\zeta}{(1-qh)(1+\zeta-qh)}D_{\bar z}\Phi_0\Big|_{\bar z=0}+\frac{D_{\bar z}\Phi_1\big|_{\bar z=0}}{1+\zeta-qh}\\&=K^{(0)}\varphi+qK^{(1)}\varphi+q^2K^{(2)}\varphi+K^{(3)}(q,\zeta)\varphi.\end{aligned}$$

Здесь

$$K^{(3)}(q,\zeta)\varphi = q^2 S\varphi - \frac{\zeta}{(1-qh)(1+\zeta-qh)} D_{\bar z}\Phi_0\Big|_{\bar z=0} + \frac{D_{\bar z}\Phi_1|_{\bar z=0}}{1+\zeta-qh}.$$

Из (8.5), оценки на Φ_1 в CV_1^s и свойств отображения $\varPhi$ следует включение $K^{(3)} \in \Lambda_0^3(V_1^s, V_1^{s-1})$, что заканчивает доказательство теоремы.

9. Приложение 2

Доказательство теоремы 7.1 состоит в проверке условий теоремы 1 из [7]. Свойства операторов T, P_1 и L были изучены ранее [7]. Остается показать, что оператор M представим в виде

$$\widehat{Mu}(\xi) = m_1(\xi)\int m_2(\xi,\eta)\widehat{M_1 u}(\eta)\,d\eta,$$

где

1) m_i — регулярные аналитические функции комплексных переменных $\xi, \eta \in \Pi_\rho$;

2) функция $|m_1(\xi)|$ убывает быстрее любой степени $|\xi|^{-1}$ при $|\operatorname{Re}\xi| \to \infty$, $\xi \in \Pi_\rho$;

3) для линейного оператора M_1 и функции m_2 справедливы оценки $|\widehat{M_1 u}(\eta)| \le C\mathscr{N}(u)$ для всех $\eta \in \mathbb{R}$, где $\mathscr{N}(u) = \min\{\|\hat u\|_1, \|u\|_2\}$, а для функции $m_2(\xi,\eta)$ верно неравенство

$$\int |m_2(\xi,\eta)|d\eta \le C|\lambda^2(\xi)|, \quad \xi \in \Pi_\rho.$$

Согласно представлению оператора нормальной производной (теорема 3.3)

$$\widehat{Mu}(\xi) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}\operatorname{ch}\theta_1(\xi)}\int (\xi\eta+\omega^2)\hat h(\xi-\eta)\widehat{\mathscr{K}_1 u}(\eta)\,d\eta,$$

где $\mathscr{K}_1 = e^{-i\omega y}\mathscr{K}e^{i\omega y}$. Обозначим $m_1(\xi) = 1/\operatorname{ch}\theta_1(\xi)$, $m_2(\xi,\eta) = (\xi\eta+\omega^2)\hat h(\xi-\eta)$.

Утверждения 1, 2 леммы очевидны. Для доказательства последнего утверждения потребуется явный вид оператора $\mathscr{K}_1$.

Дифференцируя уравнение (3.8) по q, в пределе при $q \to 0$, $z \to -1$ получим $\widehat{\mathscr{K}_1 u}(\eta) = \sum\limits_{i=1}^{4} Y_i(\eta)$, где

$$Y_1(\eta) = \frac{\operatorname{th}\theta_1(\eta)}{\theta_1(\eta)}\int \frac{(\eta-\gamma)\hat h(\eta-\gamma)\gamma\hat u(\gamma)}{\operatorname{ch}\theta_1(\gamma)}\,d\gamma,$$

$$Y_2(\eta) = \int \frac{\theta_1^2(\gamma)\hat h(\eta-\gamma)\hat u(\gamma)}{\operatorname{ch}\theta_1(\gamma)\operatorname{ch}\theta_1(\eta)}\frac{\operatorname{ch}\theta_1(\gamma)-\operatorname{ch}\theta_1(\eta)}{\eta^2-\gamma^2}\,d\gamma,$$

$$Y_3(\eta) = 2\int \frac{\theta_1^2(\gamma)\hat h(\eta-\gamma)\hat u(\gamma)}{\operatorname{ch}\theta_1(\gamma)\operatorname{ch}\theta_1(\eta)}\frac{\operatorname{ch}\theta_1(\eta)-\operatorname{ch}\theta_1(\gamma)}{\eta^2-\gamma^2}\,d\gamma,$$

$$Y_4(\eta) = -\int \frac{\theta_1^2(\gamma)\hat h(\eta-\gamma)\hat u(\gamma)}{\theta_1(\eta)\operatorname{ch}\theta_1(\gamma)}\operatorname{th}\theta_1(\eta)\,d\gamma.$$

