Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2002. Том 43, № 3

УДК 517.95

РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА. ВЫРОЖДЕННЫЙ СЛУЧАЙ

С. Г. Пятков, Н. Л. Абашеева

Аннотация: Получен ряд результатов о разрешимости краевых задач для уравнения вида $Bu_t - Lu = f$ $(t \in (0,\infty))$ в случае, когда оператор B самосопряженный, а оператор L диссипативный в данном гильбертовом пространстве E. Оператор B может иметь ненулевое ядро, а L равномерно диссипативный на M (M — некоторое подпространство конечной коразмерности). Библиогр. 29.

Введение

Работа посвящена исследованию краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений вида

$$Mu = Bu_t - Lu = f, \quad t \in (0,\infty), \tag{1}$$

где B, L — линейные операторы, определенные в данном гильбертовом пространстве E. Мы не предполагаем, что оператор B обратим; в частности, он может иметь ненулевое ядро и спектр оператора B может содержать одновременно бесконечные подмножества положительной и отрицательной полуосей. Такие уравнения возникают в физике [1–9], геометрии, популяционной генетике [10–12] и некоторых других областях.

Ранее вопросы разрешимости краевых задач для таких уравнений исследовались в случае, когда операторы L, B самосопряжены в данном гильбертовом пространстве E [1, 5, 13–16]. В этой работе условие самосопряженности оператора L заменяется условием его диссипативности. Под диссипативным оператором мы понимаем оператор, удовлетворяющий условию: $\mathrm{Re}(-Lu, u) \geq 0$ для всех $u \in D(L)$, здесь $D(L)$ — область определения оператора L. Опишем содержание работы. Вначале мы получим некоторые вспомогательные результаты, связанные со свойствами соответствующего уравнению (1) спектрального пучка $L - \lambda B$ и возникающих при этом операторов. Затем полученные результаты применим при исследовании уравнения (1). При этом используем методы теории интерполяции банаховых пространств. Отметим, что данная работа является продолжением работы авторов [17].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–01–00796) и Министерства общего и профессионального образования РФ (код проекта E00–1.0–79).

1. Вспомогательные утверждения

Норму и скалярное произведение в E обозначаем через $\|\cdot\|$ и $(\cdot,\cdot)$. Пусть вложение $H_1 \subset E$ плотно (H_1 — гильбертово пространство). Через H_1' обозначаем негативное пространство, построенное по паре H_1, E. Основные предположения об операторах L, B состоят в следующем.

I. *Найдется гильбертово пространство H_1, плотно вложенное в E, такое, что $L \in L(H_1; H_1')$ и $B \in L(H_1, H_1')$. Оператор $B : E \to E$ самосопряжен в E. H_1 плотно вложено в $D(|B|^{1/2})$ (с нормой графика).*

II. *Для $u \in H_1$ выполнено неравенство $\mathrm{Re}(-Lu, u) \geq 0$ и найдется постоянная $\delta > 0$ такая, что*

$$\mathrm{Re}(-Lu, u) \geq \delta \|u\|_{H_1}^2$$

для всех $u \in H_1 \cap M^\perp$, где $M \subset H_1$ — некоторое конечномерное подпространство, а ортогональное дополнение берется в E. Для всех $u \in M$ справедливо равенство $\mathrm{Re}(Lu, u) = 0$.

Далее считаем условия I, II выполненными.

