Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2002. Том 43, № 3

УДК 517.95

К ВОПРОСУ О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

К. Б. Сабитов, М. Ф. Мугафаров

Аннотация: Установлены экстремальные свойства регулярных и обобщенных решений задачи Трикоми для системы уравнений смешанного типа

$$L_iU \equiv K(y)u_{ixx} + u_{iyy} + A_i(x,y)u_{ix} + B_i(x,y)u_{iy} + \sum_{k=1}^{n} C_{ik}(x,y)u_k = F_i(x,y), \tag{1}$$

где $yK(y) > 0$ при $y \neq 0$, $i = \overline{1,n}$, $n \geq 2$, $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ при некоторых ограничениях на ее коэффициенты. На основании этих свойств альтернирующим методом типа Шварца доказана однозначная обобщенная разрешимость задачи Трикоми для системы (1), когда $K(y) = \operatorname{sgn} y \cdot |y|^m$, $m = \mathrm{const} \geq 0$, $F_i(x,y) \equiv 0$, при произвольном подходе эллиптической границы области к оси $y = 0$, за исключением случаев касания и осцилляции. Ил. 1, библиогр. 24.

§ 1. Постановка задачи. Основные результаты

Рассмотрим систему

$$L_iU \equiv K(y)u_{ixx} + u_{iyy} + A_i(x,y)u_{ix} + B_i(x,y)u_{iy} + \sum_{k=1}^{n} C_{ik}(x,y)u_k = F_i(x,y), \tag{1}$$

где $yK(y) > 0$ при $y \neq 0$, $i = \overline{1,n}$, $n \geq 2$, $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, в области $D \subset R^2$, ограниченной простой кривой Жордана Γ, лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A(0,0)$ и $B(l,0)$, $l = \mathrm{const} > 0$, и характеристиками AC и CB системы (1) при $y < 0$. Части области D, в которых $y > 0$ и $y < 0$, обозначим соответственно через D_+ и D_-.

В области D для системы (1) поставим аналог задачи Трикоми.

Задача T. *Найти функцию $U(x,y)$, удовлетворяющую условиям*

$$U(x,y) \in C(\overline{D}) \wedge C^1(D) \wedge C^2(D_+ \cup D_-); \tag{2}$$

$$L_iU(x,y) \equiv F_i(x,y), \ (x,y) \in D_+ \cup D_-, \quad i = \overline{1,n}; \tag{3}$$

$$U(x,y) = \Phi(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma; \tag{4}$$

$$U(x,y)|_{\overline{AC}} = \Psi(x), \quad 0 \leq x \leq l/2, \tag{5}$$

где $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ и $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ — заданные достаточно гладкие вектор-функции, $\varphi_i(0,0) = \psi_i(0)$.

Краевые задачи для систем уравнений смешанного типа изучены в работах [1–10]. В них теоремы единственности и существования в определенном

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00934).

смысле решения задачи T доказаны в предположении, что кривая Γ в точках A и B оканчивается ортогонально к оси Ox или сколь угодно малыми дугами «нормальной» кривой системы (1) и при достаточно жестких ограничениях на коэффициенты системы. В работе [5] установлен принцип максимума модуля $|U(x,y)| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} u_i^2(x,y)}$ решения задачи T для системы (1) при $K(y) = y$, $A_i(x,y) = B_i(x,y) \equiv 0$, $(C_{ik}(x,y))$, $i,k = \overline{1,n}$, $n \geq 2$, — отрицательно определенная матрица, компоненты которой в области D_+ удовлетворяют условиям

$$(n-1)(C_{ik}(x,y) + C_{ki}(x,y)) \leq 2(C_{ii}(x,y)C_{kk}(x,y))^{1/2}, \quad i \neq k, \qquad (*)$$

а в области D_- достаточно малы, из которого следует единственность решения задачи T. Если граничные функции достаточно гладкие и кривая Γ в точках A и B оканчивается ортогонально к оси Ox или сколь угодно малыми дугами «нормальной» кривой системы (1), на основе теоремы единственности методом интегральных уравнений получена теорема существования решения задачи T. В работе [8] результаты из [5] перенесены для системы уравнений смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями изменения типа. В работах [3, 4, 6] при некоторых геометрических ограничениях на кривую Γ при условии, что матрицы A, B и C достаточно малы, доказана однозначная разрешимость задачи T в пространстве $W_2^1(D)$. В работах [1, 2, 6, 9] задача Трикоми исследована для систем уравнений смешанного типа первого порядка.

Считая максимумом решения $U(x,y)$ системы (1) число $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}} u_i(x,y)$ (см. [11]), в данной работе установим экстремальные свойства решений задачи T в областях эллиптичности, гиперболичности и в целом в смешанной области D в классе регулярных и обобщенных решений системы (1). Под обобщенным в области D решением системы (1) понимается предел последовательности регулярных в D решений системы (1), равномерно сходящейся к нему в замкнутой области $\overline{D}$. На основании этих свойств получены теоремы единственности и существования обобщенного решения задачи T при произвольном подходе кривой Γ к оси Ox, за исключением случаев касания и осцилляции, без ограничений $(*)$ и малости коэффициентов системы (1). Для доказательства существования обобщенного решения задачи T построен альтернирующий процесс типа Шварца.

§ 2. Экстремальные свойства решений системы в области эллиптичности

Лемма 1. *Пусть* 1) *функция* $U(x,y)$ *принадлежит* $C(\overline{D}_+) \wedge C^2(D_+)$ *и* $L_iU \equiv F_i$, *в* D_+ *при всех* $i = \overline{1,n}$;

2) *коэффициенты системы* (1) *в области* D_+ *ограничены, и*

$$C_{ik}(x,y) \geq 0 \text{ при } k \neq i, \quad C_{ii}(x,y) + \sum_{k\neq i}^{n} C_{ik}(x,y) < 0, \quad F_i \geq 0 \ (\leq 0), \qquad (6)$$

или

$$C_{ik}(x,y) \geq 0 \text{ при } k \neq i, \quad C_{ii}(x,y) + \sum_{k\neq i}^{n} C_{ik}(x,y) \leq 0, \quad F_i > 0 \ (< 0). \qquad (7)$$

Тогда если $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}_+} u_i(x,y) > 0$ $(\min\limits_i \min\limits_{\overline{D}_+} u_i(x,y) < 0)$, *то этот максимум (минимум) достигается только на границе области* D_+.

Доказательство. Пусть $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}_+} u_i(x,y) = u_j(Q) > 0$. Допустим, что $Q \in D_+$. Тогда в точке Q

$$u_{jx} = u_{jy} = 0, \quad u_{jxx} \le 0, \quad u_{jyy} \le 0 \tag{8}$$

и в силу условий (6) и (8)

$$L_j[U(Q)] = Ku_{jxx}(Q) + u_{jyy}(Q) + \sum_{k=1}^{n} C_{jk} u_k(Q)$$

$$= Ku_{jxx}(Q) + u_{jyy}(Q) + \sum_{k\ne j}^{n} C_{jk}[u_k(Q) - u_j(Q)] + u_j(Q)\left(C_{jj} + \sum_{k\ne j}^{n} C_{jk}\right) < 0.$$

С другой стороны, $L_j[U(Q)] = F_j(Q) \ge 0$. Полученное противоречие доказывает справедливость принципа максимума с условиями (6). Аналогично показывается справедливость принципа максимума при выполнении условий (7).

Лемма 2. *Пусть* 1) *функция* $U(x,y)$ *принадлежит* $C(\overline{D}_+) \wedge C^2(D_+)$ *и* $L_i U \equiv 0$, *в* D_+ *при всех* $i = \overline{1,n}$;

2) *коэффициенты системы* (1) *в области* D_+ *ограничены, и*

$$C_{ii}(x,y) + \sum_{k\ne i}^{n} |C_{ik}(x,y)| < 0. \tag{9}$$

Тогда если $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}_+} |u_i(x,y)| > 0$, *то этот максимум достигается только на границе области* D_+.

Доказательство. Пусть $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}_+} |u_i(x,y)| = |u_j(Q)| > 0$. Допустим, что $Q \in D_+$. Пусть $u_j(Q) > 0$. Тогда в силу условий (8) и (9)

$$L_j[U(Q)] \le Ku_{jxx}(Q) + u_{jyy}(Q) + C_{jj}u_j(Q) + \sum_{k\ne j}^{n} |C_{jk}||u_k(Q)|$$

$$\le Ku_{jxx}(Q) + u_{jyy}(Q) + u_j(Q)\left(C_{jj} + \sum_{k\ne j}^{n} |C_{jk}|\right) < 0.$$

С другой стороны, $L_j[U(Q)] = 0$. Если $u_j(Q) < 0$, то

$$L_j[U(Q)] \ge Ku_{jxx}(Q) + u_{jyy}(Q) + C_{jj}u_j(Q) - \sum_{k\ne j}^{n} |C_{jk}||u_k(Q)|$$

$$\ge Ku_{jxx}(Q) + u_{jyy}(Q) + u_j(Q)\left(C_{jj} + \sum_{k\ne j}^{n} |C_{jk}|\right) > 0,$$

что противоречит $L_j[U(Q)] = 0$.

