Сибирский математический журнал
Июль—август, 2002. Том 43, № 4

УДК 512.54

АКСИОМАТИЧЕСКИЙ РАНГ КВАЗИМНОГООБРАЗИЯ УПОРЯДОЧИВАЕМЫХ ГРУПП БЕСКОНЕЧЕН

В. В. Блудов

Аннотация: Доказана бесконечность аксиоматических рангов квазимногообразия упорядочиваемых групп и квазимногообразия групп без Г-кручения.

Ключевые слова: аксиоматический ранг, квазимногообразие, упорядочиваемая группа

1. Введение

Вопрос о конечности аксиоматического ранга квазимногообразия упорядочиваемых групп был поставлен в работе [1, вопрос 22] в 1988 г. Ранее А. И. Будкин установил бесконечность аксиоматических рангов квазимногообразий правоупорядочиваемых и локально индикабельных групп [2] (см. также [3]). Напомним, что аксиоматический ранг квазимногообразия q конечен, если q может быть задано системой квазитождеств от ограниченного в совокупности числа переменных, и бесконечен в противном случае.

В работе доказывается бесконечность аксиоматических рангов квазимногообразия групп без Г-кручения и квазимногообразия упорядочиваемых групп (теорема 2.3). Для этой цели строится серия конечно-порожденных неупорядочиваемых групп $G(n)$, у которых всякая подгруппа, порожденная менее чем n элементами, является упорядочиваемой группой (пример 2.1).

Автор благодарен Н. Я. Медведеву, обратившему наше внимание на этот вопрос.

В основном мы используем стандартные обозначения теории групп и теории упорядоченных групп (см. книги [1, 3, 4–6]). Напомним только, что элемент g группы G называется Г-*периодическим*, если для некоторого конечного набора элементов $h_1, \dots, h_n \in G$ выполняется равенство $g^{1+h_1 \cdots + h_n} = 1$. Группа G, не имеющая нетривиальных Г-периодических элементов, называется *группой без* Г-*кручения*. Из этого определения непосредственно следует, что класс групп без Г-кручения является квазимногообразием, поскольку он аксиоматизируем, замкнут относительно декартовых произведений и подсистем и содержит единичную группу [7].

Хорошо известно, что всякая упорядочиваемая группа есть группа без Г-кручения (см., например, [3, 5]). Для метабелевых групп верно и обратное

Утверждение 1.1 (А. И. Кокорин [5, 8]). *Всякая метабелева группа без* Г-*кручения упорядочиваема.*

2. Основной результат

Основная часть доказательства бесконечности аксиоматических рангов рассматриваемых в работе квазимногообразий опирается на построенную ниже в примере 2.1 серию метабелевых групп $G(n)$ от n порождающих и таких, что $G(n)$ обладает Г-кручением, а всякая подгруппа группы $G(n)$ от менее чем n порождающих является группой без Г-кручения.

Пример 2.1. В качестве $G(1)$ можно взять любую циклическую группу конечного порядка. Пусть $n > 1$. Введем обозначения:

$A = A(x_1, \dots, x_n)$ — свободная абелева группа с базисом $x_1, \dots, x_n$,

$B = \langle b \rangle$ — бесконечная циклическая группа,

$C = B \wr A$ — ограниченное сплетение этих групп (см. [4, 6]).

Подгруппу A в дальнейшем отождествляем с верхней группой сплетения, а подгруппу B — с подгруппой B_1 нижней группы сплетения. Через N обозначим нормальную подгруппу группы C, порожденную элементом $b^{1+x_1+\dots+x_n}$. В фактор-группе $\overline{C} = C/N$ зафиксируем элементы $g_1 = \bar{x}_1\bar{b}$, $g_i = \bar{x}_i$, $i = 2, \dots, n$, и через $G(n)$ обозначим подгруппу группы $\overline{C}$, порожденную элементами $g_1, \dots, g_n$. Покажем, что $G(n)$ — искомая группа. Предварительно докажем следующее утверждение.

