Сибирский математический журнал
Июль—август, 2002. Том 43, № 4

УДК 515.126.83

МЕТОД АППРОКСИМАТИВНОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ В ТЕОРИИ ЭКСТЕНЗОРОВ

С. М. Агеев, Д. Реповш

Аннотация: Развит метод аппроксимативного продолжения отображений, который позволяет не только упрощать доказательства многих ранее известных теорем теории экстензоров, но также получить ряд новых результатов. В соединении с теорией Анцеля послойно тривиальных отношений данный метод приводит к существенному продвижению в характеризации абсолютных экстензоров посредством локальной стягиваемости. Доказаны следующие утверждения. **1.** *Пусть пространство X представлено в виде объединения счетного числа замкнутых* ANE-*подпространств X_i и счетномерного подпространства D. Если каждое X_i является строгим деформационным окрестностным ретрактом X, а $X \in \mathrm{LC}$, то $X \in \mathrm{ANE}$.* **2.** *Пусть пространство X представлено в виде объединения счетного числа замкнутых* ANE-*подпространств X_i и счетномерного подпространства D. Тогда если $X \in \mathrm{LEC}$, то $X \in \mathrm{ANE}$.*

Ключевые слова: аппроксимативное продолжение, экстензор

§ 1. Введение

Статья посвящена проблеме продолжения непрерывных отображений $f : A \to X$ с замкнутых подпространств $A \subset Z$ метрических пространств Z на некоторую их окрестность. Пространства X, обладающие таким свойством продолжения для всех частичных отображений $Z \hookleftarrow A \xrightarrow{f} X$, называются *абсолютными окрестностными экстензорами* ($X \in \mathrm{ANE}$). Проблема распознавания ANE-пространств весьма актуальна в современной топологии и решается выделением в классе всех ANE-пространств разнообразных подклассов $\mathfrak{P}$, допускающих удобное в том или ином смысле описание: класс выпуклых подмножеств в локально выпуклом линейном пространстве (теорема Дугунджи [1]), класс метрических счетномерных локально стягиваемых пространств (теорема Хавера [2]), класс метрических пространств со стягиваемой базой, все конечные пересечения которой также стягиваемы (теорема Торунчика [3]) и т. д. Во всех принципиально важных случаях класс $\mathfrak{P}$ выдерживает умножение на полуотрезок $J = [0, 1)$: $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{P} \times J$. В такой ситуации проблема *точного* продолжения отображения $f : A \to X$ решается сведением ее к менее обременительной проблеме *аппроксимативного* продолжения частичного отображения.

Определение 1.1. Пространство X называется *аппроксимативным абсолютным окрестностным экстензором* ($X \in$ A-ANE), если для любого покрытия $\omega \in \operatorname{cov} X$ и для любого частичного отображения $Z \hookleftarrow A \xrightarrow{f} X$ существует

Первый автор частично поддержан грантом Министерства образования республики Беларусь. Второй автор поддержан грантом Министерства науки и технологии республики Словения (J1–0885–0101–98).

отображение $\tilde{f} : U \to X$, определенное на окрестности U множества A такое, что $\operatorname{dist}(f, \tilde{f}\restriction_A) \prec \omega$.

Следующая теорема играет в нашем изложении принципиальную роль.

Теорема 1.2. *Пусть класс метрических пространств $\mathfrak{P}$ замкнут относительно умножения на J. Тогда $\mathfrak{P} \subset$ ANE в том и только в том случае, когда $\mathfrak{P} \subset$ A-ANE.*

Если условие теоремы нарушено (т. е. класс $\mathfrak{P}$ не замкнут относительно умножения на J), то имеет место лишь строгое включение ANE$\cap\mathfrak{P} \subsetneqq$ A-ANE$\cap\mathfrak{P}$. В качестве примера компактного аппроксимативного абсолютного окрестностного экстензора, не являющегося абсолютным окрестностным экстензором, годится одноточечная компактификация натурального ряда.

Этот критерий в неявной форме встречается в работах [3–5], однако лишь сейчас становится ясной его фундаментальная роль в теории абсолютных экстензоров. Основной тезис данной статьи состоит в том, что для упрощения доказательства большинства ранее известных теорем и получения новых результатов следует использовать понятие аппроксимативного ANE. Ведь построить приближенное продолжение отображения значительно легче, чем точное. Если же класс $\mathfrak{P}$ замкнут относительно умножения на полуотрезок, то задача детектирования ANE в пределах класс $\mathfrak{P}$ тождественна задаче детектирования аппроксимативных ANE. И, наконец, понятие аппроксимативного ANE слаженно взаимодействует с различными понятиями и конструкциями теории экстензоров. В частности, данная статья демонстрирует такое согласованное взаимодействие с техникой Анцеля [6], разработанной для послойно тривиальных отношений (отображений).

В качестве иллюстрации к вышеприведенному тезису мы приводим единообразные доказательства теорем Хавера и Торунчика, а также нового неожиданного результата.

Теорема 1.3. *Если счетномерное пространств X имеет открытую базу $\{W_\gamma\}$ из слабо гомотопически тривиальных множеств (т. е. гомотопические группы $\pi_i(W_\gamma)$ нулевые для всех $\gamma \in \Gamma$ и $i \geq 0$), то $X \in$ ANE.*

Последнюю теорему целесообразно сопоставить с теоремой Торунчика [3]: если в теореме 1.3 дополнительно потребовать, чтобы база $\{W_\gamma\}$ была мультипликативна, то любое (а не только счетномерное) пространство является абсолютным окрестностным экстензором.

Заключительная часть работы посвящена изучению взаимосвязи трех наиболее важных в теории экстензоров классов: ANE, локально эквисвязных (LEC) и локально стягиваемых пространств (LC). Очевидно, что ANE $\subset$ LEC $\subset$ LC. Проблема тождественности первых двух классов долго оставалась открытой [7, с. 246]. Линейное метрическое пространство, построенное Р. Коти [8], доставляет пример LEC-пространства, но не ANE. Поэтому задача нахождения как можно более широкого класса пространств, для которых более легко проверяемые свойства LEC и LC влекут ANE, представляется актуальной.

Отметим некоторые известные результаты в этом направлении. Пересечения трех этих классов со счетномерными пространствами тождественно равны (теорема Хавера [2]). Пересечения первых двух классов с пространствами, допускающими счетную возрастающую фильтрацию из замкнутых ANE-подпространств, также тождественно равны (теорема Ню — Сакаи [9]), а пересечения же второго и третьего классов различны (пример Борсука [10]). Однако как теорема Хавера, так и теорема Ню — Сакаи могут быть значительно обобщены, причем с существенным упрощением первоначальных доказательств.

Теорема 1.4. *Пусть пространство X представлено в виде объединения счетного числа замкнутых* ANE*-подпространств X_i и счетномерного подпространства D. Если каждое X_i является строгим деформационным окрестностным ретрактом X, а $X \in \mathrm{LC}$, то $X \in \mathrm{ANE}$.*

Заметим, что все утверждения, в которых участвует счетномерность, могут быть усилены, если воспользоваться понятием C-пространств, причем делается это дословно аналогично имеющимся в статье рассуждениям (см. [11]).

Теорема 1.5. *Пусть пространство X представлено в виде объединения счетного числа замкнутых* ANE*-подпространств X_i и счетномерного подпространства D. Тогда если $X \in \mathrm{LEC}$, то $X \in \mathrm{ANE}$.*

В свою очередь, эти теоремы являются проявлениями общего факта о LEC-вложенных подпространствах.

Теорема 1.6. *Пусть* LC*-пространство X представлено в виде объединения счетного числа замкнутых подпространств $X_i = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} F_{ij}$ и счетномерного подпространства D: $X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} X_i \cup D$. Если каждое вложение $X_i \hookrightarrow X$ является локально эквисвязным* (LEC)*, а любое частичное отображение $Z \hookleftarrow A \xrightarrow{\varphi} F_{ij}$ имеет окрестностное продолжение $\hat{\varphi} : U \to X_i$, то $X \in \mathrm{ANE}$.*

Так как строгий деформационный окрестностный локально эквисвязный ретракт LEC-вложен в пространство, а любое подпространство в LEC-пространстве LEC-вложено, то теоремы 1.4 и 1.5 являются частными случаями 1.6. Если $X = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} C_j$ — счетное объединение компактов, а LEC-пространство X является абсолютным окрестностным экстензором для класса компактов, то все условия теоремы 1.6, как легко видеть, выполнены и $X \in \mathrm{ANE}$. Это основной результат работы [9, основная теорема]. Отметим также, что теоремы 1.4–1.6 легко трансформировать в теоремы о сохранении класса ANE-пространств компактификациями со счетномерным наростом.

Поскольку все условия теорем 1.4–1.6 выдерживают умножение на полуотрезок J, в силу теоремы 1.2 достаточно в них установить соотношение $X \in$ A-ANE. Благодаря этому обстоятельству становится возможным использовать для доказательства теорем послойно тривиальные отображения в смысле Анцеля [6] вследствие их связи с A-ANE.

Предложение 1.7. *Если для любого частичного отображения $Z \hookleftarrow A \xrightarrow{\varphi} X$ проекция $\pi_\varphi : G_\varphi \to A$ графика $G_\varphi \subset Z \times X$ отображения φ на A послойно тривиальна внутри проекции $p \rightleftharpoons \mathrm{pr}_Z : Z \times X \to Z$, то $X \in$* A-ANE.

Сразу же отметим, что из всей обширной и богатой идеями теории Анцеля нам понадобится лишь небольшая ее часть. Кроме того, нам хотелось дать прозрачное и автономное от [6] изложение основных ее положений. Поэтому специальный § 5 мы посвящаем теории Анцеля с преломлением в теорию экстензоров.

§ 2. Предварительные сведения и факты

Все пространства (однозначные отображения), если они не возникают в результате некоторых построений, предполагаются метрическими (непрерывными).