Уравнению (1) соответствует спектральный пучок

$$Lu = \lambda Bu. \tag{2}$$

Под собственным элементом задачи (2) понимаем функцию $u \in H_1$ ($u \neq 0$) такую, что для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$ выполнено равенство (2). Множество $\{u_i\}_{i=0}^n$ ($u_i \in H_1$) — цепочка собственных и присоединенных элементов длины $n+1$ (с.п.э.) задачи (2), соответствующих $\lambda \in \mathbb{C}$, если

$$(L - \lambda B)u_i = Bu_{i-1}, \quad u_{-1} = 0, \quad i = 0, \dots, n.$$

Корневое подпространство пучка (2), соответствующее некоторому $\lambda \in \mathbb{C}$, т. е. замыкание в H_1 линейной оболочки с.п.э. задачи (2), соответствующих данному λ, будем обозначать через L_λ. Будем говорить, что $\{u_i\}_{i=0}^m$, где $u_i \in H_1$ ($i = 0, \dots, m-1$), $u_m \in D(|B|^{1/2})$, является *цепочкой с.п.э. длины $m+1$ пучка* (2), соответствующих $\lambda = \infty$, если $Bu_i = Lu_{i-1}$, $i = 0, \dots, m$, $u_{-1} = 0$.

Положим

$$F_1 = \{u \in H_1 : \ (Lu, v) = 0 \quad \forall v \in \ker B \cap H_1\},$$

$$\widetilde{F}_1 = \{u \in H_1 : \ (L^* u, v) = 0 \quad \forall v \in \ker B \cap H_1\}.$$

Лемма 1. *Пусть*

$$\ker B \cap M = \{0\}. \tag{3}$$

Тогда длины цепочек с.п.э. задачи (2), соответствующих $\lambda = \infty$, равны 1. *Пространство H_1 представимо в виде прямых сумм*

$$H_1 = N + F_1, \quad H_1 = N + \widetilde{F}_1, \tag{4}$$

где $N = \ker B \cap H_1$.

Доказательство. Действительно, если $Bu_0 = 0$ и $Bu_1 = Lu_0$, то получаем $(Lu_0, u_0) = (Bu_1, u_0) = 0$. Тогда $u_0 \in M \cap \ker B = \{0\}$.

Из определения следует, что F_1 — замкнутое подпространство H_1. Поскольку $\ker L = \ker L^*$ (в силу диссипативности), элементы F_1 представляются в виде $u = u_0 + L^{-1}g$, где $u_0 \in \ker L$, $g \in N^\perp \cap (\ker L)^\perp$. Обозначим $F_1^{\perp_1} = \{u \in H_1 : (u, Lv) = 0 \ \forall v \in F_1\}$. Тогда, очевидно, $F_1^{\perp_1} = \overline{N + \ker L} = N + \ker L$.

Пусть найдется элемент $f \in H_1'$ такой, что $(f, v) = 0$ для всех $v \in N + F_1$. Поскольку это равенство выполняется и при $v \in \ker L \subset F_1$, то $f \in R(L)$, т. е. существует $u \in H_1$ такой, что $f = Lu$. Вспоминая определение F_1, получаем, что $u \in F_1$. Полагая $v = u$, имеем $u \in M$. Отсюда $L^*u = -Lu$ и $(u, Lv) = 0$ для любого $v \in N + F_1$. Тогда $u \in F_1^{\perp_1}$. Следовательно, $u = u_1 + u_2$, где $u_1 \in N$, $u_2 \in \ker L \subset M$, так что $(Lu, u) = (Lu_1, u_1) = 0$ и $u_1 \in M \cap N = \{0\}$. Итак, $f = Lu_1 = 0$. Тем самым мы показали плотность $N + F_1$ в H_1. Покажем, что $H_1 = N + F_1$. Используя те же рассуждения, что приведены в доказательстве леммы 4 в [17], и условие (3), легко получить неравенство

$$\mathrm{Re}(-Lv, v) \geq \delta \|v\|_{H_1}^2 \quad \forall v \in N,$$

где δ — некоторая положительная постоянная. Тогда

$$\|v\|_{H_1}^2 \leq c\,\mathrm{Re}(-Lv, v) = c\,\mathrm{Re}(-L(u+v), v) \leq c_1 \|u+v\|_{H_1} \|v\|_{H_1} \quad \forall u \in F_1,\ v \in N.$$

Отсюда с использованием неравенства треугольника получим неравенство

$$\|u+v\|_{H_1} \geq \delta_1(\|u\|_{H_1} + \|v\|_{H_1}) \quad \forall u \in F_1,\ v \in N,$$

где $\delta_1 > 0$. Это неравенство и плотность $N + F_1$ в H_1 гарантируют первое из равенств (4). Второе доказывается по аналогии. Лемма доказана.