Лемма 2.2. *Если $a_1, \dots, a_s$ — попарно различные элементы подгруппы A и $b^{\alpha_1 a_1+\dots+\alpha_s a_s} \in N$, то либо ранг подгруппы $\langle a_1, \dots, a_s \rangle$ равен n, либо все коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ равны нулю.*

Доказательство. Пусть ранг подгруппы $\langle a_1, \dots, a_s \rangle$ равен $r < n$. Обозначим через A_1 изолятор подгруппы $\langle a_1, \dots, a_s \rangle$. Фактор-группа A/A_1 — конечно порожденная абелева группа без кручения, потому свободная абелева группа. В этом случае найдется подгруппа $A_2 \le A$ такая, что группа A раскладывается в прямое произведение свободных абелевых групп (см. [6]):

$$A = A_1 \times A_2. \tag{1}$$

Ранг абелевой подгруппы совпадает с рангом ее изолятора, тем самым ранги подгрупп A_1, A_2 равны соответственно r, $n - r$ и при этом $n - r > 0$. Выберем в подгруппах A_1, A_2 базисы $y_1, \dots, y_r$ и $y_{r+1}, \dots, y_n$. В силу (1) элементы $y_1, \dots, y_r, y_{r+1}, \dots, y_n$ образуют новый базис группы A. Старый базис $x_1, \dots, x_n$ выразим через новый:

$$x_i = y_1^{t_{i,1}} \cdots y_n^{t_{i,n}}, \quad i, j = 1, \dots, n, \ t_{i,j} \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

По условию леммы $b^{\alpha_1 a_1+\dots+\alpha_s a_s} \in N$, а подгруппа N — нормальное замыкание элемента $b^{1+x_1+\dots+x_n}$, следовательно, найдутся различные элементы $c_1, \dots, c_q \in B$ и целые числа $\beta_1, \dots, \beta_q$ такие, что

$$b^{\alpha_1 a_1+\dots+\alpha_s a_s} = b^{(1+x_1+\dots+x_n)(\beta_1 c_1+\dots+\beta_q c_q)}. \tag{3}$$

Если все $\beta_1, \dots, \beta_q$ в формуле (3) равны нулю, то $b^{\alpha_1 a_1+\dots+\alpha_s a_s} = 1$, а из этого (в сплетении абелевых групп без кручения) следует, что все коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ также равны нулю. В противном случае перепишем формулу (3), заменив элементы $a_1, \dots, a_s$, $x_1, \dots, x_n$, $c_1, \dots, c_q$ их выражениями через базисные элементы $y_1, \dots, y_n$, затем вынесем за скобки элементы y_i с отрицательными показателями и получим

$$b^{(\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_s v_s)v_{s+1}^{-1}} = b^{(u_0+u_1+\dots+u_n)(\beta_1 w_1+\dots+\beta_q w_q)w_{q+1}^{-1}}, \tag{4}$$

где $v_1, \dots, v_{s+1}$ — одночлены от $y_1, \dots, y_r$ с положительными коэффициентами, а остальные $u_0, \dots, u_n$, $w_1, \dots, w_{q+1}$ — одночлены от $y_1, \dots, y_n$ также с положительными коэффициентами. Поскольку формулы (2) определяют переход от одного базиса к другому, матрица $(t_{i,j})$ невырожденна и, значит, не все $t_{i,n}$ равны 0. Далее, в выражении $1 + x_1 + \dots + x_n$ присутствует константа 1, поэтому независимо от коэффициентов $t_{i,n}$ после вынесения за скобку y_n с наибольшим отрицательным показателем среди одночленов $u_0, \dots, u_n$ найдутся хотя бы один, содержащий y_n с ненулевым положительным показателем, и хотя бы один, не содержащий переменной y_n. Тогда выражение $u_0 + u_1 + \dots + u_n$, рассматриваемое как многочлен от переменных $y_1, \dots, y_n$, явно зависит от y_n и не делится на y_n. Снова воспользуемся тем, что мы рассматриваем сплетение абелевых групп без кручения, и перейдем от равенства (4) к равенству многочленов с целыми коэффициентами от переменных $y_1, \dots, y_n$:

$$(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_s v_s) w_{q+1} = (u_0 + u_1 + \dots + u_n)(\beta_1 w_1 + \dots + \beta_q w_q) v_{s+1}. \tag{5}$$