Лемма 3. *Пусть* 1) $U(x,y) \in C(\overline{D}_+) \wedge C^2(D_+)$ *и* $L_i U \equiv F_i$, *в* D_+ *при всех* $i = \overline{1,n}$;

2) *коэффициенты системы* (1) *в области* D_+ *ограничены, и*

$$C_{ik}(x,y) \ge 0, \text{ при } k \ne i, \quad C_{ii}(x,y) + \sum_{k\ne i}^{n} C_{ik}(x,y) \le 0, \quad F_i \ge 0 \ (\le 0), \tag{10}$$

при этом функции $u_i(x,y)$ *не равны постоянной в любой подобласти области* D_+.

Тогда если $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}_+} u_i(x) = u_j(Q) > 0$, $(\min\limits_i \min\limits_{\overline{D}_+} u_i(x) = u_j(Q) < 0)$, *то этот максимум (минимум) достигается только на границе области* D_+.

Доказательство. Введем вспомогательную функцию $W(x,y) = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, где $w_i(x,y) = u_i(x,y) - u_j(Q)$, которая в области D_+ является решением системы

$$L_i(W) = F_i - u_j(Q) \sum_{k=1}^{n} C_{ik}(x,y),$$

и $w_i(x,y) \leq 0$ в $\overline{D_+}$, $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}_+} w_i(x,y) = w_j(Q) = 0$. Тогда функция $w_j(x,y)$ в D_+ является решением эллиптического уравнения

$$M_j(w_j) \equiv K w_{jxx} + w_{jyy} + A_j w_{jx} + B_j w_{jy} + C_{jj} w_j = g_j, \tag{11}$$

где

$$g_j = F_j - u_j(Q) \sum_{k=1}^{n} C_{jk} - \sum_{k \neq j}^{n} C_{jk} w_k.$$

В силу условий (10) правая часть уравнения (11) неотрицательна в области D_+. Пусть $Q \in D_+$. Поскольку оператор M_j локально равномерно эллиптичен при $y \geq \delta > 0$, где δ — достаточно малое число, и его коэффициенты ограничены в D_+, то в силу теоремы Хопфа [12] $w_j(x,y) \equiv 0$, что невозможно. Значит, $Q \in \partial D_+$.

Лемма 4. *Пусть* 1) $U(x,y) \in C(\overline{D}_+) \wedge C^2(D_+)$ *и* $L_i U \equiv 0$ *в* D_+ *при всех* $i = \overline{1,n}$;

2) *коэффициенты системы* (1) *в области* D_+ *ограничены, и*

$$C_{ii}(x,y) + \sum_{k \neq i}^{n} |C_{ik}(x,y)| \leq 0, \tag{12}$$

при этом функции $u_i(x,y)$ *не равны постоянной в любой подобласти области* D_+.

Тогда $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}_+} |u_i(x,y)| > 0$ *достигается только на границе области* D_+.

Доказательство. Пусть $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}_+} |u_i(x,y)| = |u_j(Q)| > 0$. Не теряя общности, будем считать, что $u_j(Q) > 0$. Тогда $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}_+} u_i(x,y) = u_j(Q)$ и $|u_i(x,y)| \leq u_j(Q)$ в $\overline{D}_+$. Рассуждая, как при доказательстве леммы 3, введем новую функцию $W(x,y)$. При этом функция $w_j(x,y) = u_j(x,y) - u_j(Q)$ является решением эллиптического уравнения (11), правая часть которого в силу условия (12) в области D_+ неотрицательна. В самом деле,

$$g_j = -u_j(Q) C_{jj} - \sum_{k \neq j} C_{jk} [u_j(Q) + w_k] \geq -u_j(Q) \Big(C_{jj} + \sum_{k \neq j} |C_{jk}| \Big) \geq 0.$$

Если теперь $Q \in D_+$, то в силу теоремы Хопфа [12] имеем $w_j(x,y) \equiv 0$ в D_+, что невозможно.

Замечание 1. В леммах 1–4 условия на коэффициенты системы (1) существенны.

В качестве примера рассмотрим в области $D \subset \mathbb{R}^2$, содержащей в себе начало координат, систему

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + 4\alpha u_1 - 4\alpha^2(x^2+y^2)u_2 = 0,$$
$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} - 4\alpha^2(x^2+y^2)u_1 + 4\alpha u_2 = 0,$$

где $\alpha = \mathrm{const} > 0$, для которой

$$C_{ii} + \sum_{k\neq i}^{n} |C_{ik}| = 4\alpha + 4\alpha^2(x^2+y^2) > 0.$$

Она имеет решение $u_1 = u_2 = \exp[-\alpha(x^2+y^2)]$. Функции u_1 и u_2 достигают своего положительного глобального максимума внутри области D.

Замечание 2. Если в лемме 3 $\sum\limits_{k=1}^{n} C_{ik}(x,y) \equiv 0$ в области D_+ при любом i, то нет необходимости в условии $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}_+} u_i(x,y) > 0$ $(\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}_+} u_i(x,y) < 0)$.

Замечание 3. Экстремальные свойства модуля решений эллиптических и параболических систем изучались в работах [13–18].

Лемма 5. *Пусть* 1) $U(x,y) \in C(\overline{D}_+) \wedge C^1(D_+ \cup AB) \wedge C^2(D_+)$, $L_iU \equiv F_i$ *в* D_+ *при* $i = \overline{1,n}$*;*

2) *в области* D_+ *коэффициенты системы* (1) *ограничены и удовлетворяют условию* (10)*;*

3) $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}_+} u_i(x,y) = u_j(x_0,0) > 0$ $(\min\limits_i \min\limits_{\overline{D}_+} u_i = u_j(x_0,0) < 0), 0 < x_0 < l.$

Тогда

$$\lim_{y\to 0+} u_{jy}(x_0,y) < 0. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}_+} u_i(x,y) = u_j(Q) > 0$. Рассуждая аналогично доказательству леммы 3, введем новую функцию $W(x,y)$. При этом функция $w_j(x,y)$ является решением эллиптического уравнения (11), правая часть которого в силу условия (10) в области D_+ неотрицательна. Тогда коэффициенты уравнения (11) и функция $w_j(x,y)$ удовлетворяют условиям леммы 1 [19]. Поэтому

$$\lim_{y\to 0+} w_{jy}(x_0,y) < 0.$$

Отсюда уже следует неравенство (13).

Лемма 6. *Пусть* 1) $U(x,y) \in C(\overline{D}_+) \wedge C^1(D_+ \cup AB) \wedge C^2(D_+)$, $L_iU \equiv 0$ *в* D_+*;*

2) *в области* D_+ *коэффициенты системы* (1) *ограничены и удовлетворяют условию* (12)*;*

3) $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}_+} |u_i(x,y)| = |u_j(x_0,0)| > 0,\ 0 < x_0 < l.$

Тогда

$$\lim_{y\to 0+} \frac{\partial}{\partial y}|u_j(x_0,y)| < 0. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}_+} |u_i(x,y)| = |u_j(Q)| > 0$. В силу условий леммы можно считать $u_j(Q) > 0$. Тогда $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}_+} u_i(x,y) = u_j(Q)$ и $|u_i(x,y)| \leq$

$u_j(Q)$ в области D_+. Как и при доказательстве леммы 3, введем функцию $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, где $w_i = u_i(x,y) - u_j(Q)$. При этом функция $w_j(x,y)$ является решением эллиптического уравнения (11) и $w_j(x,y) \le 0$ в $\overline{D}_+$, $\max\limits_{\overline{D}_+} w_j(x,y) = w_j(Q) = 0$. Ввиду условия (12) правая часть уравнения (11) неотрицательна в D_+. Тогда коэффициенты уравнения (11) и функция $w_j(x,y)$ удовлетворяют условиям леммы 1 из [19], согласно которой

$$\lim_{y\to 0+} w_{jy}(x_0, y) < 0.$$

Из последнего неравенства следует (14).