Вводим в подпространстве F_1 норму $\|\cdot\|_1$, индуцированную из H_1. Положим $F_0 = D(|B|^{1/2})/\ker B$. Норму в пространстве F_0 зададим с помощью равенства $\|u\|_0 = \||B|^{1/2}u\|$. Введем в F_0 также индефинитную метрику $[u, v]_0 = (Bu, v)$, относительно которой в F_0 определяется структура пространства Крейна [18]. Введем также пространство F_{-1} как пополнение F_0 относительно нормы $\|u\|_{-1} = \sup\limits_{v \in F_1} |[u, v]_0|/\|v\|_1$. В силу предыдущей леммы эта норма эквивалентна норме $\|Bu\|_{H_1'}$. Имеем $F_1 \subset F_0 \subset F_{-1}$, причем каждое вложение плотно.

Обозначим через S, $\widetilde{S}$ проекторы в H_1, отвечающие разложениям (4), т. е. $R(S) = N$, $R(I - S) = F_1$, $R(\widetilde{S}) = N$, $R(I - \widetilde{S}) = \widetilde{F}_1$. Пусть S^*, $\widetilde{S}^* : H_1' \to H_1'$ — сопряженные к операторам S, $\widetilde{S}$ (в смысле теории банаховых пространств). Имеем S^*, $\widetilde{S}^* \in L(H_1', H_1')$. Кроме того,

$$\begin{gathered} R(S^*) = F_1^{\perp} = \{f \in H_1' : (f, v) = 0\ \forall v \in F_1\} \subset R(L), \\ R(I - S^*) = R(I - \widetilde{S}^*) = N^{\perp} = \{Bf : f \in F_{-1}\}, \\ \widetilde{S}^* L = LS, \quad (I - \widetilde{S}^*)L = L(I - S). \end{gathered} \tag{5}$$

Покажем второе равенство. По построению пространства F_{-1} подпространство $G = \{Bf : f \in F_{-1}\}$ замкнуто в H_1'. Рассматривая равенство $(Bf, v) = 0$ для $f \in D(|B|^{1/2})$ и пользуясь самосопряженностью B, убеждаемся, что $G^{\perp} \subset N$. Кроме того, очевидно, что $N \subset G^{\perp}$. Третье равенство вытекает из определений подпространств $F_1, \widetilde{F}_1$ и цепочки равенств

$$(\widetilde{S}^* Lu, v) = (Lu, \widetilde{S}v) = (LSu, \widetilde{S}v) = (LSu, v) \quad \forall u, v \in H_1.$$

Четвертое равенство следует из третьего.