Множество всех открытых покрытий пространства X будем обозначать через $\operatorname{cov} X$, а запись $\omega \in \operatorname{cov} X$ будет обозначать некоторое его открытое покрытие. *Звездой* (или, по-другому, *окрестностью*) множества $A \subset X$ относительно $\omega \in \operatorname{cov} X$ будем называть множество $\bigcup\{U \mid U \in \omega, U \cap A \neq \varnothing\}$ и обозначать его через $\mathrm{St}(A;\omega)$ или $\mathrm{N}(A;\omega)$. *Звездой покрытия* ω *относительно другого покрытия* ω' назовем покрытие $\mathrm{St}(\omega;\omega') = \{\mathrm{St}(U;\omega') \mid U \in \omega\}$. Многократные звезды $\mathrm{St}(\omega_1; \mathrm{St}(\omega_2; \dots; \omega_n) \dots)$ будем для краткости обозначать через $\omega_n \circ \dots \circ \omega_2 \circ \omega_1$, а если ω_i равны между собой, то через $(\omega_1)^k$. *Телом системы* открытых множеств ω будем называть множество $\bigcup\{U \mid U \in \omega\}$, которое обозначается через $\bigcup \omega$.

Запись $\omega \succ \omega_1$, как всегда, будет обозначать вписанность покрытия ω в ω_1. Как известно, в любое покрытие $\sigma \in \operatorname{cov} X$ метрического пространства X можно *звездно вписать* некоторое покрытие $\omega \in \operatorname{cov} X$, а именно такое, что $\omega \circ \omega \succ \sigma$ (теорема Стоуна [12]). Приведем без доказательства следующий удобный для нас фольклорный критерий звездной вписанности покрытий.

Предложение 2.1. *Покрытие $\sigma = \{S_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ звездно вписано в покрытие $\omega = \{W_\beta \mid \beta \in B\}$ тогда и только тогда, когда для любого λ существует $\beta = \beta(\lambda)$ такое, что если $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda'} S_\lambda \neq \varnothing$ для подмножества $\Lambda' \subset \Lambda$, то справедливо вложение*

(1) $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda'} S_\lambda \subset \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda'} W_{\beta_\lambda}$.

Если $f, g : X \to Y$ — отображения, а $\omega \in \operatorname{cov} Y$, то ω-близость f и g запишем в виде $\operatorname{dist}(f,g) \prec \omega$. Для ограничения отображения f на подмножество $A \subset X$ принято обозначение $f{\restriction}_A$.

Нервом покрытия $\omega = \{U_\beta \mid \beta \in B\}$ будем называть такой полиэдр $\mathfrak{N}\langle\omega\rangle$ в слабой топологии Уайтхеда, вершины которого $\langle U_\beta \rangle$ находятся во взаимнооднозначном соответствии с индексным множеством B, а $\omega = \langle U_{\beta_0}, \dots, U_{\beta_s}\rangle$ — s-мерный симплекс $\mathfrak{N}\langle\omega\rangle$ с вершинами $\langle U_{\beta_i}\rangle$ в том и только в том случае, когда $\bigcap U_{\beta_i} \neq \varnothing$; *$k$-мерным остовом* $\mathfrak{N}\langle\omega\rangle^{(k)}$ назовем подполиэдр $\mathfrak{N}\langle\omega\rangle$, состоящий из не более чем k-мерных симплексов, $\mathfrak{N}\langle\omega\rangle^{(-1)} = \varnothing$. *Открытой звездой* $\overset{\circ}{\mathrm{St}}\langle U_{\beta_0}\rangle$ вершины $\langle U_{\beta_0}\rangle$ назовем множество $\{\sum \alpha_\beta \cdot \langle U_\beta\rangle \in \mathfrak{N}\langle\omega\rangle \mid \alpha_{\beta_0} \neq 0\}$.

Отображение $\theta : X \to \mathfrak{N}\langle\omega\rangle$ будем называть *каноническим*, если прообраз $\theta^{-1}(\overset{\circ}{\mathrm{St}}\langle U_\beta\rangle)$ открытой звезды вершины $\langle U_\beta\rangle$ лежит в U_β. Известно [1], что для любого открытого покрытия ω паракомпакта X существует каноническое отображение.

Введем ряд понятий, связанных с продолжением отображений. Пространство X называют *абсолютным окрестностным экстензором* и пишут $X \in \mathrm{ANE}$, если каждое отображение $\varphi : A \to X$, определенное на замкнутом подмножестве $A \subset Z$ метрического пространства Z и называемое *частичным отображением*, может быть продолжено на некоторую окрестность $U \subset Z$ множества A, $\hat\varphi : U \to X$, $\hat\varphi{\restriction}_A = \varphi$. Если всегда возможно продолжить φ на $U = Z$, то X называют *абсолютным экстензором*, в записи $X \in \mathrm{AE}$. Мы будем говорить в случае $X \in \mathrm{A[N]E}$, что пространство X обладает свойством A[N]E-*абсолютной* (*окрестностной*) *продолжимости*. Отметим также, что в случае, когда X —

метрическое пространство, понятия абсолютного (окрестностного) экстензора и абсолютного (окрестностного) ретракта совпадают [1].

Свойство $X \in \mathrm{ANE}$ равносильно свойству продолжимости частичных реализаций до глобальных реализаций [1, с. 156]. Нам в дальнейшем понадобится лишь определение понятия реализации нерва.

Определение 2.2. Пусть α — система открытых множеств пространства X, $\mathfrak{N}_0$ — подполиэдр полиэдра $\mathfrak{N}$, содержащий все вершины. *Частичной α-реализацией* полиэдра $\mathfrak{N}$ назовем такое отображение $\mathfrak{N}_0 \xrightarrow{\varphi} Z$, что для любого симплекса $\Delta \in \mathfrak{N}$ множество $\varphi(\Delta \cap \mathfrak{N}_0)$ содержится в некотором элементе $V \in \alpha$. Если $\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{N}$, то φ — *α-глобальная реализация* $\mathfrak{N}$.

Каждое ANE-пространство является локально стягиваемым ($X \in \mathrm{LC}$) и локально эквисвязным ($X \in \mathrm{LEC}$). Дадим соответствующие определения.

Определение 2.3. Пространство X обладает свойством *локальной стягиваемости* ($X \in \mathrm{LC}$), если для любой его точки x и любой ее окрестности $U(x)$ существует такая окрестность $V(x)$, что вложение $V(x) \hookrightarrow U(x)$ и постоянное отображение $c : V(x) \to \{x\} \hookrightarrow U(x)$ гомотопны в пределах $U(x)$.

Определение 2.4. Вложение $X' \hookrightarrow X$ *локально эквисвязно* (LEC), если существуют окрестность $\mathscr{U}$ диагонали $\Delta X'$ в $X' \times X$ и отображение $\lambda : \mathscr{U} \times I \to X$ такие, что $\lambda(x', x, 0) = x'$, $\lambda(x', x, 1) = x$ и $\lambda(x', x', t) = x'$ для всех $(x', x) \in \mathscr{U}$ и $t \in I$.

Понятие *локальной эквисвязности* пространства X равносильно тому, что тождественное вложение $X' \hookrightarrow X$ локально эквисвязно [6]. Известно, что ANE-пространство локально эквисвязно и тем самым локально стягиваемо. В качестве важного примера LEC-вложения $X' \hookrightarrow X$ приведем случай, когда X' — *строгий деформационный окрестностный ретракт* X.

Определение 2.5. Подпространство $X' \subset X$ называется *строгим деформационным окрестностным ретрактом* X, если существуют окрестность U, $X' \subset U \subset X$, и гомотопия $F : U \times I \to X$ такие, что $F_0 = \mathrm{Id}_U$, $F_t{\restriction}_{X'} = \mathrm{Id}_{X'}$, $t \in I$, а F_1 является ретракцией U на X'.

Так как X' — ретракт U, то X' замкнуто в U и, следовательно, замкнуто в X.

Предложение 2.6. *Если* ANE-*пространство* X' *лежит в* X *и является строгим деформационным окрестностным ретрактом* X, *то* $X' \hookrightarrow X$ *есть* LEC-*вложение.*

Доказательство. Так как $X' \in \mathrm{ANE}$, то $X' \in \mathrm{LEC}$ и, следовательно, существуют окрестность $\mathscr{V} \subset X' \times X'$ диагонали $\Delta X'$ и отображение $\lambda' : \mathscr{V} \times I \to X'$ такие, что $\lambda'(x_1, x_2, 0) = x_1$, $\lambda'(x_1, x_2, 1) = x_2$ и $\lambda'(x_1, x_1, t) = x_1$ для всех $(x_1, x_2) \in \mathscr{V}$ и $t \in I$. Поскольку X' является строгим деформационным окрестностным ретрактом X, то несложно вывести существование окрестности $\mathscr{U} \subset X' \times X$ диагонали $\Delta X'$ и отображения $\lambda'' : \mathscr{U} \times I \to X$ таких, что $\lambda''(x', x, 1) = x$, $(x', \lambda''(x', x, 0)) \in \mathscr{V}$ и $\lambda''(x', x', t) = x'$ для всех $(x', x) \in \mathscr{U}$ и $t \in I$. Тогда искомое отображение $\lambda : \mathscr{U} \times I \to X$, гарантирующее LEC-вложенность X' в X, задается формулой $\lambda(x', x, t) = \lambda''(x', x, 2t - 1)$, если $1/2 \le t \le 1$, и $\lambda(x', x, t) = \lambda'(x', \lambda''(x', x, 0), 2t)$, если $0 \le t \le 1/2$. ■

Наконец, напомним, что пространство D *счетномерно*, если $D = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} D_i$, а D_i нульмерны для любого i. Приведем важное утверждение о счетномерных подмножествах.

Предложение 2.7. *Если частичное отображение $Z \hookleftarrow A \xrightarrow{\varphi} X$ таково, что либо A, либо $\varphi(A)$ счетномерно, то для любой последовательности покрытий $\omega_i \in \operatorname{cov} X$, $i \geq 1$, существуют счетное число дизъюнктных семейств σ_i открытых в Z множеств таких, что*

(2) $\sigma \rightleftharpoons \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \sigma_i$ *покрывает A и $\varphi(\sigma_i) \succ \omega_i$ для всех $i \geq 1$.*

Доказательство дословно аналогично имеющемуся, например, в [6, с. 10].