§ 3. Экстремальные свойства решений системы в области гиперболичности

В области D_- перейдем к характеристическим координатам

$$\xi = x + \int\limits_0^y \sqrt{-K(t)}\,dt, \quad \eta = x - \int\limits_0^y \sqrt{-K(t)}\,dt,$$

где $K(y) \in C[y_c, 0] \wedge C^1[y_c, 0)$, y_c — ордината точки C. В этих координатах система (1) имеет вид

$$\widetilde{L}_i U(\xi,\eta) \equiv u_{i\xi\eta} + a_i(\xi,\eta) u_{i\xi} + b_i(\xi,\eta) u_{i\eta} + \sum_{k=1}^n c_{ik}(\xi,\eta) u_k = f_i(\xi,\eta), \tag{15}$$

где

$$a_i(\xi,\eta) = (A_i + B_i\sqrt{-K} - K'/2\sqrt{-K})/4K,$$

$$b_i(\xi,\eta) = (A_i - B_i\sqrt{-K} + K'/2\sqrt{-K})/4K,$$

$$c_{ik}(\xi,\eta) = C_{ik}/4K, \quad f_i(\xi,\eta) = F_i/4K,$$

а область D_- отображается в $\Delta = \{(\xi,\eta) : 0 < \xi < \eta < l\}$. Обозначим через $A_0 = (0,0)$, $B_0 = (l,l)$, $C_0 = (0,l)$ вершины треугольника Δ; $\alpha_i = a_i\beta_i$, $\beta_i = \exp\int b_i\,d\xi$, $h_i = a_{i\xi} + a_i b_i - c_{ii}$.

Будем предполагать, что коэффициенты $a_{i\xi}$, b_i, c_{ik} непрерывны в $\overline{\Delta}$, кроме, может быть, отрезка $\overline{A_0B_0}$, где они могут обращаться в бесконечность, и удовлетворяют одному из условий

$$\begin{cases} h_i(\xi,\eta) \ge 0, \ c_{ik}(\xi,\eta) \le 0 \text{ при } i \ne k, \\ \alpha_i(0,\eta) + \int\limits_0^\xi \beta_i(t,\eta) \sum\limits_{k=1}^n c_{ik}(t,\eta)\,dt > 0, \ 0 < \xi < \eta \le l; \end{cases} \tag{16}$$

$$\alpha_i(\xi,\eta) - \int\limits_0^\xi \beta_i(t,\eta) \left(|h_i(t,\eta)| + \sum_{k\ne i}^n |c_{ik}(t,\eta)| \right) dt > 0, \quad 0 < \xi < \eta \le l. \tag{17}$$

Предполагается, что функции $f_i(\xi,\eta)$ интегрируемы по ξ на каждом отрезке $[0,\xi_0]$ прямой $\eta = \eta_0$, $0 < \xi_0 < \eta_0 \le l$.

Определение 1. Под *регулярным решением системы* (15) в области Δ будем понимать функцию $U(\xi,\eta)$, удовлетворяющую условиям: $U(\xi,\eta) \in C(\overline{\Delta}) \wedge C^1(\Delta)$, $U_\eta \in C(\overline{\Delta} \backslash \overline{A_0B_0})$, $U_{\xi\eta} \in C(\Delta)$, $\widetilde{L}_i U(\xi,\eta) \equiv f_i(\xi,\eta)$ в Δ при $i = \overline{1,n}$.

Лемма 7. *Пусть* 1) *коэффициенты системы* (15) *обладают отмеченной выше гладкостью и удовлетворяют условию* (16)*;*

2) $f_i(\xi,\eta) \geq 0$ (≤ 0) *в* Δ*;*

3) $U(\xi,\eta)$ — *регулярное в* Δ *решение системы* (15), *равное нулю на характеристике* A_0C_0.

Тогда если $\max\limits_i \max\limits_{\overline{\Delta}} u_i(\xi,\eta) > 0$ $(\min\limits_i \min\limits_{\overline{\Delta}} u_i(\xi,\eta) < 0)$, *то этот максимум* (*минимум*) *достигается только на отрезке* $\overline{A_0B_0}$.

Доказательство. В области Δ рассмотрим тождество

$$\beta_i\tilde{L}_i(U) \equiv (\beta_i u_{i\eta} + \alpha_i u_i)_\xi - u_i\beta_i h_i + \beta_i \sum_{k\neq i}^n c_{ik}u_k$$

и проинтегрируем его по отрезку NM прямой $\eta = \mathrm{const}$, принадлежащему Δ. Тогда получим

$$(\beta_i u_{i\eta} + \alpha_i u_i)\big|_N^M = \int\limits_{NM} \beta_i f_i\,d\xi + \int\limits_{NM} \left(\beta_i h_i u_i - \beta_i \sum_{k\neq i}^n c_{ik}u_k\right) d\xi. \tag{18}$$

Пусть $\max\limits_i \max\limits_{\overline{\Delta}} u_i(\xi,\eta) = u_j(Q) > 0$, $Q \in \overline{\Delta}$. Ясно, что $Q \notin \overline{A_0C_0}$. Пусть $Q \in \Delta \cup C_0B_0$. Из точки Q проведем отрезок $\eta = \mathrm{const}$ до пересечения с характеристикой $\xi = 0$ в точке P. В равенстве (18) в качестве отрезка NM возьмем PQ и положим $i = j$. Тогда

$$\begin{aligned}\beta_j(Q)u_{j\eta}(Q) &= \int\limits_{PQ} \beta_j f_j\,d\xi + \int\limits_{PQ} \beta_j h_j[u_j - u_j(Q)]\,d\xi + u_j(Q)\int\limits_{PQ} \beta_j h_j\,d\xi \\ &\quad - \int\limits_{PQ} \beta_j \sum_{k\neq j}^n c_{jk}[u_k - u_j(Q)]\,d\xi - u_j(Q)\int\limits_{PQ} \beta_j \sum_{k\neq j}^n c_{jk}\,d\xi - \alpha_j(Q)u_j(Q) \\ &= \int\limits_{PQ} \beta_j f_j\,d\xi + \int\limits_{PQ} \beta_j h_j[u_j - u_j(Q)]\,d\xi - \int\limits_{PQ} \beta_j \sum_{k\neq j}^n c_{jk}[u_k - u_j(Q)]\,d\xi \\ &\qquad - u_j(Q)\left[\alpha_j(P) + \int\limits_{PQ} \beta_j \sum_{k=1}^n c_{jk}\,d\xi\right].\end{aligned}$$

Отсюда в силу условий леммы $u_{j\eta}(Q) < 0$; противоречие с тем, что в точке Q максимума функции u_j в $\overline{\Delta}$ производная $u_{j\eta}(Q)$ неотрицательна. Тогда $Q \in \overline{A_0B_0}$.

Лемма 8. *Пусть* 1) *коэффициенты системы* (15) *удовлетворяют условию* (17)*;*

2) $f_i(\xi,\eta) \equiv 0$*;*

3) $U(\xi,\eta)$ — *решение системы* (15), *равное нулю на характеристике* A_0C_0.

Тогда если $\max\limits_i \max\limits_{\overline{\Delta}} |u_i(\xi,\eta)| > 0$, *то этот максимум достигается на отрезке* $\overline{A_0B_0}$.

Доказательство. Пусть $\max\limits_i \max\limits_{\overline{\Delta}} |u_i(\xi,\eta)| = |u_j(Q)| > 0$. Не теряя общности, можно считать, что $u_j(Q) > 0$. Тогда $\max\limits_i \max\limits_{\overline{\Delta}} u_i(\xi,\eta) = u_j(Q) > 0$ и

$|u_i(\xi,\eta)| \le u_j(Q)$ в $\overline{\Delta}$. Пусть $Q \in \Delta \cup C_0B_0$. Рассуждая аналогично доказательству леммы 7, из равенства (18) получим

$$\beta_j(Q)u_{j\eta}(Q) + \alpha_j(Q)u_j(Q) \le \int\limits_{PQ} \beta_j|h_j||u_j|\,d\xi + \int\limits_{PQ} \beta_j \sum_{k\ne j}^{n} |c_{jk}||u_k|\,d\xi.$$

Из этой оценки в силу условия (17) следует, что

$$\beta_j(Q)u_{j\eta}(Q) \le -u_j(Q)\left[\alpha_j(Q) - \int\limits_{PQ} \beta_j\left(|h_j| + \sum_{k\ne j}^{n}|c_{jk}|\,d\xi\right)\right] < 0.$$

Последнее противоречит тому, что в точке $Q \in \Delta \cup C_0B_0$ максимума функции $u_j(\xi,\eta)$ производная $u_{j\eta}(Q)$ неотрицательна. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Замечание 4. (а) Если $h_i \ge 0$ и $c_{ik} \le 0$ при $k \ne i$ в области Δ, то условие (17) равносильно (16).