Пусть $u \in F_1$. По определению подпространства F_1 имеем $Lu \in (I - \widetilde{S}^*)H_1'$. Тогда найдется элемент $g \in F_{-1}$ такой, что $Lu = Bg$. По определению положим $g = B^{-1}Lu$, $B^{-1}L : F_1 \to F_{-1}$. Из определения нормы в пространстве F_{-1} вытекает, что $A = B^{-1}L \in L(F_1, F_{-1})$. Кроме того, в силу леммы 5 из работы [17] мнимая ось, за исключением конечного числа точек, принадлежит $\rho(A)$. Рассмотрим оператор A как неограниченный оператор в F_0 с областью определения $D(A) = \{u \in F_1 : Au \in F_0\}$. Оператор $A : F_0 \to F_0$ замкнут и имеет то же самое резольвентное множество. По определению оператор A J-диссипативен, т. е. $\mathrm{Re}[Au, u]_0 \le 0$. Поскольку $\rho(A) \cap \{z : \mathrm{Re}\, z = 0\} \ne \varnothing$, легко заключить, что $D(A)$ плотно в F_0 и A — максимальный J-диссипативный оператор (см. [18, гл. 2, § 2]). Пусть $\lambda_0 \in \sigma(A) \cap i\mathbb{R}$. В соответствии с [19, теорема 3.1, лемма 3.1] и [17, лемма 5] найдется множество вида $0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, принадлежащее $\rho(A)$. Таким образом, $\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ состоит из изолированных собственных значений. Возьмем $\lambda \in \sigma(A) \cap i\mathbb{R}$. Поскольку $\ker(A - \lambda I) = \ker(L - \lambda B)$, а последнее подпространство конечномерно, то конечномерно и подпространство $\ker(A - \lambda I)$. Кроме того, поскольку $\ker(L^* - \bar{\lambda} B)$ конечномерно, из определения оператора A вытекает, что подпространство $R(A)$ имеет конечную коразмерность. Тогда из теоремы 4.2 в [19] следует, что каждое такое собственное значение является нормальным собственным значением, т. е. изолированным собственным значением конечной кратности, причем область значений соответствующего проектора Рисса совпадает с корневым подпространством, отвечающим этому собственному значению. Непосредственно из определений также получаем равенство $L_\lambda(A) = L_\lambda$, где $L_\lambda(A)$ — корневое подпространство оператора A, отвечающее собственному значению $\lambda \in \sigma(A) \cap i\mathbb{R}$. Обозначим через A^c J-сопряженный к оператору A, т. е. сопряженный относительно индефинитной метрики $[\cdot, \cdot]_0$. Он также будет замкнутым, плотно определенным, максимально J-диссипативным [18, гл. 2, § 2]). Кроме того, спектры операторов A, A^c симметричны относительно вещественной оси.

Приведем некоторые свойства оператора $A : F_0 \to F_0$.

Лемма 2. *Найдется $R > 0$ такое, что $iy \in \rho(A)$ при $|y| \ge R$ и справедлива оценка*

$$\|(A - iy)^{-1} f\|_{F_{-1}} (1 + |y|) + \|(A - iy)^{-1} f\|_{F_1} \le c \|f\|_{F_{-1}} \quad \forall f \in F_{-1}. \tag{6}$$

Если в дополнение выполнено равенство

$$(F_1, F_{-1})_{1/2,2} = F_0, \tag{7}$$

то верна оценка

$$\|(A - iy)^{-1} f\|_{F_0} (1 + |y|) + \|(A - iy)^{-1} f\|_{D(A)} \le c \|f\|_{F_0} \quad \forall f \in F_0. \tag{8}$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$(A - iy) u = f, \quad f \in F_{-1}. \tag{9}$$

В силу леммы 5 из [17] и свойств операторов $\widetilde{S}$, S (см. (5)) найдется $R_0 > 0$ такое, что $\{iy : |y| \ge R_0\} \subset \rho(A)$. Воспользуемся проектором P, построенным в доказательстве теоремы 7 из [17]. Ввиду леммы 4 из [17] имеем

$$\delta \|(I - P) u\|_{F_1}^2 \le \mathrm{Re}[-Au, u]_0 = \mathrm{Re}[f, u]_0. \tag{10}$$

Кроме того, из (9) получим, что

$$|y| \|u\|_{F_{-1}}^2 + \|u\|_{F_1}^2 \le 2 \|f\|_{F_{-1}}^2 + c \|u\|_{F_1}^2.$$

Отсюда

$$\big(|y| \|u\|_{F_{-1}}^2 + \|u\|_{F_1}^2\big)/2 + |y| \|Pu\|_{F_{-1}}^2 \le 2 \|f\|_{F_{-1}}^2 + 2c \|(I - P) u\|_{F_1}^2 + 2c \|Pu\|_{F_1}^2. \tag{11}$$

Поскольку проектор P конечномерен, найдется постоянная c_1 такая, что выполнено $\|Pu\|_{F_1} \leq c_1\|Pu\|_{F_{-1}}$. Используя это неравенство, неравенства (10) и $|ab| \leq |a|\delta/2 + |b|/(2\delta)$ в правой части (11), мы придем к (6) при достаточно большом $R \geq R_0$ и $|y| \geq R$.

