Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2002. Том 43, № 3

УДК 517.958

ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИ МЛАДШИХ ПРОИЗВОДНЫХ

В. Г. Романов

Аннотация: Рассматривается задача об определении коэффициентов при первых производных в гиперболическом уравнении второго порядка. В качестве информации задается след решения вместе с его нормальной производной на боковой поверхности цилиндрической области некоторой прямой задачи для исходного уравнения. Импульсный точечный источник расположен вне области, в которой подлежат определению искомые коэффициенты, и является параметром задачи. Предполагается, что число источников, для которых задается след решения, совпадает с числом определяемых коэффициентов. Основной результат работы — оценка устойчивости решения рассматриваемой обратной задачи. Библиогр. 5.

§ 1. Постановка задачи и основной результат

Пусть Ω — компактная область в $\mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ и σ, $b = (b_1, b_2, b_3)$ — гладкие функции, носитель которых содержится в Ω. Пусть, далее, функция $u = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^3$, является решением следующей задачи Коши:

$$u_{tt} - \Delta u + \sigma(x)u_t + b(x)\cdot\nabla u = \delta(x-y)\delta(t), \quad u|_{t<0} \equiv 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^4. \tag{1.1}$$

Здесь $\delta(x-y)$ — дельта-функция Дирака, сосредоточенная в точке $y \in \mathbb{R}^3$, лежащей вне Ω. Точка y — параметр задачи, т. е. $u = u(x,t,y)$.

При фиксированной точке y обозначим

$$G(T,y) = \{(x,t) \mid x \in \Omega, |x-y| < t < |x-y| + T\},$$

$$S(T,y) = \{(x,t) \mid x \in \partial\Omega,\ |x-y| < t < |x-y| + T\},$$

$$\Sigma_\tau(y) = \{(x,t) \mid x \in \Omega,\ t = |x-y| + \tau\},$$

где $\tau \in [0,T]$ и $T > 0$. Пусть $y^{(i)}$, $i = 1,2,3,4$, — различные точки, лежащие вне Ω и удовлетворяющие некоторому дополнительному условию, о котором будет сказано ниже. Предположим, что следы решения задач (1.1) при $y = y^{(i)}$ известны на $S(T, y^{(i)})$ для всех i вместе с их нормальными производными, т. е. заданы функции

$$u(x,t,y^{(i)}) = f_i(x,t), \quad \frac{\partial}{\partial n}u(x,t,y^{(i)}) = g_i(x,t), \quad (x,t) \in S(T,y^{(i)}), \quad i = 1,2,3,4, \tag{1.2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00818) и Министерства образования РФ (проект № 2000.1.73).

где n — внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Рассмотрим обратную задачу: найти коэффициенты σ, $b = (b_1, b_2, b_3)$ в Ω по заданной информации (1.2).

Отметим, что в подобной формулировке ранее изучались обратные задачи об определении одного из коэффициентов, стоящего либо при младшем члене линейного гиперболического уравнения (см. [1, 2]), либо при операторе Лапласа [3]. Близкая постановка обратной задачи рассмотрена также в статье [4]. Во всех этих работах параметр задачи фиксировался. В рассматриваемом случае количество положений источника соответствует числу определяемых коэффициентов.

Обозначим

$$\Lambda(q_0) = \{(\sigma, b) \mid \operatorname{supp}(\sigma, b) \in \Omega, \|\sigma\|_{\mathbf{C}^{11}(\mathbb{R}^3)} \le q_0, \|b\|_{\mathbf{C}^{11}(\mathbb{R}^3)} \le q_0\}.$$

В дальнейшем будем предполагать,что $(\sigma, b) \in \Lambda(q_0)$. Заметим, что высокие требования на гладкость коэффициентов σ, b связаны с используемым при доказательстве леммы 2.1 методом энергетических оценок и могут быть существенно ослаблены (достаточно принадлежности $\mathbf{C}^3(\mathbb{R}^3)$) при использовании метода интегральных уравнений. Однако применение последнего метода здесь технически существенно сложнее.