§ 3. Аппроксимативный критерий продолжимости отображений

В произведении $X \times J$ метрического пространства X и полуоткрытого интервала $J = [0, 1)$ рассмотрим открытое покрытие ω, *примыкающее к верхнему основанию* $X \times \{1\}$. Последнее означает, что для любой точки $a \in X \times \{1\}$ и любой ее окрестности $U = U(a)$ в $X \times [0, 1]$ существует такая окрестность $V = V(a)$, что звезда множества V относительно покрытия ω содержится в U. Сразу же отметим, что одна из возможностей образовывать такое примыкающее покрытие связана с последовательностью открытых покрытий $\omega_i \in \operatorname{cov} X$, $i \geq 1$, удовлетворяющих условиям:

(1) $\omega_n \circ \omega_n \succ \omega_{n-1}$ для всех $n > 1$;

(2) для любой точки $x \in X$ последовательность множеств $\{\omega_n(x)\}$ сходится к этой точке.

Такие последовательности будем называть *измельчающимися*. Если теперь фиксировать открытое покрытие $\Delta = \{\Delta_n\}$ интервалами Δ_n кратности 2, для которого $0 \in \Delta_1$, $\Delta_n \cap \Delta_{n+1} \neq \varnothing$ для всех $n \geq 1$ (очевидно, что при этом $\operatorname{diam} \Delta_n \to 0$ при $n \to \infty$), то открытое покрытие $\omega = \{\omega_n \times \Delta_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ на произведении $X \times J$ будет примыкающим к $X \times \{1\}$.

Следующая теорема позволяет сводить задачу точного продолжения частичных отображений к менее обременительной задаче приближенного продолжения.

Теорема 3.1 (аппроксимативный критерий продолжимости частичного отображения). *Пусть открытое покрытие $\omega \in \operatorname{cov} X \times [0, 1)$ примыкает к верхнему основанию $X \times \{1\}$. Тогда частичное отображение $Z \supseteq A \xrightarrow{f} X$ имеет глобальное* (*окрестностное*) *продолжение в том и только в том случае, когда частичное отображение $Z \times J \supseteq A \times J \xrightarrow{f \times \mathrm{Id}} X \times J$ имеет ω-продолжение на $Z \times J$* (*на окрестность $A \times J$*).

Из теоремы 3.1 получаем следствие.

Теорема 3.2. *Если произведение $X \times J$ является аппроксимативным абсолютным* (*окрестностным*) *экстензором, то $X \in$* A[N]E.

Доказательство теоремы 3.1. Лишь достаточность представляет собой нетривиальную часть теоремы. Поэтому остается построить продолжение произвольного частичного отображения $Z \supseteq A \xrightarrow{f} X$. По условию для частичного отображения $Z \times J \supseteq A \times J \xrightarrow{g} X \times J$, где $g = f \times \mathrm{Id}_J$, существует такое отображение $\tilde{g} : Z \times J \to X \times J$ (отображение $\tilde{g} : U \to X \times J$ соответственно), что $(g, \tilde{g}\restriction_{A\times J}) \prec \omega$.

Утверждение 3.3. *Отображение* $d : A \times [0,1] \to X \times [0,1]$, *заданное формулой* $d\restriction_{A\times J} = \tilde{g}\restriction_{A\times J}$, $d\restriction_{A\times\{1\}} = f \times \{1\}$, *непрерывно.*

Доказательство. Достаточно проверить непрерывность d в точке $a \times \{1\}$. Для этого зафиксируем произвольную окрестность $V \times [t,1]$ точки $b = (f(a), 1)$ и найдем другую ее окрестность $V_1 \times [r,1]$, $t < r < 1$, такую, что $\mathrm{St}(V_1 \times [r,1]; \omega) \subseteq V \times [t,1]$. Так как отображение $f : A \to X$ непрерывно, существует такая окрестность $O(a) \subseteq V_1$ точки a, что $f(O(a)) \subseteq V_1$. Используя условие ω-близости $g = f \times \mathrm{Id}_J$ и $\tilde{g}\restriction_{A\times J}$, легко получаем, что $d(O(a) \times [r,1]) \subseteq \mathrm{St}(V_1 \times [r,1]; \omega) \subseteq V \times [t,1]$. ■

Следующий несложный факт приведем без доказательства.

Утверждение 3.4. *Пусть отображение* $\alpha : F \cup W \to T$ *задано на объединении замкнутого множества* F *и открытого множества* W *пространства* S *и его ограничения* $\alpha\restriction_F$ *и* $\alpha\restriction_W$ *на* F *и* W *непрерывны. Тогда существует такое замкнутое множество* F, $F_1 \supseteq F$, *пространства* S, *что* $\alpha\restriction_{F_1}$ *непрерывно и* $F \cap W \subseteq \mathrm{Int}\, F_1$.

Если положить $S \rightleftharpoons Z \times I$, $T \rightleftharpoons X \times I$, $F \rightleftharpoons A \times I \cup Z \times \{0\}$, $W \rightleftharpoons Z \times J$ ($F \rightleftharpoons A \times I$, $W \rightleftharpoons U$ соответственно) и $\alpha = d \cup \tilde{g}$, то будет существовать такое замкнутое множество H, $H \supseteq Z \times I$, что

$$A \times I \cup Z \times J \supseteq H \supseteq A \times I \cup Z \times \{0\} \quad (A \times I \cup U \supseteq H \supseteq A \times I \text{ соответственно}),$$

а также

$$A \times [0,1) \cup Z \times \{0\} \subseteq \mathrm{Int}\, H \quad (A \times [0,1) \subseteq \mathrm{Int}\, H \text{ соответственно}),$$

а ограничение α на H непрерывно. Теперь воспользуемся утверждением, доказательство которого несложно и также приводится без доказательства.

Утверждение 3.5. *Существуют последовательность окрестностей* $V_1 \supseteq V_2 \supseteq \dots \supseteq V_i \supseteq \mathrm{Cl}(V_{i+1})$, $\bigcap V_i = A$, *а также монотонно возрастающая последовательность чисел* $0 = r_0 < r_1 < r_2 < \dots$, $\lim r_i = 1$, *для которых* $V_i \times [0, r_i] \subseteq H$.

Пусть $\xi_i : Z \to [r_{i-2}, r_{i-1}]$, $i \geq 2$, — непрерывные функции со свойствами $\xi_i\restriction_{\mathrm{Bd}\, V_i} \equiv r_{i-1}$, $\xi_i\restriction_{\mathrm{Bd}\, V_{i-1}} \equiv r_{i-2}$. Тогда функция $\xi : Z \to [0,1]$, $\xi\restriction_{Z\setminus V_1} = 0$, $\xi\restriction_{V_{i-1}\setminus V_i} = \xi_i$ при $i \geq 2$, $\xi\restriction_A \equiv \mathrm{Id}$, непрерывна и $(v, \xi(v)) \in H, v \in Z$ ($(v, \xi(v)) \in H$, $v \in V_1$ соответственно). Искомое продолжение $\hat{f}$ частичного отображения f задается формулой $\widehat{f}(v) = \alpha(v, \xi(v))$, $v \in Z$ ($v \in V_1$ соответственно). ■

В заключение параграфа приведем еще несколько несложных фактов о взаимоотношении классов ANE и A-ANE, которые, однако, в работе не используются и поэтому приводятся без доказательства. Теорему 3.2 иногда целесообразно трансформировать в следующее утверждение.

Теорема 3.6. *Необходимым и достаточным условием для того, чтобы* $X \in$ A[N]E, *является следующее.*

(3) *Существуют* A-A[N]E-*пространство* P *и отображения* $\alpha : X \times J \to P$, $\beta : P \to X \times J$, *для которых* $(\beta \circ \alpha, \mathrm{Id}_{X\times J}) \prec \omega$ *(здесь через* $\omega \in \mathrm{cov}\, X \times [0,1)$ *обозначено открытое покрытие, примыкающее к верхнему основанию* $X \times \{1\}$*).*

Какие необходимые условия надо наложить на аппроксимативный абсолютный экстензор X, чтобы заведомо гарантировать включение $X \in \mathrm{AE}$? Следующая теорема показывает, что для этого достаточно требовать от X локальной эквисвязности.

Теорема 3.7. *Если $X \in$ A-A[N]E$\,\cap\,$LEC, то X — абсолютный (окрестностный) экстензор.*

§ 4. Применения аппроксимативного критерия продолжимости отображений

Почти все критерии абсолютных экстензоров и ретрактов могут быть достаточно просто выведены из теорем 3.1 и 3.2. Поэтому их естественно назвать основными критериями для ANE-пространств.

С учетом этих теорем задача точного продолжения отображений для широкого класса пространств решается ее сведением к задаче аппроксимативного продолжения отображений. В свою очередь, ω-продолжение $\varphi : Z \to X$ частичного отображения $Z \supseteq A \xrightarrow{\varphi} X$ ищется, как правило, в виде композиции канонического отображения $\theta : X \to \mathfrak{N}\langle\sigma\rangle$, порожденного некоторым покрытием $\sigma \in \operatorname{cov} Z$, и непрерывного отображения $\mu : \mathfrak{N}\langle\sigma\rangle \to Z$. Какие достаточные условия на отображения μ гарантируют ω-близость композиции $\mu \circ \theta$ к отображению φ? Чтобы ответить на этот вопрос напомним некоторые факты, восходящие к Майклу [13].

Определение 4.1. Пусть заданы отображение $\varphi : A \to X$ метрических пространств, а также покрытия $\sigma = \{V_a\} \in \operatorname{cov} A$, $\gamma, \lambda \in \operatorname{cov} X$. Будем говорить, что отображение $\mu : \mathfrak{N}\langle\sigma\rangle \to X$ из нерва $\mathfrak{N}\langle\sigma\rangle$ в X удовлетворяет (λ,γ)-*условию относительно* φ, если

(1) отображение μ является γ-реализацией;

(2) $\mu(\langle V\rangle) \subseteq N(\varphi(a);\lambda)$ для всех $V \in \sigma$ и $a \in V$.