Пусть в (9) $f \in F_1$. Тогда $u \in D(A)$ и $Au \in F_1$. Применим оператор $A - iy_0 I$ ($|y_0| \geq R$) к (9) и воспользуемся неравенством (6) применительно к $v = (A - iy_0 I)u$. Поскольку $iy_0 \in \rho(A)$, имеем

$$\|(A - iy)^{-1}f\|_{F_1} \leq \frac{c}{1+|y|}\|f\|_{F_1} \quad \forall f \in F_1.$$

Аналогичная оценка справедлива в F_{-1}, так что ввиду (7) оператор $(A - iy)^{-1}$ определяет непрерывное отображение F_0 в F_0 и справедлива оценка

$$\|(A - iy)^{-1}f\|_{F_0} \leq \frac{c}{1+|y|}\|f\|_{F_0} \quad \forall f \in F_0.$$

Из этой оценки вытекает неравенство (8).

Положим $F_2 = D(A)$ (с нормой графика).

Построим проектор Рисса, отвечающий части спектра оператора A, лежащей на мнимой оси

$$P_\gamma u = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (A - \lambda)^{-1}u\,d\lambda,$$

где γ — некоторая замкнутая гладкая кривая Жордана, симметричная относительно вещественной и мнимой осей (определение и свойства проектора Рисса см. в [20, 18]). Используя проектор Рисса, мы можем записать разложения

$$F_i = F_{ia} + F_{ib}, \quad F_{ia} = P_\gamma F_i, \quad F_{ib} = (I - P_\gamma)F_i \quad (i = -1, 0, 1, 2).$$

Пространства F_{0a}, F_{0b} инвариантны относительно A, $F_{0a} \cap D(A) = F_{2a}$, $F_{0b} \cap D(A) = F_{2b}$. Очевидными свойствами этого проектора также являются свойства $P_\gamma|_{F_i} \in L(F_i)$ ($i = -1, 0, 1, 2$). Это и теорема об интерполяции подпространств [21, п. 1.17.1] гарантируют, что равенство (7) эквивалентно равенству

$$(F_{1b}, F_{-1b})_{1/2,2} = F_{0b}.$$

Отметим также тот факт, что $D(A^m)$ плотно в F_0 для любого $m \geq 1$ [22, § 11, п. 11.1].

Рассмотрим оператор A как оператор из F_{0b} в F_{0b} с областью определения F_{2b}. В силу известных свойств проекторов Рисса и леммы 2 мнимая ось принадлежит резольвентному множеству оператора A и оценки (6) и (8) справедливы для всех $y \in \mathbb{R}$.

Найдется $\delta > 0$ такое, что (см. [22, п. 14.1])

$$S = \mathbb{C} \setminus (S^+ \cup S^-) \subset \rho(A),$$

$$S^{-(+)} = \{z : |\arg z| < \pi/2 - \delta \ (|\arg z| > \pi/2 + \delta), |z| > \delta\}$$

и для любого луча $\{\arg z = \theta\} \subset S$ имеют место оценки резольвенты

$$\|(A - \lambda)^{-1}f\|_{F_i} \leq c_1\|f\|_{F_i}(1 + |\lambda|)^{-1} \quad (i = -1, 1).$$

Определим операторы

$$P^\pm f = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^\pm} \frac{A(A - z)^{-1}}{z} f\,dz, \quad \Gamma^\pm = \partial S^\pm, \ f \in D(A^2), \tag{12}$$

