Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2002. Том 43, № 3

УДК 517.83

ОЦЕНКА УГЛА ОБЗОРА КРИВОЙ В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ НЕПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Ю. Г. Решетняк

Аннотация: Дано элементарное доказательство неравенства, оценивающего некоторую характеристику кривой — угол обзора кривой из данной точки — через интегральную кривизну (поворот) кривой. Рассматривается случай кривых в метрическом пространстве неположительной кривизны в смысле А. Д. Александрова. Библиогр. 11.

1. Рассматриваются кривые в метрическом пространстве M с внутренней метрикой неположительной кривизны в смысле А. Д. Александрова [1]. (Такие пространства в литературе часто называются также *пространствами типа* CAT(0).)

Для всякой кривой K в пространстве неположительной кривизны M определена некоторая величина $\varkappa(K)$ — поворот или интегральная кривизна кривой. Для кривых в пространстве $\mathbb{R}^n$ это понятие введено А. Д. Александровым (см. [1, 2]). Для произвольных пространств неположительной кривизны оно введено в статье [3]. В случае, если M — риманово пространство и кривая K удовлетворяет принятым в дифференциальной геометрии условиям регулярности, величина $\varkappa(K)$ равна интегралу геодезической кривизны кривой относительно дуги (см. [4]).

Пусть K — кривая в пространстве неположительной кривизны. Всякой точке O, не лежащей на данной кривой, может быть сопоставлено число $\varphi(O, K)$, которое мы назовем *углом обзора кривой из точки* O. Величина $\varphi(O, K)$ в общем случае определяется следующим образом. Для точки O определено метрическое пространство $N_{_M}(O)$ — пространство направлений в точке O. Для всякой точки X кривой K определена кратчайшая OX, соединяющая точку O с точкой X. Пусть $\xi(X)$ — направление кратчайшей OX в точке O. Тем самым в пространстве $N_{_M}(O)$ определена некоторая кривая. Ее длину в метрическом пространстве $N_{_M}(O)$ мы и называем *углом обзора кривой* K *из точки* O. В случае кривых в $\mathbb{R}^n$ величина $\varphi(O, K)$ равна длине проекции кривой K на единичную сферу с центром O.

Цель настоящей статьи — доказать следующее утверждение.

Основная теорема. *Пусть K — кривая конечного поворота в пространстве M неположительной кривизны, O — точка, не лежащая на кривой K, A и B — концевые точки кривой K. Пусть, кроме того, α и β — углы между кратчайшими OA и OB и кривой K в точках A и B соответственно. Тогда имеет место неравенство*

$$\varphi(O, K) \leq \varkappa(K) + \pi - \alpha - \beta.$$

Частный случай данного утверждения, когда пространство M — обычная евклидова плоскость $\mathbb{E}^2$, установлен Радоном [5]. Неравенство, полученное Радоном, имеет приложения в теории потенциала. Оно находит применение также при исследовании геометрии двумерных многообразий ограниченной кривизны с помощью изотермической системы координат (см. [6–8]).

В работе А. Г. Хованского и С. Ю. Яковенко [9] устанавливается аналог неравенства Радона для кривых в пространстве $\mathbb{R}^n$. Доказательство, данное в [9], использует некоторые соотношения, известные из интегральной геометрии. В [9] обобщение неравенства Радона на случай кривых в пространстве $\mathbb{R}^n$ названо пространственной теоремой Ролля. В этой работе указаны некоторые приложения полученного там неравенства к теории функций комплексной переменной.

Доказательство основной теоремы, которое приводится здесь, по существу, основано на соображениях, относящихся к элементарной геометрии. Полученный результат относится к ситуации, существенно более общей, чем та, которая рассматривается в работе [9].

2. Далее M означает произвольное метрическое пространство неположительной кривизны. Расстояние между произвольными точками $X, Y \in M$ далее обозначается символом $|XY|$.

Понятие кривой далее трактуется в смысле определения, данного М. Фреше, с той разницей, что оказывается удобным иметь дело с ориентированными кривыми в смысле Фреше. Необходимые определения могут быть найдены, например, в статье [1] и в монографии [2]. Мы предполагаем известным также понятие длины кривой. Длина кривой K в метрическом пространстве M далее обозначается символом $s(K)$. Кривая K с началом в точке $X \in M$ и концом в точке $Y \in M$ называется *кратчайшей*, если $s(K) = |XY|$.