В самом деле, пусть $h_i \ge 0$ и $c_{ik} \le 0$ при $k \ne i$ в области Δ. Тогда $\beta_i h_i = \alpha_{i\xi} - \beta_i c_{ii}$ и

$$\alpha_i(\xi,\eta) - \int\limits_0^{\xi} \beta_i\left(h_i - \sum_{k\ne i}^{n} c_{ik}\right)dt = \alpha_i(0,\eta) + \int\limits_0^{\xi} \beta_i(t,\eta)\sum_{k=1}^{n} c_{ik}(t,\eta)\,dt > 0.$$

(б) Если $h_i \ge 0$ в области Δ, то условие (17) равносильно неравенству

$$\alpha_i(0,\eta) + \int\limits_0^{\xi} \beta_i\left(c_{ii} - \sum_{k\ne i}^{n}|c_{ik}|\right)dt > 0.$$

(в) Если $h_i(\xi,\eta) \ge 0$, $c_{ik}(\xi,\eta) \le 0$ при $k \ne i$, $c_{ii} + \sum\limits_{k\ne i}^{n} c_{ik} \ge 0$ в области Δ и $a_i(0,\eta) > 0$ на промежутке $(0,l]$, то условие (16) всегда выполнено.

Рассмотрим случай, когда коэффициенты системы (15) не удовлетворяют условиям (16) или (17).

Лемма 9. *Функции h_i и $h_i + \sum\limits_{k\ne i}^{n} c_{ik}$ являются инвариантами системы* (15) *относительно преобразований вида*

$$u_i(\xi,\eta) = v_i(\xi,\eta)\exp\mu(\xi,\eta), \tag{19}$$

где μ — числовая функция из пространства C^2.

Действительно, после подстановки (19) в систему (15) получим

$$v_{i\xi\eta} + a_i'v_{i\xi} + b_i'v_{i\eta} + \sum_{k=1}^{n} c_{ik}'v_k = 0,$$

где $a_i' = a_i + \mu_\eta$, $b_i' = b_i + \mu_\xi$, $c_{ik}' = c_{ik}$ при $k \ne i$, $c_{ii}' = a_i\mu_\xi + b_i\mu_\eta + \mu_{\xi\eta} + \mu_\xi\mu_\eta + c_{ii}$.

Тогда легко видеть, что

$$h_i' = a_{i\xi}' + a_i'b_i' - c_{ii}' = a_{i\xi} + a_ib_i - c_{ii} = h_i, \quad h_i' + \sum_{k\ne i}^{n} c_{ik}' = h_i + \sum_{k\ne i}^{n} c_{ik}.$$

Из этой леммы вытекает, что преобразованиями вида (19) можно добиться выполнения условия (16) при определенной гладкости коэффициентов системы (15) в $\overline{\Delta}$.

§ 4. Экстремальные свойства решений системы в смешанной области

1. Принцип экстремума в классе регулярных решений.

Определение 2. *Регулярным в области D решением системы* (1) назовем функцию $U(x,y)$, удовлетворяющую условиям (2) и (3), и такую, что $U_\eta \in C(\overline{\Delta}\backslash\overline{A_0B_0})$.

Теорема 1. *Пусть* 1) *коэффициенты системы* (1) *в области D_+ удовлетворяют условиям леммы* 3*;*

2) *коэффициенты системы* (1) *в области D_- в характеристических координатах (ξ,η) удовлетворяют условиям леммы* 7*;*

3) $F_i(x,y) \geq 0$ $(F_i(x,y) \leq 0)$ *в* $D_+ \cup D_-$*;*

4) $U(x,y)$ — *регулярное в D решение системы* (1), *равное нулю на характеристике AC.*

Тогда если $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}} u_i(x,y) > 0$ $(\min\limits_i \min\limits_{\overline{D}} u_i < 0)$, *то этот максимум* (*минимум*) *достигается на кривой* $\overline{\Gamma}$.

Доказательство. Пусть $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}} u_i(x,y) = u_j(Q) > 0$. В силу леммы 7 $Q \in \overline{D}_+$. На основании леммы 3 $Q \notin D_+$. Следовательно, $Q \in AB \cup \overline{\Gamma}$. Пусть $Q \in AB$, т. е. $Q = (x_0, 0)$, $0 < x_0 < l$. В этой точке из области D_- в силу леммы 7:

$$\lim_{y\to 0-} u_{jy}(x_0,y) \geq 0,$$

что на основании леммы 5 противоречит неравенству (13).

Теорема 2. *Пусть* 1) *коэффициенты системы* (1) *в области D_+ удовлетворяют условиям леммы* 4*;*

2) *коэффициенты системы* (1) *в области D_- в характеристических координатах (ξ,η) удовлетворяют условиям леммы* 8*;*

3) $F_i(x,y) \equiv 0$ *в* $D_+ \cup D_-$*;*

4) $U(x,y)$ — *регулярное в D решение системы* (1), *равное нулю на характеристике AC.*

Тогда если $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}} |u_i(x,y)| > 0$, *то этот максимум достигается на* $\overline{\Gamma}$.

Доказательство. Пусть $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}} |u_i(x,y)| = |u_j(Q)| > 0$. На основании леммы 8 точка Q находится на множестве $\overline{D}_+$. В силу леммы 4 $Q \notin D_+$. Тогда $Q \in AB \cup \overline{\Gamma}$. Допустим, что точка $Q \in AB$, т. е. $Q = (x_0, 0)$, $0 < x_0 < l$. В этой точке из области D_- вследствие леммы 4 имеем

$$\lim_{y\to 0-} \frac{\partial}{\partial y}|u_j(x_0,y)| \geq 0,$$

что ввиду леммы 6 противоречит неравенству (14). Следовательно, $Q \in \overline{\Gamma}$.

Следствие 1. (а) *Если выполнены условия теоремы* 1 *и* $F_i(x,y) \equiv 0$ *в* $D_+ \cup D_-$, *то для любой точки* $(x,y) \in \overline{D}$ *справедлива оценка*

$$\min_i \min_{\overline{\Gamma}} u_i(x,y) \leq u_i(x,y) \leq \max_i \max_{\overline{\Gamma}} u_i(x,y). \tag{20}$$

(б) *Если выполнены условия теоремы* 2, *то для любой точки* $(x,y) \in \overline{D}$

$$|u_i(x,y)| \leq \max_i \max_{\overline{\Gamma}} |u_i(x,y)|. \tag{21}$$

(в) *Если коэффициенты системы* (1) *удовлетворяют условиям теоремы* 1 *или теоремы* 2 *и в классе регулярных в* D *решений системы* (1) *существует решение задачи Трикоми, то оно единственно.*

Следствие 2. (а) *Пусть* 1) *коэффициенты системы* (1) *удовлетворяют условиям* 1 *и* 2 *теоремы* 1;

2) $F_i(x,y) \le 0 (\ge 0)$ *в* $D_+ \cup D_-$;

3) $U(x,y)$ — *регулярное в* D *решение системы* (1), *равное нулю на характеристике* AC.

Тогда если $u_i \ge 0$ (≤ 0) $\overline{\Gamma}$, *то* $u_i \ge 0$ (≤ 0) *в* $\overline{D}$.

(б) *Пусть* 1) *коэффициенты системы* (1) *удовлетворяют условиям теоремы* 1;

2) $L_iU \le L_iV$ *в области* $D_- \cup D_+$;

3) $u_i = v_i$ *на* AC;

4) $u_i \ge v_i$ *на* Γ.

Тогда $u_i \ge v_i$ *в области* D.

2. Принцип экстремума в классе обобщенных решений.

Определение 3. Функцию $U(x,y)$ назовем *обобщенным в области* D *решением системы* (1), если существует последовательность регулярных в области D решений $\{U_p(x,y)\}$ системы (1), равномерно сходящаяся к $U(x,y)$ в замкнутой области $\overline{D}$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* 1–3 *теоремы* 1 *и* $U(x,y)$ — *обобщенное в* D *решение системы* (1), *равное нулю на характеристике* AC. *Тогда если* $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}} u_i(x,y) > 0$ $(\min\limits_i \min\limits_{\overline{D}} u_i(x,y) < 0)$, *то этот максимум* (*минимум*) *достигается на кривой* $\overline{\Gamma}$.