Теорема 4.2. *Композиция $A \xrightarrow{\theta} \mathfrak{N}\langle\sigma\rangle \xrightarrow{\mu} X$ любого канонического отображения θ с отображением μ, удовлетворяющим (λ,γ)-условию относительно отображения $\varphi : A \to X$, является $(\lambda \circ \gamma)$-близкой к отображению φ.*

Доказательство. Пусть $a \in A$, $a \in \bigcap V_i$ и $\theta(a) = \sum \alpha_i \langle V_i\rangle$. Так как отображение μ является γ-реализацией, то $\{\mu\circ\theta(a), \mu\langle V_i\rangle \mid i\} \subseteq U \in \gamma$. Из условия (2) следует, что $\{\varphi(a), \mu\langle V_i\rangle \mid i\} \subseteq W \in \lambda$. Отсюда получается искомая близость отображений $\operatorname{dist}(\mu\circ\theta(a), \varphi(a)) \prec \lambda \circ \gamma$. ■

В оставшейся части параграфа приведем ряд теорем, из которых с помощью теоремы 3.2 вытекают как теорема 1.3, так и теоремы Хавера и Торунчика.

Теорема 4.3. *Пусть для метрического счетномерного пространства X выполнено одно из двух условий:*

(3) *$X \in$ LC;*

или

(4) *X имеет открытую базу из слабо гомотопически тривиальных множеств, т. е. $\pi_i X = 0$ для всех $i \geq 0$.*

Тогда $X \in$ A-ANE.

Доказательство. Мы установим несколько более сильный факт: если в случае (3) или (4) в частичном отображении $Z \supseteq A \xrightarrow{f} X$ одно из двух пространств A или $f(A)$ счетномерно, то для любого покрытия $\omega \in \operatorname{cov} X$ существует окрестностное ω-продолжение $\hat{f} : U \to X$ отображения f.

Случай локальной стягиваемости X. Для любого натурального числа $i \geq 0$ и для любой точки $x \in X$ возможен выбор таких окрестностей $V_i(x) \subseteq U_i(x) \subseteq V_{i-1}$ и стягиваний $F^{x,i} : V_i(x) \times I \to U_i(x)$ окрестности $V_i(x)$ по окрестности $U_i(x)$ в точку x, что покрытие $\{U_0(x) \mid x \in X\}$ будет вписано в ω, а покрытие $\{U_i(x) \mid x \in X\}$ будет звездно вписано в покрытие $\{V_{i-1}(x) \mid x \in X\}$ для всех $i \geq 1$. Для определенности будем считать, что $F^{x,i} \restriction_{V_i(x)\times\{0\}} = \mathrm{Id}$, $F^{x,i} \restriction_{V_i(x)\times\{1\}} = x$.

Так как A или $f(A)$ счетномерны, то в сил 2.7 существуют открытые в Z семейства σ и σ_i, $i \geq 2$, для которых $\sigma = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \sigma_i$ покрывает A, кр.$\sigma_i = 1$, а также $f(\sigma_i \cap A) \succ \{V_i(x) \mid x \in X\}$. Не теряя общности, можно считать, что нервы σ и $\sigma \restriction_A$ изоморфны, т. е.

$$\bigcap_{i=1}^{k} W_i \neq \varnothing \Longleftrightarrow \bigcap_{i=1}^{k} (W_i \cap A) \neq \varnothing$$

для $W_i \in \sigma$. Нашей целью будет продолжение отображения f на тело $\bigcup \sigma$ семейства σ, являющееся окрестностью A.

Для этого рассмотрим нерв $\mathfrak{N}\langle\sigma\rangle = \mathfrak{N}$ и каноническое отображение $\theta : \bigcup \sigma \to \mathfrak{N}$. Искомое отображение f будет построено в виде композиции θ и некоторого отображения $g : \mathfrak{N} \to X$. Прежде чем переходить к определению отображения g, отметим в качестве важного обстоятельства то, что на множестве вершин любого симплекса этого нерва имеется естественный линейный порядок. Если $\Delta = \langle W_0, \dots, W_k\rangle$, $W_i \in \sigma_{n_i}$, представляет собой k-мерный симплекс, то $\bigcap\limits_{i=0}^{k} W_i \neq \varnothing$, а все числа n_i различны (это важное обстоятельство следует из однократности систем σ_{n_i}). Поэтому возможно линейно упорядочить вершины симплекса Δ таким образом, чтобы номера n_i систем σ_i образовывали возрастающую последовательность $n_0 < n_1 < \dots < n_k$.

Для $W \in \sigma_i$ имеем $f(W \cap A) \subseteq S \in \{V_i(x)\}$, а поскольку $\mathrm{St}(S; \{U_i(x)\}) \subseteq V_{i-1}(x_W)$ для некоторой точки x_W, то

(5) $\mathrm{St}(f(W \cap A); \{U_i(x)\}) \subseteq V_{i-1}(x_W)$.

Определим $g_0 : \mathfrak{N}^{(0)} \to X$ формулой $g_0(\langle W\rangle) = x_W$. Далее будем последовательно продолжать отображение g_0 до отображений $g_i : \mathfrak{N}^i \mapsto X$, $i = 1, \dots, k-1$, заданных на i-остове нерва, каждый раз требуя выполнения условия:

(6) для любого симплекса $\Delta^{k-1} = \langle W_0, \dots, W_{k-1}\rangle$, $k > 1$, имеет место включение

$$f(W_0 \cap A) \cup g_{k-1}(\Delta^{k-1}) \subseteq U_{n_0-1}(x_{W_0}).$$

Построим отображение $g_k : \mathfrak{N}^{(k)} \to X$, $g_k\restriction_{\mathfrak{N}^{(k-1)}} = g_{k-1}$, если уже построено отображение $g_{k-1} : \mathfrak{N}^{(k-1)} \to X$, удовлетворяющее (6).

Лемма 4.4. *Если $\Delta^k = \langle W_0, W_1, \dots, W_k\rangle$ — k-мерный симплекс $\mathfrak{N}$, то $g_{k-1}(\Delta^{k-1}) \subseteq V_{n_0-1}(x_{W_0})$, где $\Delta^{k-1} = \langle W_1, \dots, W_k\rangle$ — грань Δ^k.*

Доказательство леммы. В силу (6) имеем $f(W_1 \cap A) \cup g_{k-1}(\Delta^{k-1}) \subseteq U_{n_1-1}(x_{W_1})$. Так как $\bigcap\limits_{i=0}^{k} W_i \cap A \neq \varnothing$ и, следовательно, $f(W_0 \cap A) \cap f(W_1 \cap A) \neq \varnothing$, то

$$f(W_1 \cap A) \cup g_{k-1}(\Delta^{k-1}) \subseteq \mathrm{St}(f(W_0 \cap A); \{U_{n_1-1}(x)\}).$$

В силу (5) имеем $\mathrm{St}(f(W_0 \cap A); U_{n_1-1}(x)) \subseteq V_{n_1-2}(x_{W_0})$. Поскольку $n_0 \leq n_1 - 1$, то $V_{n_1-2}(x_{W_0}) \subseteq V_{n_0-1}(x_{W_0}) \subseteq V_{n_0-1}(x_{W_0})$ и, значит, $g_{k-1}(\Delta^{k-1}) \subset V_{n_0-1}(x_{W_0})$. ■

Теперь отображение $g_k\restriction_{\Delta^k}$ может быть корректно определено формулой

$$g_k(t\cdot\langle W_0\rangle + (1-t)\cdot v) = F^{x_{W_0},n_0-1}(g_{k-1}(v),t), \quad \text{где } v\in\langle W_1,\dots,W_k\rangle.$$

Из включения $\operatorname{Im} F^{x_{W_0},n_0-1}\subseteq U_{n_0-1}(x_{W_0})$ несложно вывести следующий факт.

Лемма 4.5. $f(W_0\cap A)\cup g_k(\Delta^k)\subseteq U_{n_0-1}(x_{W_0})$.

Лемма 4.6. $g_k\restriction_{\partial\Delta^k} = g_{k-1}$.

Доказательство леммы 4.6. Пусть $u = t\cdot\langle W_0\rangle + (1-t)\cdot v\in\partial\Delta^k$. Если $t=0$, то $u=v\in\langle W_1,\dots,W_k\rangle$ и $g_k(u) = g_{k-1}(v) = g_{k-1}(u)$. Если $t>0$, то $v\in\partial\langle W_1,\dots,W_k\rangle$. Непосредственно из формулы для g_k следуют равенства $g_k(u) = F^{x_{W_0},n_0-1}(g_{k-1}(v),t)$ и $g_{k-1}(u) = F^{x_{W_0},n_0-1}(g_{k-2}(v),t)$. Так как равенство $g_{k-1}\restriction_{\partial\langle W_1,\dots,W_k\rangle} = g_{k-2}$ уже установлено, то $g_{k-2}(v) = g_{k-1}(v)$, что и завершает доказательство леммы. ■

Покажем, что искомым ω-продолжением $\hat f:\bigcup\sigma\to X$ является $\hat f = g\circ\theta$, и тем самым завершим доказательство (3). В самом деле, если $a\in A$, $a\in\bigcap\limits_{i=1}^{k} W_i$ и $\theta(a) = \sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i\cdot\langle W_i\rangle$, то в силу условия (6), примененного к симплексу $\langle W_0,\dots,W_k\rangle$, имеем

$$f(W_0\cap A)\cup g(\theta(a))\subseteq U_{n_0-1}(x_{W_0})\subseteq V_{n_0-2}(x_{W_0}),$$

т. е. $f(a)$ и $\hat f(a)$ являются ω-близкими (так как $n_0\ge 2$, а $\{V_{n_0-2}(x)\}\succ\omega$ при $n_0-1\ge 1$).

Случай, когда X имеет открытую базу из слабо гомотопически тривиальных множеств. Для любого числа $i\ge 0$ и для любой точки $x\in X$ возможен выбор таких окрестностей $V_i(x)$, что

(a) все гомотопические группы $\pi_m(V_i(x))$ являются нулевыми;

(b) покрытие $\{V_0(x)\mid x\in X\}$ вписано в ω;

(c) покрытие $\{V_i(x)\mid x\in X\}$ звездно вписано в покрытие $\{V_{i-1}(x)\mid x\in X\}$ для всех $i\ge 1$.