Предположим, что Ω принадлежит открытому шару $B(x^0, r)$ радиуса r с центром в точке x^0. Пусть точки $y^{(i)}$ выбраны так, что они удовлетворяют условию

$$\begin{pmatrix} |x - y^{(1)}| & x_1 - y_1^{(1)} & x_2 - y_2^{(1)} & x_3 - y_3^{(1)} \\ |x - y^{(2)}| & x_1 - y_1^{(2)} & x_2 - y_2^{(2)} & x_3 - y_3^{(2)} \\ |x - y^{(3)}| & x_1 - y_1^{(3)} & x_2 - y_2^{(3)} & x_3 - y_3^{(3)} \\ |x - y^{(4)}| & x_1 - y_1^{(4)} & x_2 - y_2^{(4)} & x_3 - y_3^{(4)} \end{pmatrix} \ne 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{1.3}$$

в котором $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Последнее условие обсуждается в § 4, в частности, там приводятся некоторые достаточные условия на расположение точек $y^{(i)}$, гарантирующие выполнение (1.3).

Основным содержанием настоящей работы является следующая теорема устойчивости решения обратной задачи.

Теорема 1.1. *Предположим, что функции f_i', g_i' соответствуют решению задачи* (1.1) *с $y = y^{(i)}$ и коэффициентами $(\sigma, b) = (\sigma', b') \in \Lambda(q_0)$, а функции f_i'', g_i'' — решению той же самой задачи с $(\sigma, b) = (\sigma'', b'') \in \Lambda(q_0)$. Если точки $y^{(i)}$ расположены вне Ω и выбраны так, что выполнено условие* (1.3), *то существуют положительные постоянные C и $r^* < T/4$, зависящие от T, q_0 и расположения точек $x^0, y^{(1)}, \dots, y^{(4)}$, такие, что при $r \le r^*$ справедливо неравенство*

$$\|\sigma' - \sigma''\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|b' - b''\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \le C \sum_{i=1}^{4} \big(\|f_i' - f_i''\|^2_{\mathbf{H}^1(S(T,y^{(i)}))} + \|g_i' - g_i''\|^2_{\mathbf{L}^2(S(T,y^{(i)}))} \big). \tag{1.4}$$

Из сформулированной теоремы вытекает соответствующая теорема единственности.

§ 2. Доказательство теоремы

Введем в рассмотрение функцию

$$v(x, t, y) = \int_{-\infty}^{t} u(x, \tau, y)\, d\tau.$$

Эта функция является решением следующей задачи Коши:

$$v_{tt} - \Delta v + \sigma(x) v_t + b(x)\cdot\nabla v = \delta(x-y)\theta_0(t), \quad v|_{t<0} \equiv 0, \quad (x,t)\in\mathbb{R}^4, \tag{2.1}$$

в которой $\theta_0(t)$ — функция Хевисайда, т. е. $\theta_0(t)=1$, если $t \geq 0$, и $\theta_0(t)=0$, если $t<0$. Используем соотношение между решением $v(x,t,y)$ задачи (2.1) и коэффициентами σ, b вдоль характеристического конуса $t=|x-y|$. Это соотношение имеет вид

$$v(x,t,y)|_{t=|x-y|+0} = \frac{1}{4\pi|x-y|}\exp\biggl(\frac{1}{2}\int\limits_{L(x,y)}(b\cdot\nu-\sigma)\,ds\biggr), \tag{2.2}$$

в котором $L(x,y)$ — отрезок прямой линии, соединяющий точки x и y, $\nu=\nu(x,y)$ — единичный вектор, $\nu(x,y) := (x-y)/|x-y|$, ds — элемент длины на $L(x,y)$. Соотношение (2.2) может быть получено следующим образом. Вводя в рассмотрение функции $\theta_k(t) := (t^k/k!)\theta_0(t)$, $k=1,2,\dots$, и используя асимптотическое разложение решения задачи (2.1) в окрестности характеристического конуса $t=|x-y|$ вида

$$\begin{aligned} v(x,t,y) &= \alpha_0(x,y)\theta_0(t-|x-y|) \\ &\quad + \alpha_1(x,y)\theta_1(t-|x-y|) + \ldots + \alpha_k(x,y)\theta_k(t-|x-y|) + \ldots, \end{aligned} \tag{2.3}$$

находим уравнения для $\alpha_k(x,y)$:

$$2\nabla\alpha_k\cdot\nu + \biggl(\sigma - b\cdot\nu + \frac{2}{|x-y|}\biggr)\alpha_k + b\cdot\nabla\alpha_{k-1} - \Delta\alpha_{k-1} = 0, \quad k=0,1,\dots. \tag{2.4}$$