Доказательство. Пусть $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}} u_i(x,y) = u_j(Q) = M > 0$, и допустим, что $Q \notin \overline{\Gamma}$. Тогда $Q \in \overline{D} \setminus \overline{\Gamma}$. Положим $E_i = \{(x,y) \in \overline{D} \setminus \overline{\Gamma} \mid u_i(x,y) = M\}$ и $E = \bigcup E_i$. Множество E замкнуто и не имеет общих точек с кривой $\overline{\Gamma}$. Поскольку множества $\overline{\Gamma}$ и E замкнуты, ограничены и не имеют общих точек, то расстояние между ними больше нуля. Поэтому существует простая кривая σ, лежащая в области D_+, с концами в точках A и B такая, что $\overline{\sigma} \cap E = \varnothing$ и $E \subset D_\sigma$, где D_σ — область, ограниченная кривыми σ, AC и CB. Так как $U(x,y)$ — обобщенное решение системы (1), равное нулю на AC, существует последовательность регулярных в D решений $\{U_p(x,y)\} = \{(u_1^p, u_2^p, \dots, u_n^p)\}$ системы (1) таких, что $U_p(x,y) = 0$ на $\overline{AC}$ и $\{U_p(x,y)\}$ в $\overline{D}$ равномерно сходится к $U(x,y)$. Поскольку в области D_σ выполнены условия теоремы 1, то $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}_\sigma} u_i^p(x,y)$ достигается на кривой $\overline{\sigma}$ при любом $p \in \mathbb{N}$.

Пусть $\max\limits_i \max\limits_{\overline{\sigma}} u_i(x,y) = M_0$. Ясно, что $M_0 < M$. Обозначим $\varepsilon = (M - M_0)/2$. В силу равномерной сходимости последовательности $\{U_p(x,y)\}$ в $\overline{D}_\sigma$ для взятого $\varepsilon > 0$ существует номер p_0 такой, что для всех $p > p_0$, $1 \le i \le n$ и $(x,y) \in \overline{D_\sigma}$ выполняется условие

$$u_i(x,y) - \varepsilon < u_i^p(x,y) < u_i(x,y) + \varepsilon.$$

Отсюда $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}_\sigma} u_i^p(x,y) \ge u_j^p(Q) > u_j(Q) - \varepsilon = (M + M_0)/2$ при $p > p_0$. На кривой $\overline{\sigma}$ имеем $u_i^p(x,y) < u_i(x,y) + \varepsilon \le (M + M_0)/2$ при $p > p_0$, $i = \overline{1,n}$.

Следовательно, $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}_\sigma} u_i^p(x,y)$ при $p > p_0$ не достигается на кривой $\overline{\sigma}$, что противоречит теореме 1. Полученное противоречие и доказывает наше утверждение. Принцип минимума доказывается аналогично.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* 1–3 *теоремы* 2 *и* $U(x,y)$ — *обобщенное в* D *решение системы* (1), *равное нулю на* AC. *Тогда если* $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}} |u_i(x,y)| > 0$, *то этот максимум достигается на кривой* $\overline{\Gamma}$.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 3 с применением теоремы 2.

Следствие 3. (а) *Если выполнены условия теоремы* 3, *при этом* $F_i(x,y) \equiv 0$, *то для любой точки* $(x,y) \in \overline{D}$ *справедлива оценка* (20).

(б) *Если выполнены условия теоремы* 4, *то для любой точки* $(x,y) \in \overline{D}$ *справедлива оценка* (21).

(в) *Если коэффициенты системы* (1) *удовлетворяют условиям теоремы* 3 *или теоремы* 4 *и в классе обобщенных в* D *решений системы* (1) *существует решение задачи Трикоми, то оно единственно.*

Следствие 4. (а) *Пусть* 1) *коэффициенты системы* (1) *удовлетворяют условиям* 1 *и* 2 *теоремы* 1;

2) $F_i(x,y) \leq 0$ (≥ 0) *в* $D_+ \cup D_-$;

3) $U(x,y)$ — *обобщенное в* D *решение системы* (1), *равное нулю на характеристике* AC. *Тогда если* $u_i \geq 0$ (≤ 0) *на* $\overline{\Gamma}$, *то* $u_i \geq 0$ (≤ 0) *в* $\overline{D}$.

(б) *Пусть* 1) *коэффициенты системы* (1) *удовлетворяют условиям теоремы* 3;

2) $L_i U \leq L_i V$ *в области* $D_- \cup D_+$;

3) $u_i = v_i$ *на* AC;

4) $u_i \geq v_i$ *на* Γ.

Тогда $u_i \geq v_i$ *в области* D.

§ 5. Примеры

Приведем примеры для иллюстрации изложенной теории.

1. В области D рассмотрим задачу Трикоми для уравнения смешанного типа:

$$\operatorname{sgn} y \cdot w_{xx} + w_{yy} + M w_x - \lambda w = 0, \tag{22}$$

где M — вещественная постоянная, а λ — комплексный параметр. Пусть $\operatorname{Re} w = u_1$, $\operatorname{Im} w = u_2$, $\operatorname{Re}\lambda = \alpha, \operatorname{Im}\lambda = \beta$. Тогда задача Трикоми для уравнения (22) равносильна задаче T для системы

$$\begin{aligned} &\operatorname{sgn} y u_{1xx} + u_{1yy} + M u_{1x} - \alpha u_1 + \beta u_2 = 0, \\ &\operatorname{sgn} y u_{2xx} + u_{2yy} + M u_{2x} - \beta u_1 - \alpha u_2 = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Лемма 10. *Если* $\alpha \geq |\beta|$, $M \leq -\sqrt{2(\alpha + |\beta|)}$, $U(x,y) = (u_1, u_2)$ — *функция, удовлетворяющая условиям* (2), (3) *применительно к системе* (23) *и равная нулю на характеристике* AC, *то для системы* (23) *справедливы теорема* 2 *и следствие* 1.

Доказательство. Для системы (23) $K(y) = \operatorname{sgn} y$, $A_1(x,y) = A_2(x,y) = M$, $B_1(x,y) = B_2(x,y) \equiv 0$, $C_{11}(x,y) = C_{22}(x,y) = -\alpha$, $C_{12}(x,y) = \beta = -C_{21}(x,y)$. Отсюда видно, что если $\alpha \geq |\beta|$, то коэффициенты системы (23) удовлетворяют условию 1 теоремы 2.

Система (23) в характеристических координатах $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ имеет вид

$$u_{1\xi\eta} - \frac{M}{4}(u_{1\xi} + u_{1\eta}) + \frac{\alpha}{4}u_1 - \frac{\beta}{4}u_2 = 0, \quad u_{2\xi\eta} - \frac{M}{4}(u_{2\xi} + u_{2\eta}) + \frac{\beta}{4}u_1 + \frac{\alpha}{4}u_2 = 0. \quad (24)$$

Отсюда $a_1 = a_2 = -\frac{M}{4}$, $b_1 = b_2 = -\frac{M}{4}$, $c_{11} = c_{22} = \frac{\alpha}{4}$, $c_{12} = -\frac{\beta}{4}$, $c_{21} = \frac{\beta}{4}$, $h_1 = h_2 = \frac{M^2}{16} - \frac{\alpha}{4}$, $\beta_1 = \beta_2 = \exp(-\frac{M}{4}\xi)$, $\alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{M}{4}\exp(-\frac{M}{4}\xi)$. Тогда условие (17) для системы (24) принимает вид

$$-\frac{M}{4}\exp\left(-\frac{M}{4}\xi\right) - \int_0^\xi \exp\left(-\frac{M}{4}t\right)\left(\left|\frac{M^2}{16} - \frac{\alpha}{4}\right| + \left|\frac{\beta}{4}\right|\right) dt > 0,$$

где необходимо $M < 0,\ 0 < \xi \le l$, или

$$M^2 - (|M^2 - 4\alpha| + 4|\beta|)\frac{\exp(-M\xi/4) - 1}{\exp(-M\xi/4)} > 0. \quad (25)$$

Для выполнения неравенства (25) достаточно, чтобы

$$M^2 - 4|\beta| - |M^2 - 4\alpha| \ge 0,$$

а последнее равносильно неравенству $M \le -\sqrt{2(\alpha + |\beta|)}$.

Таким образом, при указанных выше ограничениях коэффициенты системы (23) удовлетворяют условиям теоремы 2. Отсюда следует требуемое.

2. Рассмотрим задачу Трикоми для более общей, чем (1), нелинейной системы

$$L_iU \equiv K(y)u_{ixx} + u_{iyy} + A_iu_{ix} + B_iu_{iy} + F_i(x, y, U) = 0, \quad (26)$$

где $K(y)$, $A_i(x, y)$, $B_i(x, y)$, $F_i(x, y, U)$ — заданные в области D числовые функции, причем $|u_i| \le K_0$ в областях D_+ и D_-, и существуют непрерывные частные производные $\partial F_i/\partial u_k$, $i, k = \overline{1, n}$, $n \ge 2$.