Так же, как и в первой части этой теоремы, мы построим открытые (в Z) системы $\sigma = \bigcup\limits_{i\ge 1}\sigma_i$, кр.$\sigma_i = 1$, $f(\sigma_i\bigcap A)\succ\{V_i(x)\mid x\in X\}$ и $\bigcup\sigma\supset A$. Не теряя общности, считаем, что $\mathfrak{N}\langle\sigma\rangle = \mathfrak{N}\langle\sigma\restriction_A\rangle$. Точно так же линейно упорядочим вершины симплексов $\Delta = \langle W_0,\dots,W_k\rangle$, $W_i\in\sigma_{n_i}$, из нерва $\mathfrak{N}\langle\sigma\rangle \rightleftharpoons \mathfrak{N}$ системы σ, требуя чтобы номера n_i систем σ_i образовывали возрастающую последовательность $n_0<n_1<\dots<n_k$.

Искомое отображение f будет построено в виде композиции канонического отображения $\theta:\bigcup\sigma\to\mathfrak{N}$ и некоторого отображения $g:\mathfrak{N}\to X$.

Для $W\in\sigma_i$ имеем $f(W\cap A)\subseteq S\in\{V_i(x)\}$, а поскольку $\operatorname{St}(S;\{V_i(x)\})\subseteq V_{i-1}(x_W)$ для некоторой точки x_W, то

(7) $\operatorname{St}(f(W\cap A);\{V_i(x)\})\subseteq V_{i-1}(x_W)$.

Определим $g_0:\mathfrak{N}^{(0)}\to X$ формулой $g_0(\langle W\rangle) = x_W$. Будем теперь последовательно продолжать отображение g_0 до отображений $g_i:\mathfrak{N}^i\mapsto X$, $i = 1,\dots,k-1$, заданных на i-остове нерва, каждый раз требуя выполнения условия:

(8) для любого симплекса $\Delta^{k-1} = \langle W_0,\dots,W_{k-1}\rangle$, $W_i\in\sigma_{n_i}, k>1$, имеет место включение $f(W_0\cap A)\cup g_{k-1}(\Delta^{k-1})\subseteq V_{n_0-1}(x_{W_0})$.

Аналогично лемме 4.4 доказывается следующий факт.

Лемма 4.7. *Если* $\Delta^k = \langle W_0, \dots, W_k\rangle$ — *k-мерный симплекс* $\mathfrak{N}$, *то*

$$g_{k-1}(\Delta_0^{k-1}) \subset V_{n_0-1}(x_{W_0})$$

и, следовательно,

$$g_{k-1}(\partial\Delta^k) \subseteq V_{n_0-1}(x_{W_0})$$

(здесь $\partial\Delta^k = \bigcup \Delta_i^{k-1}$, $\Delta_i^{k-1} = \langle W_0, \dots, \check{W}_i, \dots, W_k\rangle$).

Так как $V_{n_0-1}(x)$ $(k-1)$-связно, то существует отображение

$$g_k : \Delta^k \to V_{n_0-1}(x_{W_0}), \quad g_k{\restriction}_{\partial\Delta^k} = g_{k-1}.$$

При этом мы построили отображение $g_k : \mathfrak{N}^{(k)} \to X$, являющееся продолжением g_{k-1}, которое задано на k-мерном остове и удовлетворяет условию (8).

Итак, построено отображение $g : \mathfrak{N} \to X$, причем для любого симплекса Δ выполняется условие (8). Покажем, что искомым ω-продолжением $\hat{f} : \bigcup \sigma \to X$ является $\hat{f} = g \circ \theta$. В самом деле, если $a \in A$, $a \in \bigcap V_i$ и $\theta(a) = \sum a_i \cdot \langle V_i\rangle$, то в силу условия (8), примененного к симплексу $\langle W_0, \dots, W_k\rangle$, имеем

$$f(W_0 \cap A) \cup g(\theta(a)) \subseteq V_{n_0-1}(x_{W_0}).$$

Так как $\{V_{n_0-1}(x)\} \succ \omega$ при $n_0 - 1 \geq 0$, отсюда следует ω-близость f и $\hat{f}$. ■

Теорема 4.8. *Пусть метрическое пространство X имеет открытую базу* $\mathfrak{B}$, *все конечные пересечения которой гомотопически тривиальны* (*и, следовательно, гомотопически тривиальны сами элементы базы*). *Тогда* $X \in$ A-ANE.

Доказательство. Очевидно, что $X \in \mathrm{LC}^n$ для всех n. Из теоремы Майера — Виеториса [14] легко следует

Утверждение 4.9. *Если* $W_i \in \mathfrak{B}$, $i = 1, \dots, n$, *имеют непустое пересечение, то все гомотопические группы* $\bigcup\limits_{i=1}^{n} W_i$ *тривиальны.*

Пусть $\omega = \{U_\beta\} \in \operatorname{cov} X$, а $Z \supseteq A \xrightarrow{f} X$ — произвольное частичное отображение. Не теряя общности, можно считать, что покрытие ω состоит из элементов базы $\mathfrak{B}$.

Покрытие $\sigma = f^{-1}(\omega) \in \operatorname{cov} A$ *подобно раздуем* до системы $\tilde{\sigma} = \{V_\gamma\}$ открытых в Z множеств (последнее означает, что $\bigcap\limits_{i=1}^{m} V_{\gamma_i} \neq \varnothing$ влечет $V_{\gamma_i} \cap A \in \sigma$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{m} (V_{\gamma_i} \cap A) \neq \varnothing$). Сопоставляя каждому элементу $V_\gamma \in \tilde{\sigma}$ такой элемент $U_\beta \in \omega$, что $f(V_\gamma \cap A) \subseteq U_{\beta(\gamma)}$, мы тем самым определяем отображение $g_0 : \mathfrak{N}^{(0)} \to X, g_0(\langle V_\gamma\rangle) \in U_{\beta(\gamma)}$ на нульмерном остове нерва $\mathfrak{N}(\tilde{\sigma})$. Будем последовательно продолжать отображение g_0 до отображений $g_i : \mathfrak{N}^i \mapsto X, i = 1, \dots, k-1$, заданных на i-остове нерва, каждый раз требуя выполнения условия:

(9) для любого симплекса $\Delta^{k-1} = \langle V_0, \dots, V_{k-1}\rangle$, $k > 1$, имеет место включение

$$\left(\bigcup_{i=0}^{k-1} f(V_i \cap A)\right) \cup g_{k-1}(\Delta^{k-1}) \subseteq \bigcup_{i=0}^{k-1} U_{\beta(\gamma_i)}.$$

Отметим, что из условия (9) просто следует $g_{k-1}(\partial\Delta^k) \subseteq \bigcup\limits_{i=0}^{k} U_{\beta(\gamma_i)}$ для любого k-мерного симплекса $\Delta^k = \langle V_0, \dots, V_k\rangle$.

Так как $\bigcap\limits_{i=0}^{k} U_{\beta(\gamma_i)} \supseteq f((\cap V_i) \cap A) \neq \varnothing$, то в силу утверждения 4.9 имеем $\bigcup\limits_{i=0}^{k} U_{\beta(\gamma_i)} \in C^{\infty}$. Поэтому существует продолжение $g_k : \Delta^k \to \bigcup\limits_{i=0}^{k} U_{\beta(\gamma_i)}$ отображения g_{k-1}.

Из (9) легко вытекает, что отображение g есть ω^2-реализация. Из теоремы 4.2 получаем ω^4-близость отображения f к композиции $g \circ (\theta\restriction_A) : A \to X$ и, следовательно, $g \circ \theta : \bigcup \tilde{\sigma} \to X$ является искомым ω^4-продолжением f. Ввиду произвольности покрытия ω это влечет $X \in$ A-ANE. ■

§ 5. Послойно тривиальные отображения

Рассмотрим проекцию $p \rightleftharpoons \mathrm{pr}_M : M \times N \to M$ произведения метрических пространств на первый сомножитель. Пусть образ $p(X)$ подмножества $X \subset M \times N$ (не обязательно замкнутого) содержится в $Y \subset M$. Тогда через $\pi : X \to Y$ обозначим ограничение p на X. От отображения π не требуется, вообще говоря, ни сюръективности, ни даже всюду плотности $\pi(X)$ в Y.

Введем ряд новых понятий. Будем говорить, что вложение $A \hookrightarrow B$ подмножеств A и B произведения $M \times N$ является *послойно стягиваемым внутри проекции* p, если существуют отображение $g : p(A) \to B$, $p \circ g = \mathrm{Id}_{p(A)}$, а также гомотопия $H_t : A \to B$ такие, что

(1) $p \circ H_t = p$ для всех $t \in I$ (условие послойности гомотопии H_t);

(2) $H_0 = \mathrm{Id}_A$;

(3) $H_1 = g \circ p$ (условие факторизуемости H_1 через проекцию p).

Фиксируем в этом параграфе совокупность Ω_X окрестностей множества X таких, что

(4) образ $p(\mathscr{U})$ содержит Y для всех $\mathscr{U} \in \Omega_X$;

(5) для любой окрестности $\mathscr{U} \in \Omega_X$ и для любой точки $y \in Y$ существует окрестность $O \rightleftharpoons O(y) \subset M$, обладающая следующим свойством: $O \times \mathrm{pr}_N(O^\bullet \cap X) \subset \mathscr{U}$ (здесь и далее через $C^\bullet$, где $C \subset M$, обозначается произведение $C \times N = p^{-1}(C)$).

Пусть $\mathscr{U}, \mathscr{V} \in \Omega_X$ и $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$. Будем говорить, что отображение $\pi : X \to Y$ является *послойно* $\mathscr{U}\mathscr{V}$*-стягиваемым внутри проекции* p, если существует окрестность $W \subset \pi\mathscr{V}$ множества Y такая, что вложение $W^\bullet \cap \mathscr{V} \hookrightarrow W^\bullet \cap \mathscr{U}$ послойно стягиваемо внутри проекции p. Говорят, что отображение $\pi : X \to Y$ является *послойно тривиальным внутри проекции* p, если для любой окрестности $\mathscr{U} \in \Omega_X$ существует меньшая окрестность $\mathscr{V} \in \Omega_X$, $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$, для которой отображение $\pi : X \to Y$ послойно $\mathscr{U}\mathscr{V}$-стягиваемо внутри проекции p; *локально послойно тривиально внутри проекции* p, если для любой окрестности $\mathscr{U} \in \Omega_X$ существуют окрестность $\mathscr{V} \in \Omega_X$, $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$, и семейство $\sigma = \{O(y) \mid y \in Y\}$ открытых в M множеств, покрывающих Y, такие, что $p(\mathscr{V}) \supset \bigcup \sigma$ и $O(y)^\bullet \cap \mathscr{V} \hookrightarrow O(y)^\bullet \cap \mathscr{U}$ послойно стягиваемо внутри p для всех $y \in Y$.