Используя формулу Лагранжа, а также характер поведения гиперболических функций при действительных значениях аргумента, приходим к неравенствам

$$|Y_i(\eta)| \le C_i \int \lambda_1^2(\eta-\gamma)|\hat{h}(\eta-\gamma)\hat{u}(\gamma)|\,d\gamma, \quad i = 1 \div 4.$$

Пусть $\mathscr{N}(u) = \|\hat{u}\|_1$. Согласно теореме Пэли — Винера [11] модуль функции $\hat{h}(\xi)$ убывает быстрее любой степени $|\xi|^{-1}$. Тогда $\sup\limits_{\eta\in\mathbb{R}} \lambda_1^2(\eta)|\hat{h}(\eta)| \le C < \infty$ и

$$|Y_i(\eta)| \le C_h \mathscr{N}(u). \tag{9.1}$$

В случае $\mathscr{N}(u) = \|u\|_2$ требуемая оценка (9.1) следует из свойства свертки: $\left|\lambda_1^2\hat{h} * \hat{u}\right| \le C_h\|u\|_2$. Доказательство теоремы завершает цепочка неравенств

$$\int |m_2(\xi,\eta)|\,d\eta = \int |(\xi\eta+\omega)\hat{h}(\xi-\eta)|\,d\eta \le |\xi| \int |(\eta-\xi)\hat{h}(\xi-\eta)|\,d\eta + (|\xi|^2+\omega^2)\int |\hat{h}(\xi-\eta)|\,d\eta \le C_h\left|\lambda_1^2(\xi)\right|.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Munk W. H., Arthur R. S.* Wave intensity along a refracted ray. U. S. National Bureau of Standarts. Gravity Waves, NBS Circular 521 1952.
2. *Сунь Цао* О волноводе поверхностных волн тяжелой жидкости // Изв. СОАН СССР. 1959. № 5. С. 20–25.
3. *Гарипов Р.М.* Неустановившиеся волны над подводным хребтом // Докл. АН СССР. 1965. Т. 161, № 3. С. 547–550.
4. *Гарипов Р. М.* Асимптотика волн Коши — Пуассона // Некоторые проблемы математики и механики. Л.: Наука, 1970. С. 135–145.
5. *Биченков Е. И., Гарипов Р. М.* Распространение волн на поверхности тяжелой жидкости в бассейне с неровным дном // Прикл. механика, техн. физика. 1969. № 2. С. 21–26.
6. *Налимов В. И., Плотников П. И.* Нерегулярные задачи на собственные значения и эффект волновода // Динамика сплошной среды. 1975. № 23. С. 132–150.
7. *Кузнецов Д. С.* Задача о возмущении спектра и приложение ее к волнам над подводным хребтом // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 4. С. 796–814.
8. *Стокер Дж.* Волны на воде. М.: Изд. иностр. лит., 1959.
9. *Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В.И. и др.* Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985.
10. *Псевдодифференциальные* операторы. М.: Мир, 1967.
11. *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Мир, 1965.
12. *Налимов В. И.* Псевдодифференциальные операторы с аналитическими символами // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 627–637.
13. *Налимов В. И.* Докритические течения из-под щита // Прикл. механика, техн. физика. 1998. № 1. С. 54–60.
14. *Дьедонне Ж.* Основы современного анализа. М.: Мир, 1964.

Статья поступила 22 декабря 2000 г., окончательный вариант — 24 мая 2002 г.

Кузнецов Дмитрий Сергеевич
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. Акад. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090
kudims@hydro.nsc.ru