При $k=0$ здесь нужно формально положить $\alpha_{-1}=0$. Поскольку при $\sigma\equiv 0$ и $b\equiv 0$ разложение (2.3) хорошо известно и соответствующие значения $\alpha_k(x,y)$ определяются равенствами

$$\alpha_0(x,y) = \frac{1}{4\pi|x-y|}, \quad \alpha_k(x,y)=0, \quad k=1,2,\dots, \tag{2.5}$$

эти равенства должны выполняться в любой шаровой окрестности точки y, целиком лежащей вне Ω. Интегрируя соотношение (2.4) при $k=0$ и условии (2.5), приходим к равенству

$$\alpha_0(x,y) = \frac{1}{4\pi|x-y|}\exp\biggl(\frac{1}{2}\int\limits_{L(x,y)}(b\cdot\nu-\sigma)\,ds\biggr). \tag{2.6}$$

В то же время из представления (2.3) следует, что $\alpha_0(x,y) = v(x,t,y)|_{t=|x-y|+0}$. Отсюда и вытекает равенство (2.2). Нетрудно найти и другие $\alpha_k(x,y)$. Они даются рекуррентными формулами

$$\alpha_k(x,y) = \frac{\alpha_0(x,y)}{2}\int\limits_{L(x,y)}\frac{1}{\alpha_0(\xi,y)}(\Delta\alpha_{k-1}(\xi,y) - b(\xi)\cdot\nabla\alpha_{k-1}(\xi,y))\,ds, \ k=1,2,\dots, \tag{2.7}$$

в которых $\xi\in L(x,y)$ — промежуточная точка интегрирования.

Воспользуемся теперь леммой, доказательство которой приведено в следующем параграфе.

Лемма 2.1. *Если $(\sigma, b) \in \Lambda(q_0)$, $|x^0 - y| := \rho > r$, то существуют положительные постоянные $C = C(T, \rho, r, q_0)$, $C_1 = C_1(\rho, r, q_0)$, не возрастающие при уменьшении r и такие, что решение задачи (2.1) принадлежит $\mathbf{H}^4(G(T, y))$ и удовлетворяет неравенствам*

$$\|v(x, t, \gamma)\|_{\mathbf{C}^1(G(T,y))} \leq C, \tag{2.8}$$

$$1/v(x, |x - y| + 0, y) \leq C_1, \quad x \in \Omega. \tag{2.9}$$

Обозначим через $v'(x, t, y)$, $v''(x, t, y)$ решения задачи (2.1) с $(\sigma, b) = (\sigma', b') \in \Lambda(q_0)$ и $(\sigma, b) = (\sigma'', b'') \in \Lambda(q_0)$ соответственно. Пусть $\tilde{v} = v' - v''$, $\tilde{\sigma} = \sigma' - \sigma''$, $\tilde{b} = b' - b''$. Тогда из (2.1) следует соотношение

$$\tilde{v}_{tt} - \Delta\tilde{v} + \sigma'\tilde{v}_t + b' \cdot \nabla\tilde{v} + \tilde{\sigma}v''_t + \tilde{b} \cdot \nabla v'' = 0. \tag{2.10}$$

Из равенства (2.10), априорной оценки (2.8) и условия $(\sigma', b') \in \Lambda(q_0)$ получим неравенство

$$\int\limits_{G(T,y)} (\tilde{v}_{tt} - \Delta\tilde{v})^2 \, dxdt \leq C' \Bigg(\int\limits_{G(T,y)} (\tilde{v}_t^2 + |\nabla\tilde{v}|^2) \, dxdt + \int\limits_{\Omega} (\tilde{\sigma}^2 + |\tilde{b}|^2) \, dx \Bigg) \tag{2.11}$$

с некоторой постоянной $C' = C'(T, \rho, r, q_0)$.

С другой стороны, из леммы 1.2 статьи [1] при выборе параметров этой леммы p и ε в виде $\varepsilon = (1 - p)/(pT)^2$, $p = 2\chi/(1 + p)$ и небольшой модификации оценки вытекает следующая