Метрическое пространство называют *пространством с внутренней метрикой*, если для любых двух его точек расстояние между ними равно точной нижней границе длин кривых, соединяющих эти точки.

Треугольником в метрическом пространстве M называется множество T, состоящее из трех точек X, Y и Z этого пространства и трех кратчайших XY, YZ и ZX, соединяющих эти точки. Точки X, Y и Z называются *вершинами треугольника* T, кратчайшие XY, YZ и ZX — *сторонами треугольника* T. В этом случае применяется обозначение $T = \Delta(XYZ)$.

Пусть $T = \Delta(XYZ)$ — треугольник в метрическом пространстве с внутренней метрикой M. Символ $\widehat{\Delta}(XYZ)$ далее означает треугольник на плоскости $\mathbb{E}^2$ с вершинами в точках X', Y' и Z' такой, что $|X'Y'| = |XY|$, $|Y'Z'| = |YZ|$ и, наконец, $|Z'X'| = |XZ|$. Треугольник $\widehat{\Delta}(XYZ)$ называется *разверткой треугольника* $\Delta(XYZ)$. Определим отображение φ границы треугольника $\widehat{\Delta}(XYZ)$ в пространство M такое, что

$$\varphi(X') = X, \quad \varphi(Y') = Y, \quad \varphi(Z') = Z$$

и стороны $[X'Y']$, $[Y'Z']$ и $[Z'X']$ изометрически отображаются на кратчайшие $[XY]$, $[YZ]$, $[ZX]$ соответственно. Отображение φ этими условиями определено однозначно. Если P — точка на стороне треугольника $\Delta(XYZ)$, то будем говорить, что точка P' треугольника $\widehat{\Delta}(XYZ)$ *отвечает* точке P, если $P = \varphi(P')$.

Пусть O — произвольная точка метрического пространства M, K и L — кривые, исходящие из точки O. Зададим произвольно точки $X \in K$ и $Y \in K$, отличные от точки O. Пусть $x = |OX|$, $y = |OY|$. Построим развертку $\widehat{\Delta}(OXY)$ треугольника $\Delta(OXY)$. Символом $\gamma(X,Y)$ обозначим угол при вершине O' плоского треугольника $\widehat{\Delta}(OXY)$. Предел

$$\lim_{X\to O, Y\to O} \gamma(X,Y) \tag{2.1}$$

в случае, если он существует, называется *углом между кривыми K и L в точке O*.

Пусть $T = \Delta(XYZ)$ — треугольник в пространстве M, и пусть α, β и γ — углы при вершинах этого треугольника. Величина $\delta(T) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ называется *избытком* треугольника XYZ.

Во всяком метрическом пространстве M неположительной кривизны для любых двух кратчайших, исходящих из некоторой точки X, существует угол между ними в этой точке. Для всякого треугольника T в пространстве M выполняется неравенство $\delta(T) \le 0$.

Справедливо также более сильное утверждение, а именно

Лемма 2.1 [10]. *Пусть XYZ — треугольник в пространстве M неположительной кривизны и α, β и γ — углы в его вершинах X, Y и Z соответственно. Пусть α', β' и γ' — углы треугольника $\widehat{\Delta}(XYZ)$ при его вершинах, отвечающих точкам X, Y и Z соответственно. Тогда $\alpha \le \alpha'$, $\beta \le \beta'$, $\gamma \le \gamma'$.*

Далее нам понадобится также следующее предложение, доказательство которого может быть найдено в [10].

Лемма 2.2. *Пусть K_1, K_2 и K_3 — кривые в метрическом пространстве M, исходящие из точки O, и α_{ij}, $i,j = 1,2,3$, $i \ne j$, — угол в точке O между кривыми K_i и K_j. Тогда справедливо неравенство*

$$\alpha_{13} \le \alpha_{12} + \alpha_{23} \tag{2.2}$$

(неравенство треугольника для углов).