Предложение 5.1. *Пусть имеется последовательность окрестностей $\mathscr{V}_1 \supset \mathscr{V}_2 \supset \mathscr{V}_3 \supset \dots$ из Ω_X, а пространство Y содержится в объединении $W = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} W_i$ открытых подмножеств пространства M. Если выполнены следующие условия:*

(6) *$p(\mathscr{V}_{i+1}) \supset W_i$ для всех $i \geq 1$;*

(7) *вложение $W_i^\bullet \cap \mathscr{V}_{i+1} \hookrightarrow W_i^\bullet \cap \mathscr{V}_i$ является послойно стягиваемым внутри p для всех $i \geq 1$,*

то $\mathscr{V} \rightleftharpoons \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} W_i^\bullet \cap \mathscr{V}_{i+1} \in \Omega_X$ *и проекция* π *послойно* $\mathscr{V}_1\mathscr{V}$*-стягиваема внутри* p.

Доказательство. В силу [13] существует открытая в M счетная система $\{W_i'\}_{i=1}^{\infty}$, покрывающая Y, для которой $\mathrm{Cl}_W W_i' \subset W_i$. Ясно, что $\mathrm{Cl}_W F^n \subset E^n$, где $F^n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} W_i'$, а $E^n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} W_i$.

По предположению (7) существуют отображения $g_i : W_i \to \mathscr{V}_i$ и гомотопии $G_i : (W_i^\bullet \cap \mathscr{V}_{i+1}) \times I \to W_i^\bullet \cap \mathscr{V}_i$ такие, что

(9) $p \circ (G_i)_t = p$ для всех $t \in I$;

(10) $(G_i)_0 = \mathrm{Id}$;

(11) $(G_i)_1 = g_i \circ p$.

План дальнейшего доказательства предложения заключается в построении таких отображений $h_n : E^n \to \mathscr{V}_1$ и гомотопий $H_n : ((E^n)^\bullet \cap \mathscr{V}_{n+1}) \times I \to \mathscr{V}_1$, $n \geq 1$, что

(12) $p \circ (H_n)_t = p$ для всех $t \in I$;

(13) $(H_n)_0 = \mathrm{Id}$;

(14) $(H_n)_1 = h_n \circ p$;

(15) $H_{n+1} \restriction ((F^n)^\bullet \cap \mathscr{V}_{n+2}) = H_n \restriction ((F^n)^\bullet \cap \mathscr{V}_{n+2})$.

Тем самым $h_{n+1} \restriction F^n$ будет совпадать с $h_n \restriction F^n$, а формулами:

(α) $h(y) = h_n(y)$, где y принадлежит окрестности $F^\infty = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F^n = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} W_i'$ множества Y в M, а номер n таков, что $y \in F^n$,

(β) $H(x,t) = H_n(x,t)$, где $x \in \mathscr{V} \cap (F^\infty)^\bullet$, а номер n таков, что $x \in (F^n)^\bullet \cap \mathscr{V}_{n+1}$,

будут корректно определены непрерывное отображение $h : F^\infty \to \mathscr{V}_1$ и непрерывная гомотопия $H : \mathscr{V} \cap (F^\infty)^\bullet \to \mathscr{V}_1$. Тем самым будет установлено, что проекция π послойно $\mathscr{V}_1\mathscr{V}$-стягиваема.

В качестве h_1 и H_1 примем g_1 и G_1. Пусть $h_1, \dots, h_n$ и $H_1, \dots, H_n$, удовлетворяющие (12)–(15), уже построены. Тогда в метрическом пространстве $C \rightleftharpoons E^n \cup W_{n+1} = E^{n+1}$ рассмотрим замкнутые множества $A \rightleftharpoons W_{n+1} \setminus E^n$ и $\mathrm{Cl}_C B$, где $B \rightleftharpoons (E^n \setminus W_{n+1}) \cup F^n$. Так как $\mathrm{Cl}_W(F^n) \subset E^n$, то A и $\mathrm{Cl}_C B$ не пересекаются и поэтому существует функция Урысона $\gamma : C \to [0,2]$ такая, что $\gamma^{-1}(0)$ — окрестность B, $\gamma^{-1}(2)$ — окрестность A. Тогда функции $\alpha(c) = 2 - \max(1, \gamma(c))$ и $\beta(c) = \min(1, \gamma(c))$ отображают C в отрезок $[0,1]$ и обладают следующими свойствами:

(16) $\alpha^{-1}(1) \cup \beta^{-1}(1) = C$, т. е. $\alpha(x) = 1$ или $\beta(x) = 1$ для любой точки $x \in C$;

(17) $\beta^{-1}(0)$ совпадает с $\gamma^{-1}(0)$ и является окрестностью B, а $\alpha^{-1}(0)$ совпадает с $\gamma^{-1}(2)$ и является окрестностью A.

Определим отображение $H_{n+1} : ((E^{n+1})^\bullet \cap \mathscr{V}_{n+2}) \times I \to \mathscr{V}_1$ формулой

$$H_{n+1}(x,t) = \begin{cases} H_n(x,t), & \text{если } x \in B^\bullet \cap \mathscr{V}_{n+2},\ t \in I; \\ G_{n+1}(x,t), & \text{если } x \in A^\bullet \cap \mathscr{V}_{n+2},\ t \in I; \\ H_n(G_{n+1}(x, \beta(p(x)) \cdot t), \alpha(p(x)) \cdot t), & \\ \qquad \text{где } x \in (E^n \cup W_{n+1})^\bullet \cap \mathscr{V}_{n+2},\ t \in I. & \end{cases}$$

Так как в точке $p(x) \in W_{n+1} \setminus E^n = A$ функция $\alpha(p(x))$ равна 0, а $(H_n)_0 = \mathrm{Id}$, то H_{n+1} — корректно определенная непрерывная гомотопия.

Очевидно, что $(H_{n+1})_0 = \mathrm{Id}$. Из послойности гомотопий H_n и G_{n+1} следует послойность гомотопии H_{n+1} : $(H_{n+1})_t \circ p = p$ для всех $t \in I$. Поскольку $(H_n)_1$

и $(G_{n+1})_1$ переводят все точки, лежащие в одном слое, в одну точку, а из (16) следует $\beta(p(x)) = 1$ или $\alpha(p(x)) = 1$, то $(H_{n+1})_1$ тоже переводит все точки, лежащие в одном слое, в одну точку. Если $p(x) \in F^n$ (т. е. $\gamma(p(x)) = 0$), то легко видеть, что $\beta(p(x)) = 0$, а $\alpha(p(x)) = 1$. Следовательно, $H_{n+1}(x,t) = H_n(x,t)$, т. е. выполнено свойство (15).

Рассмотрим отображение $h_{n+1} : E_{n+1} \to \mathscr{V}_1$, определенное формулой

$$h_{n+1}(y) = \begin{cases} h_n(y), & \text{если} \quad y \in \beta^{-1}(0); \\ H_n(G_{n+1}(g_{n+1}(y), \beta(y)), \alpha(y)), & \text{если} \quad y \in W_{n+1}. \end{cases}$$

Ясно, что в точках $y \in \beta^{-1}(0) \cap W_{n+1}$ отображение задано корректно. Осталось установить непрерывность h_{n+1} и совпадение $(H_{n+1})_1$ с $h_{n+1} \circ p$, что не составляет особого труда. Также легко доказывается, что окрестность $\mathscr{V}$ удовлетворяет условиям (4) и (5), т. е. $\mathscr{V} \in \Omega_X$. ■

Теперь приведем ряд условий на пространство X, гарантирующих для проекции графика свойства локально послойной тривиальности и послойной тривиальности (предложения 5.2–5.4).

Предложение 5.2. *Пусть $Z \hookleftarrow A \xrightarrow{\varphi} X \in \mathrm{LC}$ — частичное отображение, а $G_\varphi \rightleftharpoons \{(a, \varphi(a)) \mid a \in A\} \subset Z \times X$ — график φ. Тогда проекция $\pi : G_\varphi \to A$ графика G_φ на A является локально послойно тривиальной внутри проекции $p : Z \times X \to Z$.*

Доказательство. Легко проверить, что семейство Ω_{G_φ} совпадает с совокупностью всех окрестностей графика G_φ в $Z \times X$. Это будет использоваться также в 5.3–5.5.

Пусть $\mathscr{U} \supset G_\varphi$ — замкнутая окрестность в $Z \times X$. Для доказательства предложения нам необходимо будет найти такую окрестность $\mathscr{V} \in \Omega_{G_\varphi}$, $G_\varphi \subset \mathscr{V} \subset \mathscr{U}$, в $Z \times X$, что

(a) Для любой точки $a_0 \in A$ существует окрестность $O = O(a_0) \subset Z$, для которой вложение $O^\bullet \cap \mathscr{V} \hookrightarrow O^\bullet \cap \mathscr{U}$ послойно стягиваемо, где $O^\bullet \rightleftharpoons O \times X$.

Прежде всего рассмотрим многозначное отображение $\Phi : A \rightsquigarrow \mathbb{R}^+$, $\Phi(a) = \{r > 0 \mid \mathrm{N}(a; r) \times \mathrm{N}(\varphi(a); r) \subset \mathscr{U}\} \subset \mathbb{R}^+$. Легко видеть, что Φ — полунепрерывное снизу выпуклозначное отображение и, следовательно, по теореме Даукера [13, 5.5.20] существует непрерывная селекция $r : A \to (0, \infty)$. Еще одно многозначное отображение $\Psi : A \rightsquigarrow \mathbb{R}^+$, $\Psi(a) = \{r(a) \geq t > 0 \mid \mathrm{N}(\varphi(a); t)$ стягивается по $\mathrm{Cl}(\mathrm{N}(\varphi(a); r(a)))$ в точку$\} \subset \mathbb{R}^+$ является полунепрерывным снизу выпуклозначным и по теореме Даукера имеет непрерывную селекцию $t : A \to (0, \infty)$, при этом $t(a) \leq r(a)$.