Как отмечено выше, многочлен $u_0+u_1+\dots+u_n$ не делится на y_n, а одночлен v_{s+1} не зависит от y_n, поэтому если w_{q+1} делится на y_n^m, то и многочлен $\beta_1 w_1 + \dots + \beta_q w_q$ делится на y_n^m и после сокращения слева и справа на y_n^m получим, что слева в формуле (5) записан многочлен, не зависящий от y_n, а справа — многочлен, явно зависящий от y_n. Полученное противоречие доказывает лемму. □

Покажем, что $G(n)$ — неупорядочиваемая группа. Для этого достаточно установить наличие в группе $G(n)$ неединичного Г-периодического элемента. Покажем, что $[g_1, g_2]^{1+g_1+\dots+g_n} = 1$ и $[g_1, g_2] \neq 1$. Имеем

$$[g_1, g_2] = \bar{b}^{-1} \bar{x}_1^{-1} \bar{x}_2^{-1} \bar{x}_1 \bar{b} \bar{x}_2 = \bar{b}^{-1+\bar{x}_2}.$$

Если $\bar{b}^{-1+\bar{x}_2} = 1$ в группе $G(n)$, то, поднимаясь в группу C, получим, что $b^{-1+x_2} \in N$, а это невозможно по лемме. С другой стороны, $b^{(-1+x_2)(1+x_1+\dots+x_n)} \in N$, что приводит к соотношению $1 = \bar{b}^{(-1+\bar{x}_2)(1+\bar{x}_1+\dots+\bar{x}_n)} = [g_1, g_2]^{1+g_1+\dots+g_n}$ в группе $G(n)$, и группа $G(n)$ не упорядочиваема.

Проверим, что всякая подгруппа группы $G(n)$ с $r < n$ порождающими не имеет Г-кручения. Пусть $\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_r$ — порождающие некоторой подгруппы $\overline{D} < G(n)$ и $r < n$. Предположим, что для некоторых элементов $\bar{g}, \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_s \in \overline{D}$ выполняется

$$\bar{g}^{1+\bar{f}_1+\dots+\bar{f}_s} = 1. \tag{6}$$

Вернемся в группу C. Зафиксируем некоторые представители $d_1, \dots, d_r$ смежных классов $\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_r$ и через D обозначим подгруппу, порожденную элементами $d_1, \dots, d_r$. В этом случае при гомоморфизме $C \to \overline{C}$ подгруппа D отобразится на $\overline{D}$. Поэтому из соотношения (6) следует, что для некоторых прообразов $g, f_1, \dots, f_s \in D$ элементов $\bar{g}, \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_s \in \overline{D}$ выполняется

$$g^{1+f_1+\dots+f_s} \in N. \tag{7}$$

При гомоморфизме $\alpha : C \to A$ включение (7) переходит в равенство $(g^\alpha)^n = 1$, а поскольку группа A не имеет кручения, элемент g принадлежит нижней группе сплетения $B \wr A$ и, значит, $g = b^{m_1 h_1 + \dots m_k h_k}$ для подходящих $h_1, \dots, h_k \in A$ и целых $m_1, \dots, m_k$. Подставим это представление элемента g в (7) и получим $b^{(m_1 h_1 + \dots m_k h_k)(1+f_1+\dots+f_s)} \in N$. Произвольный элемент из подгруппы N имеет вид $b^{(1+x_1+\dots+x_n)(\beta_1 c_1 + \dots + \beta_q c_q)}$, где $c_1, \dots, c_q \in A$, $\beta_1, \dots, \beta_q \in \mathbb{Z}$. Следовательно, включение (7) эквивалентно равенству

$$b^{(m_1 h_1 + \dots m_k h_k)(1+f_1+\dots+f_s)} = b^{(1+x_1+\dots+x_n)(\beta_1 c_1 + \dots + \beta_q c_q)}.$$