Определение поворота кривой в нашем случае вполне аналогично определению, приведенному в [1, 2] для кривых в пространстве $\mathbb{R}^n$. Случай кривых в пространстве неположительной кривизны рассмотрен в работе [3]. Дальнейшее представляет собой модификацию рассуждений, содержащихся в [1, 2]. Единственное место, где возникает отличие в сравнении с [1, 2], связано с леммой 3.1.

Пусть K — кривая в пространстве M. Будем говорить, что K — *ломаная*, если существует конечная последовательность $X_0, X_1, \dots, X_m$ точек этой кривой такая, что при каждом $i = 1, 2, \dots, m$ точка X_{i-1} предшествует точке X_i, дуга $[X_{i-1}X_i]$ является кратчайшей, X_0 — начало, X_m — конец кривой K. Для $i = 1, 2, \dots, m-1$ пусть θ_i — угол при вершине X_i треугольника $X_{i-1}X_iX_{i+1}$. Величина $\varkappa_i = \pi - \theta_i$ называется *поворотом при вершине* X_i ломаной K. Сумма $\sum\limits_{i=1}^{m-1} \varkappa_i$ называется *поворотом ломаной* K и обозначается символом $\varkappa(K)$.

Пусть K — кривая в пространстве M, $X_0, X_1, \dots, X_m$ — последовательность точек кривой K такая, что при каждом $i = 1, 2, \dots, m$ точка X_{i-1} предшествует точке X_i на кривой K. Соединяя последовательно кратчайшими точки X_0 и X_1, X_1 и X_2 и т. д., наконец, точку X_{i-1} с точкой X_i, получим некоторую ломаную. Ломаная L называется *вписанной в кривую* K, если она может быть построена таким путем.

Пусть даны ломаные L и K. Тогда если L вписана в K, то имеет место неравенство $\varkappa(L) \le \varkappa(K)$. Это следствие лемм 2.1 и 2.2 (см. [3]). Отсюда, в частности, следует, что $\varkappa(K)$ — точная верхняя граница поворотов ломаных вписанных в K. (В действительности $\varkappa(K) = \max\limits_{L} \varkappa(L)$, где L вписана в K.)

Пусть K — произвольная кривая в пространстве M. Точная верхняя граница поворотов ломаных, вписанных в кривую K, называется ее *поворотом* и обозначается символом $\varkappa(K)$. В силу предыдущего замечания для случая ломаных данное определение дает то же значение поворота, что и исходное определение.

Лемма 3.1 [11]. *Пусть X_ν, Y_ν и Z_ν, $\nu = 1, 2, \dots,$ — последовательности точек пространства M кривизны, не большей K, сходящиеся к точкам X_0, Y_0 и Z_0 соответственно. Пусть также α_ν — угол при вершине X_ν треугольника $X_\nu Y_\nu Z_\nu$, α_0 — угол при вершине X_0 треугольника $X_0 Y_0 Z_0$. Тогда справедливо неравенство $\varlimsup\limits_{\nu\to\infty} \alpha_\nu \leq \alpha_0$.*

Лемма 3.2. *Пусть K_ν, $\nu = 1, 2, \dots,$ — последовательность кривых в пространстве M, сходящаяся к кривой K. Имеет место неравенство*

$$\varkappa(K) \leq \varliminf_{\nu\to\infty} \varkappa(K_\nu).$$

Доказательство. Пусть выполнены все условия леммы. Если кривая K вырождается в точку, то по определению $\varkappa(K) = 0$ и в этом случае неравенство леммы выполняется. Будем считать, что кривая K является невырожденной. Зададим произвольно ломаную L, вписанную в K. Пусть $X_0, X_1, \dots, X_m$ — последовательные вершины ломаной L. Зададим произвольно параметризацию $x(t)$, $a \leq t \leq b$, кривой K, и пусть $a \leq t_0 < t_1 < \dots < t_m \leq b$ — значения параметра t такие, что $X_i = x(t_i)$ при каждом $i = 1, 2, \dots, m$. Согласно определению сходимости кривых найдется последовательность $x_\nu(t)$, $a \leq t \leq b$, $\nu = 1, 2, \dots,$ параметризаций кривых K_ν такая, что $|x_\nu(t)x(t)| \to 0$ равномерно в промежутке $[a, b]$ при $\nu \to \infty$. Положим $X_{i,\nu} = x_\nu(t_i)$, и пусть L_ν — вписанная в кривую K_ν ломаная с вершинами в точках $X_{i,\nu}$, $i = 0, 1, \dots, m$. Для $0 < i < m$ обозначим через $\theta_{i,\nu}$ угол при вершине $X_{i,\nu}$ треугольника $X_{i-1,\nu} X_{i,\nu} X_{i+1,\nu}$. Положим $\varkappa_{i,\nu} = \pi - \theta_{i,\nu}$. Согласно лемме 3.1 при каждом $i = 1, 2, \dots, m-1$ выполняется неравенство