Лемма 2.2. *Пусть $\rho := |x^0 - y| \geq r\sqrt{2}$, $\chi := 4r/T < 1$ и $\tilde{v}(x, t, y) \in \mathbf{H}^2(G(T, y))$. Тогда найдутся положительная числовая постоянная C (например, $C = 1/(16)^2$) и положительная постоянная $C'' = C''(T, \rho, r)$ такие, что выполнено неравенство*

$$\begin{aligned} \int\limits_{G(T,y)} (\tilde{v}_{tt} - \Delta\tilde{v})^2 \, dxdt \geq -C'' \int\limits_{S(T,y)} \big(\tilde{v}_t^2 + |\nabla\tilde{v}|^2 + \tilde{v}^2\big) \, dSdt \\ + \frac{C(1 - \chi)^2}{r^2} \int\limits_{G(T,y)} \big(\tilde{v}_t^2 + |\nabla\tilde{v}|^2\big) \, dxdt \\ + \frac{C(1 - \chi)^2}{r} \int\limits_{\Sigma_0(y) \bigcup \Sigma_T(y)} [(\tilde{v}_t + \nabla\tilde{v} \cdot \nu)^2 + |\nabla'\tilde{v}|^2] \, dx, \end{aligned} \tag{2.12}$$

в котором $\nabla' := \nabla - \nu(\nu \cdot \nabla)$.

Из неравенств (2.11), (2.12) следует оценка

$$\begin{aligned} A \int\limits_{G(T,y)} \big(\tilde{v}_t^2 + |\nabla\tilde{v}|^2\big) \, dxdt + \frac{C(1 - \chi)^2}{r} \int\limits_{\Sigma_0(y)} [(\tilde{v}_t + \nabla\tilde{v} \cdot \nu)^2 + |\nabla'\tilde{v}|^2] \, dx \\ \leq C' \int\limits_{\Omega} (\tilde{\sigma}^2 + |\tilde{b}|^2) \, dx + C'' \int\limits_{S(T,y)} \big(\tilde{v}^2 + \tilde{v}_t^2 + |\nabla\tilde{v}|^2\big) \, dSdt, \end{aligned} \tag{2.13}$$

в которой $A = C(1 - \chi)^2/r^2 - C' \geq 0$.

Воспользуемся оценкой (2.13) для $y = y^{(i)}$, $i = 1, \dots, 4$. При этом необходимо заменить параметр $\rho = |x^0 - y|$ на $\rho_i := |x^0 - y^{(i)}|$, а следовательно, постоянные C', C'' на C'_i, C''_i. Заметим, что неравенство (2.13) будет справедливым для всех $y = y^{(i)}$, если $C' = \max_i C'_i$, $C'' = \max_i C''_i$. Выпишем при таком выборе C', C'' неравенство (2.13) для $y = y^{(i)}$ и просуммируем по всем i. Тогда получим новое неравенство

$$\sum_{i=1}^{4}\left\{A\int\limits_{G(T,y^{(i)})}\left(\tilde v_t^2+|\nabla\tilde v|^2\right)dxdt+\frac{C(1-\chi)^2}{r}\int\limits_{\Sigma_0(y^{(i)})}[(\tilde v_t+\nabla\tilde v\cdot\nu^i)^2+|\nabla'\tilde v|^2]\,dx\right\}$$
$$\leq\sum_{i=1}^{4}\left\{C'\int\limits_{\Omega}(\tilde\sigma^2+|\tilde b|^2)\,dx+C''\int\limits_{S(T,y^{(i)})}\left(\tilde v^2+\tilde v_t^2+|\nabla\tilde v|^2\right)dSdt\right\},\quad(2.14)$$

в котором для сокращения принято $\nu^i := \nu(x, y^{(i)})$, $\tilde v = \tilde v(x, t, y^{(i)})$.

Дифференцируя соотношение (2.2) вдоль $L(x, y)$, приходим к равенству

$$b\cdot\nu-\sigma=2\frac{v_t+\nabla v\cdot\nu}{v}+\frac{2}{t},\quad(x,t)\in\Sigma_0(y).\quad(2.15)$$

Напишем (2.15) для (σ', b', v') и (σ'', b'', v''), а затем вычтем второе из первого. Тогда получим соотношение между $\tilde b$, $\tilde\sigma$ и функцией $\tilde v$ в виде

$$\tilde b\cdot\nu-\tilde\sigma=2\left(\frac{\tilde v_t+\nabla\tilde v\cdot\nu}{v'}-\tilde v\frac{v''_t+\nabla v''\cdot\nu}{v'v''}\right),\quad(x,t)\in\Sigma_0(y).\quad(2.16)$$