Пусть $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ и $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ — любые функции из класса регулярных в D решений системы (26). Тогда их разность $U = W - Z$ является регулярным в D решением линейной системы. Действительно,

$$L_i(W) - L_i(Z) = K(y)u_{ixx} + u_{iyy} + Au_{ix} + Bu_{iy} + F_i(x, y, W) - F_i(x, y, Z) = 0. \quad (27)$$

Пусть $G(t) = F_i[x, y, tw_1 + (1 - t)z_1, tw_2 + (1 - t)z_2, \ldots, tw_n + (1 - t)z_n]$. Тогда

$$F_i(x, y, W) - F_i(x, y, Z) = \int_0^1 G'(t)\, dt = \sum_{k=1}^n u_k \int_0^1 \frac{\partial F_i}{\partial u_k}\, dt. \quad (28)$$

С учетом равенства (28) система (27) принимает вид

$$K(y)u_{ixx} + u_{iyy} + Au_{ix} + Bu_{iy} + \sum_{k=1}^n C_{ik}u_k = 0, \quad (29)$$

где

$$C_{ik} = \int_0^1 \frac{\partial F_i}{\partial u_k}\, dt.$$

Отсюда ясно, что если коэффициенты системы (29) удовлетворяют условиям теорем 1 или 2 и $U = W - Z = 0$ на характеристике AC, то $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}}(w_i - z_i)$ или $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}}|w_i - z_i|$ достигается на $\overline{\Gamma}$.

Таким образом, если в классе регулярных в D решений системы (26) существует решение задачи Т, то оно единственно при выполнении соответствующих условий относительно коэффициентов этой системы.

Замечание 5. В работе [5] для системы (26) $A = B \equiv 0$ при $K(y) = y$, $\partial F_i/\partial u_k > 0$ при $k, i = \overline{1,n}$ в $\overline{D}$ и $|u_i| \le k_0$; в D_+ матрица $(\partial F_i/\partial u_k)$ отрицательно определенная и

$$(n-1)\left(\frac{\partial F_i}{\partial u_k} + \frac{\partial F_k}{\partial u_i}\right) \le 2\left(\frac{\partial F_i}{\partial u_i}\frac{\partial F_k}{\partial u_k}\right)^{1/2}, \quad i \ne k;$$

в области D_- функции $\partial F_i/\partial u_k$ достаточно малы, в классе ее регулярных решений доказана единственность решения задачи Т. На основе теоремы единственности методом интегральных уравнений получена теорема существования регулярного решения задачи Т.

Если кривая Γ из класса Ляпунова в точках A и B оканчивается сколь угодно малыми дугами «нормальной» кривой, $\Phi \in C^1(\overline{\Gamma})$, $\Psi \in C^3[0, l/2]$, $\Psi(0) = \Phi(0,0) = \Phi(l,0) = 0$, то аналогично [5] для системы (26) методом интегральных уравнений проводится доказательство существования регулярного решения задачи Т.

Отметим также, что задача Т для нелинейных уравнений смешанного типа изучалась в работах [20, 21].

§ 6. Об условной разрешимости задачи Трикоми

В дальнейшем предположим, что $K(y) = \operatorname{sgn} y |y|^m$, $m = \mathrm{const} \ge 0$, $F_i(x,y) \equiv 0$, $A_i(x,y)$, $B_i(x,y) \in C^1(\overline{D}_+) \wedge C^2(\overline{D}_-)$, $C_{ik}(x,y) \in C(\overline{D}_+ \cup \overline{D}_-)$ удовлетворяют условиям теоремы 1 или 2; Γ — кривая из класса Ляпунова, $x = x(s)$, $y = y(s)$ — параметрические уравнения кривой Γ, s — длина дуги кривой Γ, отсчитываемая от точки B, S — длина кривой Γ; Γ_0 — «нормальная» кривая системы (1), заданная уравнением $(x - l/2)^2 + 4y^{m+2}/(m+2)^2 = (l/2)^2$; D_0 — область, ограниченная кривыми Γ_0, AC и CB; $\Phi(x,y) = \Phi(x(s), y(s)) = \Phi(s)$, $0 \le s \le S$.

Определение 4. Регулярное в D решение системы (1), удовлетворяющее условиям (4), (5), назовем *регулярным решением задачи* Т для системы (1).

Определение 5. Равномерный в $\overline{D}$ предел последовательности регулярных решений задачи Т назовем *обобщенным решением задачи* Т.

Теорема 5. *Пусть в области D при условии, когда кривая Γ оканчивается в точках A и B сколь угодно малыми дугами «нормальной» кривой, существует регулярное решение задачи* Т *для системы* (1). *Тогда если $\Phi(s) \in C[0,S]$ и $\Psi(x) \in C^3[0, l/2]$, $\psi_i(0) = \phi_i(0) = \phi_i(S) = 0$, то существует единственное обобщенное решение $U(x,y)$ задачи* Т *с граничными данными $U = \Phi$ на Γ и $U = \Psi$ на AC при произвольном подходе кривой Γ к оси $y = 0$, за исключением случая, когда в достаточно малых окрестностях концов кривой Γ производная dx/ds меняет знак.*

Предварительно установим следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 11. *Если $U(x,y) \in C(\overline{D}_+) \wedge C^2(D_+)$, $L_i U \equiv 0$ в области D_+ при всех $i = \overline{1,n}$, $u_i = 0$ на кривой Γ, то для $(x,y) \in D_+ \cup \Gamma$ справедлива оценка*

$$|u_i(x,y)| \le \theta \max_i \max_{0 \le x \le l} |u_i(x,0)|, \quad 0 < \theta < 1.$$

Доказательство этой леммы следует из леммы 3.

Лемма 12. *Если* $D_{0+} \cup \Gamma_0 \subset D_+$, $\Phi_0(x) \in C[0,l]$, $\Psi(x) \in C^3[0,l/2]$, $\Phi_0(0) = \Psi(0)$, *то существует обобщенное решение* $U(x,y)$ *задачи* T *с граничными данными* $U = \Phi_0$ *на* Γ_0 *и* $U = \Psi$ *на* AC.

Доказательство. Пусть $\{\Phi_{0p}(x)\} = \big\{\big(\varphi_{01}^p, \varphi_{02}^p, \ldots, \varphi_{0n}^p\big)\big\}$ — последовательность гладких вектор-функций таких, что $\varphi_{0i}(x) = \lim\limits_p \varphi_{0i}^p(x)$ равномерно на сегменте $[0,l]$ и $\Phi_{0p}(0) = \Phi_0(0)$.

По условию теоремы 5 существует регулярное в D_0 решение $U_p(x,y)$ задачи T с краевыми данными $U_p = \Phi_{0p}$ на Γ_0 и $U_p = \Psi$ на AC.

На основании следствия 1 из теоремы 1 в $\overline{D}_0$ получаем оценку

$$\big|u_i^p(x,y) - u_i^q(x,y)\big| \le \max_i \max_{\overline{\Gamma}_0} \big|\varphi_{0i}^p - \varphi_{0i}^q\big|.$$

Отсюда вытекает, что в $\overline{D}_0$ последовательность $\{U_p(x,y)\} = \big\{(u_1^p, u_2^p, \ldots, u_n^p)\big\}$ регулярных решений задачи T равномерно сходится. Пусть $\lim\limits_p U_p(x,y) = U(x,y)$. Предельная функция $U(x,y)$ непрерывна в $\overline{D}_0$, $U = \Phi_0$ на Γ_0 и $U = \Psi$ на AC.

При $\Psi = 0$ для этой функции справедлива оценка

$$|u_i(x,y)| \le \max_i \max_{\overline{\Gamma}_0} |\varphi_{0i}(x)|. \tag{30}$$

Лемма 13. *Пусть* $D_{0+} \cup \Gamma_0 \subset D_+$. *Если* $\Phi(s) \in C[0,S]$ *и* $\Psi(x) \in C^3[0,l/2]$, *то существует обобщенное решение задачи* T *с граничными данными* $U = \Phi$ *на* Γ *и* $U = \Psi$ *на* AC.

Доказательство. Для построения такого решения применим альтернирующий метод типа Шварца.

В областях D_+ и D_0 построим две последовательности решений системы (1). В силу леммы 12 в области D_0 существует обобщенное решение $Z_0 = \big(z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0\big)$ задачи T с данными $z_i^0 = 0$ на кривой Γ_0 и $Z_0 = \Psi$ на AC.

В области D_+ существует решение задачи Дирихле для системы (1) с данными $U_0 = \Phi$ на $\overline{\Gamma}$ и $U_0 = Z_0$ на отрезке $\overline{AB}$ [22, гл. II, § 3].

Пусть $Z_p(x,y)$ — обобщенное решение задачи T в области D_0 для системы (1) с граничными данными $Z_p(x,y) = U_{p-1}(x,y)$ на $\overline{\Gamma}_0$ и $Z_p = \Psi$ на AC, где $p = 1, 2, \ldots$, $U_p(x,y)$ — решение задачи Дирихле для системы (1) в области D_+ с данными $U_p = \Phi$ на $\overline{\Gamma}$ и $U_p = Z_p$ на $\overline{AB}$.