$$\theta_i \geq \varlimsup_{\nu\to\infty} \theta_{i,\nu},$$

откуда следует, что

$$\varkappa_i \leq \varliminf_{\nu\to\infty} \varkappa_{i,\nu}.$$

Это позволяет заключить, что

$$\varliminf_{\nu\to\infty} \varkappa(K_\nu) \geq \varliminf_{\nu\to\infty} \varkappa(L_\nu)$$
$$= \varliminf_{\nu\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{m-1} \varkappa_{i,\nu} \right) \geq \sum_{i=1}^{m-1} \varliminf_{\nu\to\infty} \varkappa_{i,\nu} \geq \sum_{i=1}^{m-1} \varkappa_i = \varkappa(L).$$

В силу произвольности ломаной L, вписанной в кривую K, лемма доказана.

Лемма 3.3. *Пусть K — произвольная кривая в пространстве M, A и B — концевые точки кривой K, X — произвольная внутренняя точка кривой K. Тогда имеют место неравенства*

$$\varkappa(K) \geq \varkappa([AX]) + \varkappa([XB]) \geq \varkappa(K) - \pi.$$

Доказательство осуществляется рассуждениями, аналогичными тем, которые для евклидова случая приведены в [1, 2], и мы его опускаем.

Следствие 1. *Если кривая K в пространстве M является кривой конечного поворота, то и любая ее дуга будет кривой конечного поворота.*

Если кривая K с началом A и концом B такова, что для некоторого X дуги $[AX]$ и $[XB]$ представляют собой кривые конечного поворота, то также и K — кривая конечного поворота.

Доказательство. Первое утверждение следствия вытекает из того, что всякая ломаная L, вписанная в произвольную дугу $[XY]$ кривой K, вписана также и в кривую K.

Второе утверждение леммы следует из неравенства $\varkappa(K) \leq \pi + \varkappa([AX]) + \varkappa([XB])$. $\square$

Следствие 2. *Предположим, что K — кривая конечного поворота, A — начало, B — конец кривой K, X — внутренняя точка кривой K. Тогда если X стремится к A по кривой K, то $\varkappa([AX]) \to 0$. Аналогично при $X \to B$ по кривой K имеем $\varkappa([XB]) \to 0$.*

Доказательство осуществляется аналогично случаю кривых в пространстве $\mathbb{R}^n$ (см. [1, 2]). $\square$

Пусть O — точка в пространстве неположительной кривизны M. Говорят, что кривая K, исходящая из точки O, *имеет в точке O направление*, если она образует сама с собой определенный угол, т. е. существует предел

$$\lim_{\substack{X\to O, Y\to O\\ X,Y\in K}} \gamma(X,Y).$$

Этот предел, очевидно, равен нулю. Множество всех кривых, исходящих из точки X и имеющих направление в этой точке, обозначим символом $\mathscr{K}_M(O)$.

Следствие 3. *Пусть K — кривая в пространстве M, A — начало и B — конец кривой K. Тогда если $\varkappa(K) < \infty$, то кривая K имеет определенные направления в каждой из точек A и B.*

Доказательство см. в [3]. $\square$

4. Если кривые K и L, исходящие из точки O, таковы, что каждая из них имеет в точке O определенное направление, то определен угол между этими кривыми в точке O. Будем обозначать его символом $\alpha(K,L)$. Для всякой кривой $K \in \mathscr{K}(O)$ имеем $\alpha(K,K) = 0$. Для любых K, $L \in \mathscr{K}(O)$, очевидно, $\alpha(K,L) = \alpha(L,K)$. Лемма 2.2 позволяет заключить, что для функции α выполняется неравенство треугольника: $\alpha(K_0,K_2) \leq \alpha(K_0,K_1) + \alpha(K_1,K_2)$ для любых трех кривых, принадлежащих $\mathscr{K}(O)$. Функция α, таким образом, является полуметрикой на множестве $\mathscr{K}(O)$. Из равенства $\alpha(K,L) = 0$, вообще говоря, не следует, что $K = L$.