Заменим элементы $h_1, \dots, h_k$, $f_1, \dots, f_s$ и $c_1, \dots, c_q$ их представлениями через порождающие $x_1, \dots, x_n$, вынесем за скобки x_i с отрицательными показателями и получим

$$b^{(m_1u_1+\dots+u_k)u_{k+1}^{-1}(v_0+v_1+\dots+v_s)v_{s+1}^{-1}} = b^{(1+x_1+\dots+x_n)(\beta_1w_1+\dots+\beta_qw_q)w_{q+1}^{-1}}.$$

От этого равенства перейдем к равенству многочленов:

$$(m_1u_1 + \dots + u_k)(v_0 + v_1 + \dots + v_s)w_{q+1} = (1 + x_1 + \dots + x_n)(\beta_1w_1 + \dots + \beta_qw_q)u_{k+1}v_{s+1}.$$

Многочлен $(1 + x_1 + \dots + x_n)$ неприводим как всякий многочлен первой степени, а кольцо многочленов от n переменных над $\mathbb{Z}$ факториально [9], поэтому хотя бы один из многочленов левой части полученного равенства делится на $(1 + x_1 + \dots + x_n)$. Если это $(m_1u_1 + \dots + u_k)$, то $b^{(m_1u_1+\dots+u_k)} \in N$, но тогда и $g = b^{m_1h_1+\dots m_kh_k} = b^{(m_1u_1+\dots+u_k)u_{k+1}^{-1}} \in N$, а это влечет $\bar{g} = 1$ в группе $G(n)$. Если на $(1+x_1+\dots+x_n)$ делится $v_0+v_1+\dots+v_s$, то $b^{v_0+v_1+\dots+v_s} \in N$ и, значит, $b^{1+f_1+\dots+f_s} = b^{(v_0+v_1+\dots+v_s)v_{s+1}^{-1}} \in N$, а это противоречит лемме. Остается заметить, что w_{q+1}, будучи одночленом, не может делиться на $(1 + x_1 + \dots + x_n)$. Таким образом, в метабелевой группе $\overline{D}$ нет Г-периодических элементов. Применяя утверждение 1.1, получаем также, что $G(n)$ — неупорядочиваемая группа, а всякая ее подгруппа с менее чем n порождающими упорядочиваема. □

Теорема 2.3. *Аксиоматические ранги квазимногообразия упорядочиваемых групп и квазимногообразия групп без* Г*-кручения бесконечны.*

Доказательство. Если хотя бы одно из указанных в теореме квазимногообразий задается квазитождествами от не более чем r переменных, то группа $G(r + 1)$, построенная в примере 2.1, должна принадлежать этому квазимногообразию; противоречие с тем, что $G(r + 1)$ неупорядочиваема и имеет нетривиальные Г-периодические элементы. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Копытов В. М., Медведев Н. Я.* Нерешенные вопросы теории частично упорядоченных групп // 5 Сибирская школа по многообразиям алгебраических систем: Тез. сообщений. Барнаул, 1988.
2. *Будкин А. И.* О квазитождествах в свободной группе // Алгебра и логика. 1976. Т. 15, № 1. С. 39–52.
3. *Копытов В. М., Медведев Н. Я.* Правоупорядоченные группы. Новосибирск: Научная книга, 1996.
4. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1996.
5. *Кокорин А. И., Копытов В. М.* Линейно упорядоченные группы. М.: Наука, 1972.
6. *Курош А. Г.* Теория групп. М.: Наука, 1967.
7. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
8. *Кокорин А. И.* К теории доупорядочиваемых групп // Алгебра и логика. 1963. Т. 2, № 6. С. 15–20.
9. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. М.: Наука, 1976.

Статья поступила 23 ноября 2001 г.

Блудов Василий Васильевич
Иркутский гос. университет, ул. К. Маркса, 1, Иркутск 664003,
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск 664033
bludov@math.isu.ru