Докажем, что последовательности $\{U_p(x,y)\}$ и $\{Z_p(x,y)\}$ равномерно сходятся в $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_0$.

Действительно, в силу леммы 3

$$\big|u_i^{p+1} - u_i^p\big| \le \max_i \max_{0\le x\le l} \big|z_i^{p+1}(x,0) - z_i^p(x,0)\big| \le \max_i \max_{\overline{D}_0} \big|z_i^{p+1}(x,y) - z_i^p(x,y)\big|. \tag{31}$$

С другой стороны, ввиду оценки (30) и леммы 11

$$\begin{aligned}\big|z_i^{p+1}(x,y) - z_i^p(x,y)\big| &\le \max_i \max_{\overline{\Gamma}_0} \big|u_i^p - u_i^{p-1}\big| \\ &\le \theta \max_i \max_{0\le x\le l} \big|u_i^p(x,0) - u_i^{p-1}(x,0)\big| \le \theta \max_i \max_{\overline{D}_0} \big|z_i^p - z_i^{p-1}\big|.\end{aligned}$$

Продолжая это рассуждение шаг за шагом, получим

$$\big|z_i^{p+1} - z_i^p\big| \le \theta^p \max_i \max_{\overline{D}_0} \big|z_i^1 - z_i^0\big|. \tag{32}$$

Из оценок (31) и (32) вытекает, что

$$\big|u_i^{p+1} - u_i^p\big| \le \theta^p \max_i \max_{\overline{D}_0} \big|z_0^1 - z_i^0\big|. \tag{33}$$

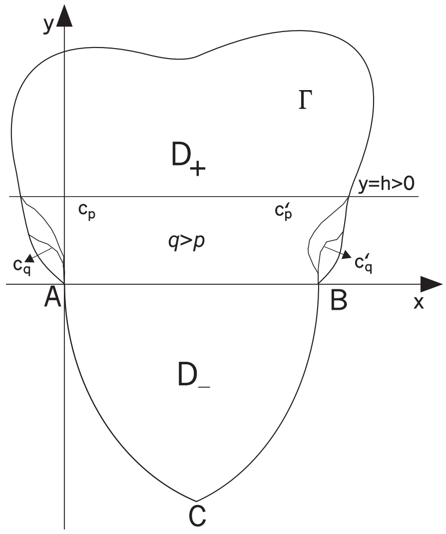

Рис.1.

Тогда в силу оценок (32) и (33) следует, что

$$\lim_p U_p(x,y) = U(x,y) = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

равномерно в $\overline{D}_0$ и

$$\lim_p Z_p(x,y) = Z(x,y) = (z_1, z_2, \dots, z_n)$$

равномерно в $\overline{D}_+$.

Очевидно, что в $\overline{D}_{0+}$ имеем $Z(x,y) \equiv U(x,y)$. Следовательно, функция $U(x,y)$ является «аналитическим» продолжением функции $Z(x,y)$ и регулярным решением системы (1) в области D_+. Кроме того, при $\Psi = 0$

$$|u_i(x,y)| \le \max_i \max_{\overline{\Gamma}} |\varphi_i|. \tag{34}$$

Определение 6. Функцию $U(x,y) = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ назовем *неотрицательной* (*положительной*) *на множестве* $E \subset \mathbb{R}^2$, если $u_i(x,y) \ge 0$ ($u_i > 0$) на E при всех $i = \overline{1,n}$.

Лемма 14. *Пусть выполнены все условия леммы* 13 *и* $\Phi(s) > 0$ *на* $(0,S)$, *тогда существует обобщенное решение* $U(x,y)$ *задачи* T *для системы* (1) *такое, что* $U(x,y) = 0$ *на* AC, $U(x,y) \ge 0$ *в* $\overline{D}$ *и* $U(x,y) > 0$ *в* $D_+ \cup \Gamma$.

Доказательство. По лемме 13 существует обобщенное в D решение $U(x,y)$ задачи T для системы (1) с граничными условиями $U = \Phi$ на $\overline{\Gamma}$ и $U = 0$ на AC. В области D_+ такое решение задачи T является решением системы (1). Если $\varphi_i(s) > 0$ на Γ, то с учетом следствия 2 $u_i(x,y) \ge 0$ в $\overline{D}$. Допустим, что $\min_i \min_{\overline{D}_+} u_i(x,y) = u_j(Q) = 0$ и $Q \in D_+$. Так как $U(x,y)$ в области D_+ является регулярным решением системы (1), в силу леммы 3 $u_i(x,y) \equiv \mathrm{const} = 0$ в $\overline{D}_+$. Последнее противоречит тому, что $u_i > 0$ на кривой Γ.

Доказательство теоремы 5. Пусть кривая Γ подходит к оси $y = 0$, как, например, указано на рис. 1.

1. Пусть $U = \Psi = 0$ на AC и $\Phi(s) = 0$ при $y < h$ и $\Phi(s) \geq 0$ при $y \geq h$, $h = \mathrm{const} > 0$. Построим последовательность дуг Γ_p, $p = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющих условиям:

1) Γ и Γ_p совпадают при $y \geq h$;

2) Γ_p оканчивается в точках A и B малыми дугами c_p и c'_p «нормальных» кривых;

3) Γ_p — гладкая кривая из класса Ляпунова;

4) дуги c_p и c'_p стягиваются в точки A и B соответственно при $p \to \infty$.

Пусть D_p — область, ограниченная дугой Γ_p и характеристиками AC и CB. На кривой Γ_p определим функцию $\Phi_p(s)$ следующим образом:

$$\Phi_p(s) = \begin{cases} \Phi(s), & y \geq h, \\ 0, & y < h. \end{cases}$$

По условию в области D_p существует регулярное решение $U_p(x, y)$ задачи T с граничными условиями $U_p = \Phi_p$ на Γ_p и $U_p = \Psi = 0$ на AC.

Пусть $Z(x, y) = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — обобщенное решение задачи T в области D^*, равное нулю на AC, и $Z(x, y) > 0$ в D^*_+, где $D^*_- \equiv D_-$, $D^*_+ \supset D_+ \cup \Gamma$. Такое решение в силу леммы 14 существует. Так как $z_i(x, y) > 0$ в D^*_+, то можно найти постоянную M, не зависящую от p и i и такую, что на кривой Γ_p имеет место неравенство $Mz_i - u_i^p \geq 0$. Отсюда на основании следствия 4

$$Mz_i - u_i^p \geq 0 \quad \text{в } \overline{D}_p. \tag{35}$$

Пусть $G_p = D_p \cap D$. Положим

$$v_i^p(x, y) = \begin{cases} u_i^p(x, y), & (x, y) \in \overline{D}_p, \\ 0, & (x, y) \in \overline{D} \backslash \overline{D}_p. \end{cases}$$

Оценим $\left|v_i^q - v_i^p\right|$, где $q > p$, в D. Пусть K_p и K'_p — два круга с центрами в точках A и B, внутри которых содержатся соответственно дуги c_p и c'_p, причем радиусы этих кругов стремятся к нулю при $p \to \infty$. Положим $\varepsilon_p = \max\limits_i \max\limits_{\overline{K}_p \cup \overline{K}'_p} z_i(x, y)$. Тогда из оценки (35) вытекает, что на границе G_p при $y \geq 0$

$$\left|v_i^q - v_i^p\right| = \left|u_i^q - u_i^p\right| \leq 2Mz_i \leq 2M\varepsilon_p.$$

Поэтому всюду в $\overline{G}_p$ справедлива оценка $\left|v_i^q - v_i^p\right| \leq 2M\varepsilon_p$.