Воспользуемся непрерывностью φ и уменьшим окрестность $\mathrm{N}(a; r(a))$ до окрестности $W(a)$ так, чтобы

(b) $\mathrm{N}(\varphi(a'); t(a')/2) \subset \mathrm{N}(\varphi(a); t(a))$ для любой точки $a' \in W(a) \cap A$.

В силу паракомпактности A существует семейство $\sigma' = \{W'(a) \subset W(a) \mid a \in A\}$ окрестностей точек из A, звездно вписанное в $\sigma \rightleftharpoons \{W(a) \mid a \in A\}$, $\sigma' \circ \sigma' \succ \sigma$. Сопоставим каждой точке $a \in A$ точку $z_a \in A$ так, что

$$\mathrm{St}_{\sigma'}(a) \rightleftharpoons \bigcup_{a \in W'(b)} W'(b) \subset W(z_a).$$

Из предложения 2.1 следует, что

(c) $\bigcap\limits_{i=1}^{n} W'(a_i) \neq \varnothing$ влечет $\bigcup\limits_{i=1}^{n} W'(a_i) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} W(z_{a_i})$.

Наконец, искомая окрестность $\mathscr{V} \in \Omega_{G_\varphi}$ определяется как

$$\mathscr{V} \rightleftharpoons \bigcup_{a \in A} W'(a) \times \mathrm{N}(\varphi(a); t(a)/2).$$

Ясно, что $G_\varphi \subset \mathscr{V} \subset \mathscr{U}$. Для проверки (a) рассмотрим произвольную точку $a_0 \in A$, ее окрестность $O = W'(a_0)$ и покажем, что вложение $O^\bullet \cap \mathscr{V} \hookrightarrow O^\bullet \cap \mathscr{U}$ допускает послойное стягивание.

Пусть $z \in O$. Из явных формул для $\mathscr{V}$ и O вытекает, что

(d) $(z \times X) \cap \mathscr{V} = \{z\} \times \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda_z} \mathrm{N}(\varphi(a_\lambda); t(a_\lambda)/2)$;

(e) $(z \times X) \cap \mathscr{U} \supset \{z\} \times \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda_z} \mathrm{N}(\varphi(z_{a_\lambda}); r(z_{a_\lambda}))$, где $\Lambda_z = \{\lambda \mid W'(a_\lambda) \ni \{z\}\}$.

Так как $W'(a_0) \ni \{z\}$ для всех $z \in O$, то индекс λ_0, соответствующий $W'(a_0)$, принадлежит $\bigcap\limits_{z \in O} \Lambda_z$. Если мы покажем, что $\bigcup\limits_{z \in O} \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda_z} \mathrm{N}(\varphi(a_\lambda); t(a_\lambda)/2)$ стягивается в точку по множеству $\bigcap\limits_{z \in O} \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda_z} \mathrm{N}(\varphi(z_{a_\lambda}); r(z_{a_\lambda}))$, то тем самым $(z \times X) \cap \mathscr{V}$ будет стягиваться в точку по $(z \times X) \cap \mathscr{U}$ (причем стягивание не зависит от z) и, следовательно, вложение $O^\bullet \cap \mathscr{V} \hookrightarrow O^\bullet \cap \mathscr{U}$ будет послойно стягиваемым.

Обратим внимание на то, что в силу (c) справедливо включение $\bigcup\limits_{z \in O} \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda_z} a_\lambda \subset W(z_{a_{\lambda_0}})$, а из (b) следует, что

$$\bigcup_{z \in O} \bigcup_{\lambda \in \Lambda_z} \mathrm{N}(\varphi(a_\lambda); t(a_\lambda)/2) \subset \mathrm{N}(\varphi(z_{a_{\lambda_0}}); t(z_{a_{\lambda_0}})).$$

Поскольку $t : A \to (0, \infty)$ — селекция Ψ, то $\mathrm{N}(\varphi(z_{a_{\lambda_0}}); t(z_{a_{\lambda_0}}))$ стягивается по $\mathrm{N}(\varphi(z_{a_{\lambda_0}}); r(z_{a_{\lambda_0}}))$ в точку и тем самым требуемое свойство (a) установлено. ∎

Предложение 5.3. *Пусть вложение* $X' \hookrightarrow X$ *является* LEC, $X' \in \mathrm{ANE}$, *а* $Z \hookleftarrow A \xrightarrow{\varphi} X'$ *— частичное отображение. Тогда проекция* $\pi : G_\varphi \to A$ *графика отображения* φ *на подпространство* A *является послойно тривиальной внутри проекции* $p : Z \times X \to Z$.

Доказательство. Пусть замкнутая окрестность $\mathscr{O} \subset X' \times X$ и отображение $\lambda : \mathscr{O} \times I \to X$ взяты из определения LEC-вложения. Кроме того, зафиксируем замкнутую окрестность $\mathscr{U} \supset G_\varphi$ в $Z \times X$. Так как $X' \in \mathrm{ANE}$, то отображение φ допускает такое продолжение $\hat{\varphi} : W \to X'$ на некоторую замкнутую окрестность $W \supset A$, что $G_{\hat{\varphi}} \subset \mathscr{U}$.

Рассмотрим многозначное отображение $\Phi : W \rightsquigarrow \mathbb{R}^+$, $\Phi(w) = \{r > 0 \mid \mathrm{N}(w; r) \times \mathrm{N}_X(\hat{\varphi}(w); r) \subset \mathscr{U}$ и $\mathrm{N}_{X'}(\hat{\varphi}(w); r) \times \mathrm{N}_X(\hat{\varphi}(w); r) \subset \mathscr{O}\}$. Очевидно, что φ — полунепрерывное снизу выпуклозначное отображение и, следовательно, по теореме Даукера существует непрерывная селекция $r : W \to (0, \infty)$.

Еще одно многозначное отображение $\Psi : W \rightsquigarrow \mathbb{R}^+$, $\Psi(w) = \{r(w) \geq t > 0 \mid \lambda(\mathrm{N}_{X'}(\hat{\varphi}(w); \varepsilon) \times \mathrm{N}_X(\hat{\varphi}(w); t) \times I) \subset \mathrm{N}_X(\hat{\varphi}(w); r(w))$ для некоторого $\varepsilon\}$ также является полунепрерывным снизу выпуклозначным отображением и по теореме Даукера имеет непрерывную селекцию $t : W \to (0, \infty)$, при этом $t(w) \leq r(w)$.

В качестве искомой окрестности $\mathscr{V} \in \Omega_{G_\varphi}$ возьмем

$$\mathscr{V} \rightleftharpoons \bigcup_{w \in \operatorname{Int} W} w \times \mathrm{N}_X(\hat{\varphi}(w); t(w)).$$

Ясно, что $G_\varphi \subset \mathscr{V} \subset \mathscr{U}$. Послойное стягивание $\mathscr{V}$ по $\mathscr{U}$ устроено так: если $w \in \operatorname{Int} W$, то $F_t(w, x) \rightleftharpoons w \times \lambda(\hat{\varphi}(w), x, t) \in w \times \mathrm{N}_X(\hat{\varphi}(w), r(w)) \subset \mathscr{U} \cap (w \times X)$, где

$x \in \mathrm{N}(\widehat{\varphi}(w), t(w))$, $0 \le t \le 1$. Ясно, что F_t — гомотопия, соединяющая $F_1 = \mathrm{Id}_{\mathscr{V}}$ с отображением F_0, которое факторизуется через проекцию p: $F_0 = \widehat{\varphi} \circ p$. ■

Следующее утверждение является усилением предложения 5.3 и доказывается аналогично ему.

Предложение 5.4. *Пусть вложение $X' \hookrightarrow X$ локально эквисвязно, а пространство X' представлено в виде объединения счетного числа подпространств F_i, $i \ge 1$, причем так, что любое частичное отображение $Z \hookleftarrow A \xrightarrow{\varphi} F_i$ имеет окрестностное продолжение $\hat{\varphi} : U \to X'$. Тогда для любого $i \ge 1$ проекция $\pi : G_\varphi \to A$ графика любого частичного отображения $Z \hookleftarrow A \xrightarrow{\varphi} F_i$ на подпространство A является послойно тривиальной внутри проекции $p : Z \times X \to Z$.*

В заключение параграфа приведем усиление предложения 1.7, позволяющее состыковывать послойно тривиальные отображения с A-ANE-пространствами.

Предложение 5.5. *Пусть X — замкнутое подмножество нормированного пространства Z. Если проекция $\pi_\varphi : G_\varphi \to X$ графика $G_\varphi \subset Z \times X$ частичного отображения $Z \hookleftarrow X \xrightarrow{\varphi \rightleftharpoons \mathrm{Id}_X} X$ послойно тривиальна внутри проекции $p \rightleftharpoons \mathrm{pr}_Z : Z \times X \to Z$, то $X \in$ A-ANE.*

Доказательство. Покажем, что для произвольного покрытия $\omega = \{W_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\} \in \operatorname{cov} X$ существует такое отображение $\widetilde{\varphi} : W \to X$, где W — окрестность A в Z, что $\operatorname{dist}(\varphi, \widetilde{\varphi}\restriction_X) \prec \omega$. Если это будет сделано, то $X \in$ A-ANE в силу леммы, легко получающейся из определения A-ANE и того факта, что $Z \in$ AE.

Лемма 5.6. *Если для любого покрытия $\omega \in \operatorname{cov} X$ частичное отображение $Z \hookleftarrow X \xrightarrow{\varphi \rightleftharpoons \mathrm{Id}_X} X$ имеет окрестностное ω-продолжение, то $X \in$ A-ANE.*

Рассмотрим покрытие $\omega' = \{W'_\beta\} \in \operatorname{cov} X$, звездно вписанное в ω: $\omega' \circ \omega' \succ \omega$. В силу предложения 2.1 существует отображение индексных множеств $\beta \mapsto \gamma = \gamma(\beta)$, для которого справедливо свойство 2.1(1). Кроме того, рассмотрим открытую систему $\sigma = \{S_\lambda\}$ в Z, покрывающую X и такую, что $\{\varphi(S_\lambda \cap X)\} \succ \omega'$. Пусть $\varphi(S_\lambda \cap X) \subset W'_{\beta = \beta(\lambda)} \subset W_{\gamma = \gamma(\beta)}$.