Фактор-пространство пространства $\mathscr{K}(O)$ по отношению эквивалентности $K \sim L$, определенному условием $K \sim L \Leftrightarrow \alpha(K,L) = 0$, обозначается символом $N_{{}_M}(O)$ и называется *пространством направлений пространства M в точке O*. Класс эквивалентности кривой $K \in \mathscr{K}(O)$ по отношению $\sim$ называется *направлением кривой K в точке X*. Пусть $\xi, \eta \in N_{{}_M}(O)$. Выберем произвольно кривые $K \in \xi$ и $L \in \eta$ и положим $\alpha(\xi,\eta) = \alpha(K,L)$. Функция α является метрикой на множестве $N_{{}_M}(O)$.

Пусть K — произвольная кривая в пространстве M, O — точка, не лежащая на кривой K. Зададим произвольно параметризацию $x(t)$, $a \leq t \leq b$, кривой K. Тогда $x(t) \neq O$ при каждом $t \in [a,b]$. Пусть K_t — кратчайшая, соединяющая точку $x(t)$ с точкой O, и $\xi(t)$ — касательное направление кратчайшей K_t в точке O. Для $t \in [a, b]$ положим $r(t) = |Ox(t)|$. Для всякой точки $t_0 \in [a, b]$ при $t \to t_0$ величина $|x(t)x(t_0)|$ стремится к нулю в силу непрерывности $x(t)$. Так как $|r(t) - r(t_0)| \leq |x(t)x(t_0)|$, то и $r(t) \to r(t_0)$ при $t \to t_0$. Для треугольника $Ox(t)x(t_0)$ построим его развертку. Пусть $\hat{\alpha}(t, t_0)$ — угол при вершине развертки, соответствующей точке O. Очевидно, $\hat{\alpha}(t, t_0) \to 0$ при $t \to t_0$. Имеем $\alpha(\xi(t), \xi(t_0)) \leq \hat{\alpha}(t, t_0)$, откуда согласно лемме 3.1 вытекает, что $\alpha(\xi(t), \xi(t_0)) \to 0$ при $t \to t_0$. Получаем, следовательно, что $\xi(t)$, $t \in [a, b]$, — непрерывная параметризованная кривая в метрическом пространстве $(N_M(O), \alpha)$. Она определяет некоторую кривую $\Sigma(K)$ в $N(O)$. Кривая $\Sigma(K)$ не зависит от выбора параметризации $x(t)$, $a \leq t \leq b$, кривой K. Будем говорить, что $\xi(t)$ — параметризация кривой $\Sigma(K)$, порожденной параметризацией $x(t)$ кривой K. Длина кривой $\Sigma(K)$ в пространстве $N_{M}(O)$ обозначается символом $\varphi(O, K)$ и называется *углом обзора кривой K из точки O*.

Предложение 4.1. *Если кривая K спрямляема, то для всякой точки O, не лежащей на кривой K, величина $\varphi(O, K)$ конечна. Если $\delta > 0$ таково, что для всякой точки X кривой K выполняется неравенство $|OX| \geq \delta$, то имеет место неравенство*

$$\varphi(O, K) \leq \frac{s(K)}{\delta}.$$

Доказательство элементарно. □

Доказательство основной теоремы. Предварительно докажем некоторое вспомогательное утверждение.

Пусть L — ломаная в пространстве M, не проходящая через точку O, и пусть X_0, X_1, $\ldots$, X_m — ее последовательные вершины. При каждом $i = 1, 2, \ldots, m$ рассмотрим треугольник $OX_{i-1}X_i$. Пусть α_i — угол при вершине O этого треугольника, β_{i-1} — угол при его вершине X_{i-1} и, наконец, γ_i — угол при вершине X_i треугольника $OX_{i-1}X_i$. Если $0 < i < m$, то пусть θ_i — угол при вершине X_i треугольника $X_{i-1}X_iX_{i+1}$. Тогда поворот ломаной L в точке X_i равен $\varkappa_i = \pi - \theta_i$.