Для точек $(x, y) \in \overline{D} \cup \overline{D}_q \backslash \overline{D}_p$ имеем $0 \leq v_i^p \leq M\varepsilon_p$, а для $(x, y) \in \overline{D} \backslash \overline{D}_q$ будет $v_i^p(x, y) = v_i^q(x, y) = 0$. Тогда для $(x, y) \in \overline{D}$ получаем $|v_i^q - v_i^p| \leq 2M\varepsilon_p$. Поскольку $\varepsilon_p \to 0$ при $p \to \infty$, из последней оценки следует, что последовательность $\{V_p(x, y)\} = \left\{(v_1^p, v_2^p, \ldots, v_n^p)\right\}$ равномерно сходится в $\overline{D}$. Тогда

$$\lim_p V_p(x, y) = \lim_p U_p(x, y) = U(x, y).$$

Ясно, что $U(x, y)$ принимает на Γ значения $\Phi(s)$, а на характеристике AC будет $U = 0$. Функция $U(x, y)$ в области D_+ удовлетворяет системе (1) и непрерывна в $\overline{D}$. При этом справедлива оценка

$$0 \leq u_i(x, y) \leq \max_i \max_{\overline{\Gamma}} \varphi_i. \tag{36}$$

2. Пусть $\Phi(s)$ непрерывна и неотрицательна на $[0, S]$ и $\Phi(0) = \Phi(S) = 0$. Построим последовательность $\{\Phi_p(s)\}$ непрерывных неотрицательных функций, исчезающих в достаточно малых окрестностях точек $s = 0$ и $s = S$, таких, что $\varphi_i^1(s) \leq \varphi_i^2(s) \leq \ldots$, $\lim\limits_p \varphi_i^p(s) = \varphi_i(s)$ равномерно на $[0, S]$. По функциям $\Phi_p(s)$

в силу п. 1 построим последовательность $\{U_p(x,y)\}$ решений задачи Т. Тогда из оценки (36) при $q > p$ в $\overline{D}$ вытекает, что

$$0 \le u_i^q - u_i^p \le \max_i \max_{\overline{\Gamma}} \bigl(\varphi_i^q - \varphi_i^p\bigr).$$

Отсюда следует, что в $\overline{D}$ существует равномерный предел

$$\lim_p U_p(x,y) = U(x,y).$$

В области D_+ функция U удовлетворяет системе (1), $U = \Phi$ на Γ, $U = 0$ на AC и $U(x,y)$ непрерывна в $\overline{D}$. Кроме того, имеет место оценка

$$0 \le u_i(x,y) \le \max_i \max_{\overline{\Gamma}} \varphi_i. \tag{37}$$

3. Пусть $\Phi(s)$ — произвольная непрерывная функция и $\Phi(0) = \Phi(S) = 0$. В этом случае функцию $\Phi(s)$ можно представить в виде разности двух неотрицательных функций:

$$\Phi(s) = \Phi_+(s) - \Phi_-(s) = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n),$$
$$\Phi_\pm(s) = (\varphi_1^\pm, \varphi_2^\pm, \dots, \varphi_n^\pm), \quad \varphi_i(s) = \varphi_i^+ - \varphi_i^-,$$
$$\varphi_i^+(s) = \max(0, \varphi_i(s)), \quad \varphi_i^-(s) = \max(0, -\varphi_i(s)),$$
$$|\varphi_i| = \varphi_i^+ + \varphi_i^-, \quad \Phi_+(0) = \Phi_-(0) = \Phi_+(S) = \Phi_-(S) = 0.$$

В силу п. 2 решение задачи Т для системы (1) определяется формулой $U(x,y) = U_+(x,y) - U_-(x,y) = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, где $u_i(x,y) = u_i^+(x,y) - u_i^-(x,y)$, $U_+(x,y)$ и $U_-(x,y)$ строятся соответственно по функциям $\Phi_+(s)$ и $\Phi_-(s)$.

На основании оценки (37) получим

$$|u_i(x,y)| \le u_i^+(x,y) + u_i^-(x,y) \le \max_i \max_{\overline{\Gamma}} \varphi_i^+(s) + \max_i \max_{\overline{\Gamma}} \varphi_i^-(s)$$
$$\le \max_i \max_{\overline{\Gamma}} \bigl(\varphi_i^+ + \varphi_i^-\bigr) = \max_i \max_{\overline{\Gamma}} |\varphi_i|. \tag{38}$$

4. Пусть $\Psi(x) \ne 0$, D^* — область из п. 1 с границей $\partial D^* = \Gamma^* \cup AC \cup CB$, причем $D_0 \cup \Gamma_0 \subset D^*$. По лемме 13 существует обобщенное решение $U_*(x,y)$ задачи Т, непрерывное в $\overline{D}^*$, с граничными данными $U_* = 0$ на Γ^* и $U_* = \Psi$ на AC.

Пусть $\Phi_*(s) = U_*$ на Γ. Тогда решение искомой задачи Т для области D определяется по формуле $U(x,y) = U_*(x,y) - \widetilde{U}(x,y)$, где $\widetilde{U}(x,y)$ — решение задачи Т в области D с граничными условиями $\widetilde{U}(x,y) = \Phi(s) - \Phi_*(s)$ на Γ, $\widetilde{U} = 0$ на AC.

Решение $\widetilde{U}(x,y)$ задачи Т существует, что было показано в пп. 1–3.

Единственность построенного решения $U(x,y)$ задачи Т следует из оценок (34) и (38) или следствия 3.

Ранее альтернирующий метод Шварца был применен для доказательства теорем существования решения задачи Трикоми для уравнений Лаврентьева — Бицадзе [22, с. 323], Трикоми [23, гл. III; 24] и более общего уравнения смешанного типа [19].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Киквидзе З. А.* Об одной системе уравнений в частных производных смешанного типа // Сообщ. АН Груз. ССР. 1954. Т. 15, № 6. С. 321–325.
2. *Карамышев Ф. И.* Краевая задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа // Сиб. мат. журн. 1961. Т. 2, № 4. С. 537–546.

3. *Диденко В. П.* О некоторых системах дифференциальных уравнений смешанного типа // Докл. АН СССР. 1962. Т. 144, № 4. С. 709–712.

4. *Диденко В. П.* О некоторых системах дифференциальных уравнений смешанного и смешанно-составного типов // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2, № 1. С. 33–39.

5. *Майоров И. В.* Об одной нелинейной системе уравнений смешанного типа // Докл. АН СССР. 1968. Т. 183, № 2. С. 280–283.

6. *Диденко В. П.* Об обобщенной разрешимости граничных задач для систем дифференциальных уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 1. С. 24–29.

7. *Чекмарев Т. Е.* Задачи с граничными условиями для некоторых систем уравнений различных типов. Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. Казань: Казанский гос. университет, 1974.

8. *Цымбал Т. Е.* Краевые задачи для системы уравнений смешанного типа с негладкой линией вырождения. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Киев, 1984.

9. *Рябов А. В.* Задача Т для одной системы дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа // Уравнения неклассического типа. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1986. С. 138–142.

10. *Чекмарев Т. Е.* Задача Трикоми для модельной системы уравнений в областях специальных видов // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 5. С. 860–871.

11. *Сабитов К. Б.* Принцип максимума для систем уравнений смешанного типа второго порядка // Докл. АН СССР. 1989. Т. 305, № 4. С. 783–786.

12. *Hopf E. A.* A remark on linear elliptic differential equations of second order // Proc. Amer. Math. Soc. 1952. V. 3. P. 791–793.

13. *Лаврентьев М. М.* О принципе максимума для решений сильно эллиптических систем второго порядка // Докл. АН СССР. 1957. Т. 116, № 2. С. 175–176.

14. *Эйдельман С. Д.* Интегральный принцип максимума для сильно параболических систем и некоторые его применения // Изв. вузов. Математика. 1959. № 2. С. 252–258.

15. *Protter M. H., Weinberger H. F.* Maximum principles in differential equations. Englewood Cliffs. New Jersey: Prentice-Hall Inc., 1967.

16. *Hile G. N., Protter M. H.* Maximum principles for a class of first order elliptical systems // J. Differential Equations. 1977. V. 24. P. 136–151.

17. *Мазья В. Г., Кресин Г. И.* О принципе максимума для сильно эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами // Мат. сб. 1984. Т. 125, № 4. С. 458–480.

18. *Figueiredo D. G., Mitidieri E. A.* A maximum principle for an elliptic system and applications to semilinear problems // SIAM J. Math. Anal. 1986. V. 17, N 4. P. 836–849.

19. *Сабитов К. Б.* К вопросу о существовании решения задачи Трикоми // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 12. С. 2092–2101.

20. *Ларькин Н. А.* Об одном классе нелинейных уравнений смешанного типа // Сиб. мат. журн. 1978. Т. 19, № 6. С. 1308–1314.

21. *Гвазава Д. К.* О некоторых классах квазилинейных уравнений смешанного типа // Тр. Мат. ин-та АН Груз. ССР. 1981. Т. 67. С. 5–93.

22. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.

23. *Бабенко К. И.* К теории уравнений смешанного типа. Дис. ... докт. физ.-мат. наук. М.: Мат. ин-т АН СССР, 1952.

24. *Germain P., Bader R.* Sur le problem de Tricomi // C. R. Acad. Sci. Paris. 1951. V. 232. P. 463–465.

Статья поступила 20 июня 2001 г.

Сабитов Камиль Басирович, Мугафаров Марат Фавильевич
Стерлитамакский гос. педагогический институт СФ АН РБ,
пр. Ленина, 37, Стерлитамак 453103, РБ,
Стерлитамакский филиал АН Республики Башкортостан
sspi@soros.bashedu.ru, mmf@mail.rb.ru