Выпишем подобные равенства для $y = y^{(i)}$, $i = 1, 2, 3, 4$, и рассмотрим их как алгебраическую систему для отыскания $\tilde\sigma$, $\tilde b$:

$$\tilde b(x)\cdot\nu(x,y^{(i)})-\tilde\sigma(x)=2\left(\frac{\tilde v_t(x,t,y^{(i)})+\nabla\tilde v(x,t,y^{(i)})\cdot\nu(x,y^{(i)})}{v'(x,t,y^{(i)})}\right.$$
$$\left.-\tilde v(x,t,y^{(i)})\frac{v''_t(x,t,y^{(i)})+\nabla v''(x,t,y^{(i)})\cdot\nu(x,y^{(i)})}{v'(x,t,y^{(i)})v''(x,t,y^{(i)})}\right),\ (x,t)\in\Sigma_0(y^{(i)});\ i=1,\dots,4.\quad(2.17)$$

Определитель этой системы отличен от нуля для всех $x \in \overline{\Omega}$ в силу условия (1.3). Разрешая ее относительно $\tilde b$, $\tilde\sigma$, интегрируя по Ω и используя неравенства (2.8), (2.9), получаем

$$\int\limits_{\Omega}(\tilde\sigma^2+|\tilde b|^2)\,dx\leq C\sum_{i=1}^{4}\int\limits_{\Sigma_0(y^{(i)})}[(\tilde v_t(x,t,y^{(i)})$$
$$+\nabla\tilde v(x,t,y^{(i)})\cdot\nu(x,y^{(i)}))^2+\tilde v^2(x,t,y^{(i)})]\,dx\quad(2.18)$$

с некоторой положительной постоянной C, зависящей от T, r, q_0 и $x^0, y^{(1)}, \dots, y^{(4)}$. Исключим из этого неравенства член, содержащий $\tilde v^2$. С этой целью установим неравенство

$$\int\limits_{\Sigma_0(y^{(i)})}\tilde v^2\,dx\leq C_2\left[\int\limits_{\Sigma_0(y^{(i)})}[(\tilde v_t+\nabla\tilde v\cdot\nu^{(i)})^2+|\nabla'\tilde v|^2]\,dx+\int\limits_{S(T,y^{(i)})}\left(\tilde v^2+\tilde v_t^2\right)dSdt\right],\quad(2.19)$$

в котором $\tilde v = \tilde v(x, t, y^{(i)})$ и $\nu^i := \nu(x, y^{(i)})$, а постоянная C_2 зависит лишь от T, r.

В самом деле, для любой функции $\varphi(x) \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ и $a = x - x^0$ справедливы соотношения

$$\int\limits_{\partial\Omega} (a \cdot n(x))\varphi^2\, dS = \int\limits_{\Omega} \operatorname{div}(a\varphi^2)\, dx = \int\limits_{\Omega} \varphi^2 \operatorname{div} a\, dx + \int\limits_{\Omega} 2(a\cdot\nabla\varphi)\varphi\, dx$$
$$\geq \int\limits_{\Omega} (\operatorname{div} a - \gamma)\varphi^2\, dx - \gamma^{-1} \int\limits_{\Omega} (a\cdot\nabla\varphi)^2\, dx,$$

в которых $n(x)$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$ в точке $x \in \partial\Omega$, а γ — произвольное положительное число. Выбирая $\gamma = (\operatorname{div} a)/2 = 3/2$, получаем

$$\int\limits_{\Omega} \varphi^2\, dx \leq \frac{4r^2}{9} \int\limits_{\Omega} |\nabla\varphi|^2\, dx + \frac{2r}{3} \int\limits_{\partial\Omega} \varphi^2\, dS. \tag{2.20}$$

Используя эту оценку с функцией $\varphi(x) = \tilde{v}(x, |x - y^{(i)}| + 0, y^{(i)})$, находим, что

$$\int\limits_{\Sigma_0(y^{(i)})} \tilde{v}^2\, dx \leq \left[\frac{4r^2}{9} \int\limits_{\Sigma_0(y^{(i)})} [(\tilde{v}_t + \nabla\tilde{v}\cdot\nu^{(i)})^2 + |\nabla'\tilde{v}|^2]\, dx + \frac{2r}{3} \int\limits_{\partial\Sigma_0(y^{(i)})} \tilde{v}^2\, dS\right], \tag{2.21}$$

где $\partial\Sigma_0(y^{(i)}) := \{(x,t) \mid x \in \partial\Omega, t = |x - y^{(i)}| + 0\}$.