Положим $\widehat{\varphi}(L) = \sum\limits_{i}^{m} \alpha_i$. Докажем, что имеет место неравенство

$$\widehat{\varphi}(L) \leq \pi - \beta_0 + \varkappa(L) - \gamma_m. \tag{4.1}$$

Доказательство будем вести индукцией по числу m звеньев ломаной. Для $m = 1$ имеем $\varkappa(L) = 0$. В этом случае $\widehat{\varphi}(L) = \alpha_1$. Избыток треугольника OX_0X_1 неположителен, так как по условию M — пространство неположительной кривизны, т. е. имеет место неравенство $\alpha_1 + \beta_0 + \gamma_1 \leq \pi$. Отсюда $\widehat{\varphi}(L) = \alpha_1 \leq \pi - \beta_0 - \gamma_1$. Это, очевидно, и есть неравенство (4.1) для данного случая.

Предположим, что для ломаных, имеющих m звеньев, неравенство (4.1) доказано. Пусть L — ломаная, составленная из $(m+1)$ кратчайших $[X_{i-1}X_i]$, $i = 1, 2, \ldots, m, m+1$. Обозначим через L' дугу X_0X_m этой ломаной. В силу предположения индукции

$$\widehat{\varphi}(L') \leq \pi - \alpha_0 + \varkappa(L') - \gamma_m. \tag{4.2}$$

Далее, $\widehat{\varphi}(L) = \widehat{\varphi}(L') + \alpha_{m+1}$. Применяя неравенство $\delta(T) \leq \pi$ к треугольнику $T = OX_mX_{m+1}$, получим $\alpha_{m+1} + \beta_m + \gamma_{m+1} \leq \pi$, откуда

$$\alpha_{m+1} \leq \pi - \beta_m - \gamma_{m+1}. \tag{4.3}$$

Складывая почленно неравенства (4.2) и (4.3), находим

$$\widehat{\varphi}(L) = \widehat{\varphi}(L') + \alpha_{m+1} \leq \pi - \alpha_0 + \varkappa(L') - \gamma_m + \pi - \beta_m - \gamma_{m+1}. \qquad (4.4)$$

Пусть θ_m — угол между кратчайшими $[X_m X_{m-1}]$ и $[X_m X_{m+1}]$ в точке X_m. Имеем неравенство $\beta_m + \gamma_m \geq \theta_m$. Отсюда $-\gamma_m + \pi - \beta_m \leq \pi - \theta_m = \varkappa_m$. С учетом последнего неравенства из (4.4) следует, что

$$\widehat{\varphi}(L) \leq \pi - \alpha_0 + \varkappa(L') + \varkappa_m - \gamma_{m+1} = \pi - \alpha_0 + \varkappa(L) - \gamma_{m+1},$$

и тем самым показано, что если неравенство (4.1) выполняется для m-звенных ломаных, то оно верно также и для ломаных, которые имеют $m+1$ звеньев. По индукции заключаем, что неравенство (4.1) справедливо для всех ломаных, не проходящих через точку O.

Пусть K — произвольная кривая конечного поворота в пространстве M, $x(t)$, $a \leq t \leq b$, — произвольная ее параметризация, причем $x(a) = A$ — начало, $x(b) = B$ — конец кривой K. Для произвольного натурального ν пусть $t_0 = a < t_1 < \dots < t_m = b$ — последовательность точек промежутка $[a, b]$ такая, что при каждом $i = 1, 2, \dots, m$ разность $t_i - t_{i-1}$ меньше $1/\nu$, и пусть L_ν — вписанная в кривую K ломаная, образованная кратчайшими, последовательно соединяющими точки $X_{i-1} = x(t_{i-1})$ и $X_i = x(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$. Полагая $\nu = 1, 2, \dots$, получим последовательность ломаных L_ν, вписанных в кривую K и сходящуюся к ней при $\nu \to \infty$. При каждом ν имеем $\varkappa(L_\nu) \leq \varkappa(k)$. Так как согласно теореме 2.1 $\varkappa(K) \leq \varliminf\limits_{\nu\to\infty} \varkappa(L_\nu)$, отсюда следует, что $\varkappa(K) = \lim\limits_{\nu\to\infty} \varkappa(L_\nu)$.