Так как отображение $\pi_\varphi : G_\varphi \to X$ послойно тривиально внутри $p : Z \times X \to Z$, то для окрестности $\mathscr{U} \rightleftharpoons \bigcup\limits_\lambda S_\lambda \times W'_{\beta(\lambda)} \in \Omega_{G_\varphi}$ графика G_φ существуют окрестности W, $Z \supset W \supset X$, и $\mathscr{V}$, $G_\varphi \subset \mathscr{V} \subset \mathscr{U}$, такие, что $p(\mathscr{V}) \supset W$ и $W^\bullet \cap \mathscr{V}$ послойно стягивается по $W^\bullet \cap \mathscr{U}$. Следовательно, существует отображение $\widetilde{\varphi} : W \to X$, для которого $(x, \widetilde{\varphi}(x)) \in \mathscr{U}$ при всех $x \in X$. Покажем, что $\widetilde{\varphi}$ и является искомым отображением.

Для $x_0 \in X$ обозначим $\Lambda' \rightleftharpoons \{\lambda \mid x_0 \in S_\lambda\}$. Легко видеть, что $x_0^\bullet \cap \mathscr{U} = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda'} x_0 \times W'_{\beta(\lambda)} = x_0 \times \big(\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda'} W'_{\beta(\lambda)}\big)$. Так как $x_0 = \varphi(x_0) \in \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda'} \varphi(S_\lambda \cap A) \subset \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda'} W'_{\beta(\lambda)}$, то из свойства 2.1(1) следует, что $x_0^\bullet \cap \mathscr{U} \subset x_0 \times \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda'} W_{\gamma(\beta(\lambda))}$. Так как $(x_0, \widetilde{\varphi}(x_0)) \in \mathscr{U}$, имеем $\widetilde{\varphi}(x_0) \in \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda'} W_{\gamma(\beta(\lambda))}$. Таким образом, $\varphi(x_0)$ и $\widetilde{\varphi}(x_0)$ содержатся в элементе $W_{\gamma(\beta(\lambda_0))}$ покрытия ω, где λ_0 есть тот элемент Λ', для которого $\varphi(x_0) \in W'_{\beta(\lambda_0)}$. ■

§ 6. Доказательство теоремы 1.6

Теорема 6.1. *Пусть пространство Y представлено в виде счетного объединения $\bigcup_{i=1}^{\infty} Y_{2i-1} \cup D$ своих замкнутых подпространств Y_{2i-1} и счетномерного подпространства D. Если*

(a) *ограничение $\pi_{2i-1} : X_{2i-1} \to Y_{2i-1}$ проекции $\pi : X \to Y$ на $X_{2i-1} = \pi^{-1}(Y_{2i-1})$ является послойно тривиальным внутри проекции $p : M \times N \to M$ для любого $i \geq 1$;*

(b) *проекция π является локально послойно тривиальной внутри p в случае $D \neq \varnothing$,*

то проекция π послойно тривиальна внутри p.

Доказательство. Пусть Ω_X (Ω_{X_i}) — совокупность окрестностей X (X_i) в $M \times N$, удовлетворяющих (4), (5) из § 5. Зафиксируем $\mathscr{V}_1 \in \Omega_X$. Так как проекция π_1 послойно тривиальна внутри p, существует $\mathscr{V}_2' \in \Omega_{X_1}$ такая, что π_1 — послойно $\mathscr{V}_1\mathscr{V}_2'$-стягиваемая проекция. Так как X_1 замкнуто в Y, то несложно построить $\mathscr{V}_2 \in \Omega_X$, такую, что π_1 послойно $\mathscr{V}_1\mathscr{V}_2$-стягиваема в $p : M \times N \to M$. Поскольку проекция π локально послойно тривиальна внутри p, то существуют открытое в M семейство $\sigma_1 = \{O_1(y) \mid y \in Y\}$, покрывающее Y, и окрестность $\mathscr{V}_3 \subset \mathscr{V}_2$, $\mathscr{V}_3 \in \Omega_X$, такие, что $p(\mathscr{V}_3) \supset \bigcup \sigma_1$ и вложение $(O_1(y))^\bullet \cap \mathscr{V}_3 \hookrightarrow (O_1(y))^\bullet \cap \mathscr{V}_2$ является послойно стягиваемым внутри проекции p для всех $y \in Y$.

Аналогично для $i \geq 4$ и $j \geq 2$ строятся окрестности $\mathscr{V}_i \in \Omega_X$, $\mathscr{V}_i \subset \mathscr{V}_{i-1}$, и семейства $\sigma_j = \{O_j(y) \mid y \in Y\}$ открытых в M множеств, покрывающих Y, таких, что

1) $\sigma_j \succ \sigma_{j-1}$;

2) π_j является послойно $\mathscr{V}_{2j-1}\mathscr{V}_{2j}$-стягиваемой проекцией внутри p;

3) $p(\mathscr{V}_{2j+1}) \supset \bigcup \sigma_j$, и вложение $(O_j(y))^\bullet \cap \mathscr{V}_{2j+1} \hookrightarrow (O_j(y))^\bullet \cap \mathscr{V}_{2j}$ послойно стягиваемо внутри проекции p для всех $y \in Y$.

Так как D счетномерно, в силу предложения 2.7

$$D \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{\lambda \in \Lambda_j} D_{2j}(\lambda),$$

где $\{D_{2j}(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda_j\}$ — семейство открытых в M множеств кратности 1, вписанное в σ_j. Обозначим

$$W_{2j} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_j} D_{2j}(\lambda) \quad \text{для } j \geq 1.$$

Рассмотрим также окрестность W_{2j-1}, для которой $p(\mathscr{V}_{2j}) \supset W_{2j-1} \supset Y_{2j-1}$, а вложение $(W_{2j-1})^\bullet \cap \mathscr{V}_{2j} \hookrightarrow (W_{2j-1})^\bullet \cap \mathscr{V}_{2j-1}$ является послойно стягиваемым внутри проекции p. Ясно, что $p(\mathscr{V}_{j+1}) \supset W_j$ для всех $j \geq 1$ и вложение $W_j^\bullet \cap \mathscr{V}_{j+1} \hookrightarrow W_j^\bullet \cap \mathscr{V}_j$ послойно стягиваемо внутри p. Тем самым выполнены условия (6) и (7) из предложения 5.1. Следовательно, $\mathscr{V} \rightleftharpoons \bigcup_{j=1}^{\infty} W_j^\bullet \cap \mathscr{V}_{j+1} \in \Omega_X$ и π является послойно $\mathscr{V}_1\mathscr{V}$-стягиваемой внутри p. Теорема доказана. ■

Доказательство теоремы 1.6. Так как класс пространств X, удовлетворяющих условию теоремы 1.6, выдерживает умножение на $[0, 1)$, в силу теоремы 1.2 достаточно доказать, что $X \in$ A-ANE.

Пусть $Z \hookleftarrow X \xrightarrow{\varphi \rightleftharpoons \mathrm{Id_X}} X$, $G_\varphi \subset Z \times X$, $\pi_\varphi : G_\varphi \to X$ и $p : Z \times X \to Z$ взяты из предложения 5.5. Покажем, что π_φ — послойно тривиальная проекция внутри p, тогда 5.5 влечет $X \in$ A-ANE. (Существование замкнутого вложения X в линейное нормированное пространство Z следует из [10].)

Так как $X \in$ LC, в силу предложения 5.2 π_φ является локально послойно тривиальной проекцией внутри p. Кроме того, из предложения 5.4 следует, что

$$\pi_\varphi\restriction_{\pi_\varphi^{-1}(X_i)} : \pi_\varphi^{-1}(X_i) \to X_i, \quad i \geq 1,$$

является послойно тривиальной проекцией внутри p. Так как $X = D \cup \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} X_i$, выполнены все условия теоремы 6.1 и, следовательно, π_φ является послойно тривиальной проекцией внутри p. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hu S.-T.* Theory of Retracts. Detroit: Wayne State Univ. Press, 1965.
2. *Haver W. E.* Locally contractible spaces that are absolute neighborhood retracts // Proc. Amer. Math. Soc. 1973. V. 40. P. 280–284.
3. *Toruńczyk H.* Concerning locally homotopy negligible sets and characterization of l_2-manifolds // Fund. Math. 1978. V. 101. P. 93–110.
4. *Dowker C. H.* Homotopy extension theorems // Proc. London Math. Soc. 1956. V. 6. P. 100–116.
5. *Mardešić S.* Approximate polyhedra, resolutions of maps and shape fibrations // Fund. Math. 1981. V. 114. P. 53–78.
6. *Ancel F. D.* The role of countable dimensionality in the theory of cell-like relations // Trans. Amer. Math. Soc. 1985. V. 287. P. 1–40.
7. *Mardešić S.* Absolute neighborhood retracts and shape theory // History of Topology. Amsterdam: Elsevier Science, 1999.
8. *Cauty R.* Un espace metrique lineaire qui n'est pas un retracte absolu // Fund. Math. 1994. V. 146. P. 85–99.
9. *Nhu N., Sakai K.* The compact neighborhood extension property and local equi-connectedness // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 121. P. 259–265.
10. *Borsuk K.* Theory of retracts. Warszawa: PWN, 1967.
11. *Addis D. F., Gresham J. H.* A class of infinite dimensional spaces. Part 1: Dimension theory and Alexandroff's problem // Fund. Math. 1978. V. 101. P. 195–205.
12. *Александров П. С., Пасынков Б. А.* Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1975.
13. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Наука, 1986.
14. *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. М.: Мир, 1971.
15. *Repovš D., Semenov P.* Continuous selections of multivalued mappings. Dordrecht: Kluwer, 1998. (Math. Appl.; 455).

Статья поступила 10 ноября 2000 г.

Агеев Сергей Михайлович
Брестский гос. университет им. А. С. Пушкина,
бульвар Космонавтов, 21, Брест 224665, Беларусь;
ageev@highmath.brsu.brest.by;

Dušan Repovš (Душан Реповш)
University of Ljubljana, Jadranska 19, 1000, Ljubljana, Slovenia
dusan.repovs@fmf.uni-lj.si