С другой стороны, для любой функции $\psi(t) \in H^1(0,T)$ и $\mu(t) = (2t - T)/T$ имеют место соотношения

$$\psi^2(0) + \psi^2(T) = \int\limits_0^T \frac{d}{dt}(\mu(t)\psi^2(t))\, dt = \int\limits_0^T (\mu'(t)\psi^2(t) + 2\mu(t)\psi(t)\psi'(t))\, dt$$
$$\leq \int\limits_0^T \left(\frac{2}{T}\psi^2(t) + 2|\psi(t)||\psi'(t)|\right) dt \leq \int\limits_0^T \left(\frac{3}{T}\psi^2(t) + T(\psi'(t))^2\right) dt.$$

Используя последнее неравенство для оценки в (2.21) интеграла по $\partial\Sigma_0(y^{(i)})$, приходим к неравенству (2.19).

Теперь мы можем исключить член с $\tilde{v}^2$ из неравенства (2.18). В результате получим следующее неравенство:

$$\int\limits_{\Omega} (\tilde{\sigma}^2(x) + |\tilde{b}(x)|^2) dx \leq C_3 \sum_{i=1}^4 \Bigg(\int\limits_{\Sigma_0(y^{(i)})} [(\tilde{v}_t + \nabla\tilde{v}\cdot\nu(x, y^{(i)}))^2 + |\nabla'\tilde{v}|^2]\, dx$$
$$+ \int\limits_{S_T(\gamma^{(i)})} \left(\tilde{v}^2 + \tilde{v}_t^2\right) dS dt\Bigg), \tag{2.22}$$

в котором C_3 зависит r, T, q_0 и x^0, $y^{(i)}$, $i = 1, \ldots, 4$.

Используем ранее выведенную оценку (2.14) и исключим из нее с помощью (2.22) член с $L^2(\Omega)$-нормой $\tilde{\sigma}$, $\tilde{b}$. В результате приходим к неравенству

$$\sum_{i=1}^4 \Bigg\{ A \int\limits_{G(T, y^{(i)})} \left(\tilde{v}_t^2 + |\nabla\tilde{v}|^2\right) dx dt + B \int\limits_{\Sigma_0(y^{(i)}))} [(\tilde{v}_t + \nabla\tilde{v}\cdot\nu^{(i)})^2 + |\nabla'\tilde{v}|^2]\, dx \Bigg\}$$

$$\leq C_4 \sum_{i=1}^{4} \int\limits_{S(T,\gamma^{(i)})} \left(\tilde{v}^2 + \tilde{v}_t^2 + |\nabla \tilde{v}|^2\right) dSdt \quad (2.23)$$

с некоторой новой постоянной C_4 и $B = C(1-\chi)^2/(16r) - 4C'C_3$. Очевидно, что всевозможные постоянные C с различными индексами и число $\chi = 4r/T$ не возрастают с уменьшением параметра r. Поэтому числа A и B являются положительными при малых значениях r и неравенства (2.22), (2.23) приводят к оценке (1.4). Таким образом, доказательство теоремы 1.1 завершено.

§ 3. Доказательство леммы 2.1

Рассмотрим функцию

$$w(x,t,y) = v(x,t,y) - \sum_{k=0}^{3} \alpha_k(x,y)\theta_k(t - |x-y|). \quad (3.1)$$

Здесь $\alpha_k(x,y)$, $\theta_k(t-|x-y|)$ — функции, введенные в предыдущем параграфе. Нетрудно проверить, что w удовлетворяет уравнению

$$w_{tt} - \Delta w + \sigma w_t + b \cdot \nabla w = F(x,t,y), \quad t > |x-y|, \quad (3.2)$$

в котором $F(x,t,y) = (\Delta\alpha_3 - b\cdot\nabla\alpha_3)(t-|x-y|)^3/6$. Кроме того, функция w удовлетворяет соотношениям

$$\left.\frac{\partial^s w}{\partial t^s}\right|_{t=t_0} = 0, \quad s = 0,1,\dots; \quad D^\beta w|_{t=|x-y|+0} = 0, \quad |\beta| \leq 3. \quad (3.3)$$