Для $t \in [a, b]$ пусть $\xi(t)$ — направление в точке O кратчайшей $[Ox(t)]$. Функция $\xi(t)$ — параметризация кривой $\Sigma(K)$ в пространстве $\mathscr{N}(O)$.

Рассмотрим ломаную L_ν. Будем считать, что L_ν не проходит через точку O. (Для всех достаточно больших значений ν это условие, очевидно, выполняется.) Имеем

$$\widehat{\varphi}(L_\nu) = \sum_{i=1}^{m} \alpha(t_{i-1}, t_i).$$

Отсюда вытекает, что при $\nu \to \infty$ величина $\widehat{\varphi}(L_\nu)$ имеет пределом длину кривой $\Sigma(K)$ в пространстве $\mathscr{N}(O)$, т. е. $\widehat{\varphi}(L_\nu) \to \varphi(O, K)$ при $\nu \to \infty$.

Пусть $[AX_\nu]$ — первое, а $[Y_\nu B]$ — последнее звенья ломаной L_ν. При $\nu \to \infty$ будет $X_\nu \to A$, а $Y_\nu \to B$. По доказанному при каждом ν справедливо неравенство

$$\widehat{\varphi}(L_\nu) \leq \varkappa(L_\nu) + \pi - \alpha_\nu - \beta_\nu, \qquad (4.5)$$

где α_ν — угол между кратчайшими $[OA]$ и $[AX_\nu]$ в точке A и аналогично β_ν — угол в точке B между кратчайшими OB и $[Y_\nu B]$. При $\nu \to \infty$ имеем $\alpha_\nu \to \alpha$, $\beta_\nu \to \beta$ и, наконец, $\varkappa(L_\nu) \to \varkappa(K)$. Переходя в неравенстве (4.5) к пределу при $\nu \to \infty$, получим требуемое неравенство. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Д., Решетняк Ю. Г.* Поворот кривой в n-мерном евклидовом пространстве // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 1. С. 3–23.
2. *Alexandrov A. D., Reshetnyak Yu.G.* General theory of irregular curves. New York: Kluwer Acad. Publ., 1989.
3. *Alexander S. B., Bishop R.* The Fary — Milnor theorem in Hadamard manifolds // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. V. 126. P. 3427–3436.
4. *Bishop R. L.* The total curvature of a Riemannian curve. Urbana — Shampaign Univ., 2002. Preprint, 1–2.

5. *Radon J.* Über Randwertaufgaben beim logarithmischen Potential // Sitzber Akad. Wiss. Wien. 1919. V. 128. P. 1123–1167.

6. *Решетняк Ю. Г.* Исследование многообразий ограниченной кривизны посредством изотермических координат // Изв. СО АН СССР. 1959. Т. 10, № 1. С. 15–28.

7. *Решетняк Ю. Г.* Изотермические координаты в многообразиях ограниченной кривизны. I // Сиб. мат. журн. 1960. Т. 1, № 1. С. 88–116.

8. *Решетняк Ю. Г.* Изотермические координаты в многообразиях ограниченной кривизны. II // Сиб. мат. журн. 1960. Т. 1, № 2. С. 248–276.

9. *Khovanski A. G., Yakovenko S. Yu.* Generalized Rolle theorem in $\mathbb{R}^n$ and $\mathbb{C}$ // J. Dynamic. Control. Systems. 1996. V. 2, N 1. P. 101–123.

10. *Alexandrov A. D.* On a generalization of Riemannian geometry. Berlin: Jahresberichte Humb. Univ., 1955, P. 3–65. (См. также Alexandrov A. D. Selected works. Gordon and Breach Publ., 1996. P. 187–249.)

11. *Ballmann W.* Lectures on Spaces of Nonpositive Curvature. Basel: Birkhäuser, 1995.

Статья поступила 4 февраля 2002 г.

Решетняк Юрий Григорьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
ugresh@math.nsc.ru