Здесь $t_0 := |y-x^0|-r$ определяет в пространстве x,t плоскость $t = t_0$, ниже которой функция w тождественно равна нулю, D^β — оператор дифференцирования по переменным x,t, а $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_4)$ — соответствующий мультииндекс. Второе из соотношений (3.3) является очевидным следствием представления (2.3). Заметим, что носитель функции $\alpha_3(x,y)$ содержится в $\overline{\Omega}$ и $\alpha_3 \in \mathbf{C}^5(\Omega)$. Рассмотрим область $D = D(t_0,t_1,y) := \{(x,t) \mid \min(t_0,|x-y|) \leq t \leq t_1\}$. Очевидно, что функция $F(x,t)$ принадлежит $\mathbf{C}^3(D)$, причем ее норма в этом пространстве ограничена некоторой постоянной, зависящей только от $t_1, |y-x^0|, r, q_0$, и эта постоянная не увеличивается при уменьшении r или t_1. Применяя в области D к уравнению (3.2) метод энергетических оценок (см., например, [5]) и используя равенства (3.3), получаем оценку $\|w\|_{\mathbf{H}^4(D)} \leq C$ с некоторой постоянной, зависящей только от t_1, $|y-x^0|$, r, q_0. При $t_1 = T + |x-y| + r$ область D содержит в себе область $G(T,y)$, поэтому аналогичная оценка справедлива и для нормы w в $\mathbf{H}^4(G(T,y))$ с постоянной C, зависящей от $T, |y-x^0|, r, q_0$. Из теоремы вложения следует, что $w \in \mathbf{C}^1(G(T,y))$ и ее норма ограничена некоторой постоянной, зависящей от T, $|y-x^0|$, r, q_0, а из формулы (3.1) вытекает неравенство (2.8). Соотношение (2.9) является простым следствием равенства (2.2).

§ 4. О достаточных условиях выполнения неравенства (1.3)

Рассмотрим условие (1.3). Нетрудно увидеть, что это условие эквивалентно следующему: проекции точек $y^{(1)},\dots,y^{(4)}$ на единичную сферу $\mathbb{S}^2(x)$ с центром в точке $x \in \overline{\Omega}$ не должны принадлежать одной окружности. В самом деле, если i-ю строку матрицы в (1.3) разделить на $|x-y^{(i)}|$, а затем вычесть из i-й,

$i = 2, 3, 4$, строки первую строку, то станет ясно, что условие (1.3) эквивалентно условию линейной независимости трех векторов: $\nu(x, y^{(i)}) - \nu(x, y^{(1)})$, $i = 2, 3, 4$. Последнее равносильно сказанному выше.

Отсюда вытекают некоторые необходимые условия на расположение точек $y^{(i)}$. Например, все четыре точки не должны лежать в одной плоскости, пересекающей Ω, ибо в противном случае для любой точки $x \in \Omega$, лежащей в этой плоскости, определитель в (1.3) равен нулю. Количество подобных примеров нетрудно умножить. Однако наибольший интерес представляет выяснение некоторых достаточных условий, гарантирующих выполнение условия (1.3). Укажем здесь два таких условия.

1. Пусть точки $y^{(1)}, \dots, y^{(4)}$ принадлежат одной плоскости, не пересекающей $\overline{\Omega}$, и три из них образуют невырожденный треугольник, а четвертая точка принадлежит этому треугольнику, но не совпадает ни с одной из вершин. В этом случае условие (1.3) выполнено. Действительно, проекции первых трех точек на $\mathbb{S}^2(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, образуют невырожденный треугольник, а проекция четвертой точки не лежит в плоскости этого треугольника.

2. Пусть точки $y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}$ определяют единственную плоскость, не пересекающую $\overline{\Omega}$. Рассмотрим параллельную ей плоскость, проходящую через точку x^0. Эта плоскость разбивает $\mathbb{R}^3$ на два полупространства. Если точка $y^{(4)}$ лежит вне Ω и находится в другом полупространстве по отношению к $y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}$, то условие (1.3) также выполнено. Аргументация здесь полностью совпадает с приведенной выше.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Романов В. Г.* Об оценке устойчивости решения обратной задачи для гиперболического уравнения // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 2. С. 436–449.
2. *Romanov V. G., Yamamoto M.* Multidimensional inverse hyperbolic problem with impulse input and single boundary measurement // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1999. V. 7, N 6. P. 573–588.
3. *Романов В. Г.* Оценка устойчивости в обратной задаче определения скорости звука // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 6. С. 1323–1338.
4. *Глушкова Д. И.* Об оценке устойчивости решения обратной задачи определения коэффициента поглощения // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 9. С. 1203–1211.
5. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.

Статья поступила 16 января 2002 г.

Романов Владимир Гаврилович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
romanov@math.nsc.ru