где направление интегрирования положительно, т. е. против часовой стрелки. Для $f \in D(A^2)$ интегралы в (12) нормально сходятся и $(P^{\pm})^2 f = P^{\pm} f$. Однако операторы $P^{\pm}$ не обязательно допускают продолжение до операторов класса $L(F_0)$. Рассмотрим оператор A как оператор в F_{-1} с областью определения F_1. Тогда предложение 3.1 в [23] (см. также лемму 1 в [24]) гарантирует, что после соответствующего продолжения справедливо включение

$$P^{\pm} \in L((F_1, F_{-1})_{s,2}) \quad \forall s \in (0,1). \tag{13}$$

Будем говорить, что подпространство $M \subset F_0$ *неотрицательно* (*неположительно*), если $[u,u]_0 \geq 0$ ($[u,u]_0 \leq 0$) для всех $u \in M$. Если выполнено условие $[u,u]_0 \geq \delta \|u\|^2_{F_0}$ ($\delta > 0$) для всех $u \in M$, то M называется *равномерно положительным подпространством.* Аналогично определяем *положительные пространства, равномерно отрицательные* и т. д. [18]. Неотрицательные и т. п. подпространства, для которых не существует нетривиальных неотрицательных расширений, называются *максимальными неотрицательными подпространствами.*

Положим $F_{0b}^{\pm} = \overline{\{u \in D(A^2) : P^{\pm} u = u\}}$.

Лемма 3. *Подпространства F_{0a}, $L_\lambda(A)$ ($\lambda \in i\mathbb{R}$) и F_{0b} проекционно полны, т. е. с нормой и индефинитной метрикой, индуцированной из F_0, они являются пространствами Крейна.*

Доказательство. Обоснование проекционной полноты подпространства $F_{0a} = R(P_\gamma)$ совпадает с соответствующим доказательством теоремы 2.24 в [18, гл. 2] с учетом того факта, что определение J-диссипативного оператора в [18] другое. Аналогично можно показать проекционную полноту каждого из подпространств $L_\lambda(A)$. Покажем, что F_{0b} проекционно полно. Поскольку $F_{0b} = (I - P_\gamma)F_0$, из определения получаем, что $F_{0b}^{[\perp]} = \{u \in F_0 : P^c_\gamma u = u\}$ ($F_{0b}^{[\perp]} = \{u \in F_0 : [u,v]_0 = 0 \ \forall v \in F_{0b}\}$). По построению

$$P^c_\gamma = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma (A^c - \lambda)^{-1} \, d\lambda,$$

т. е. P^c_γ — соответствующий проектор Рисса для оператора A^c. Тогда каждый элемент $u \in F_{0b}^{[\perp]}$ принадлежит $D(A^c)$. Однако подпространство $R(P^c_\gamma)$ проекционно полно по тем же причинам, что и $R(P_\gamma)$. Для доказательства проекционной полноты F_{0b} достаточно показать, что $F_{0b}^{[\perp]} \cap F_{0b} = \{0\}$. В этом случае в силу конечномерности $F_{0b}^{[\perp]}$ все пространство представимо в виде прямой суммы $F_0 = F_{0b} + F_{0b}^{[\perp]}$. Если $u \in F_{0b}^{[\perp]} \cap F_{0b}$, то $u \in F_{0b}^{[\perp]} \cap F_{0b}^{[\perp\perp]}$ [18, гл. 1, предложение 7.5]). В этом случае $[u,v]_0 = 0$ для $v \in F_{0b}^{[\perp]}$. Положим $v = A^c u$. По теореме 2.15 в [18, гл. 2, § 2] $u \in D(A)$ и $Au = -A^c u$. Следовательно, подпространство $\{\operatorname{Lin} L_{\lambda_i}(A^c),\ i = 1, 2, \dots, m\} = R\big(P^c_\gamma\big)$ вырожденно, т. е. найдется элемент $u \in R\big(P^c_\gamma\big)$ такой, что $[u,v] = 0$ для всех $v \in R\big(P^c_\gamma\big)$, а это противоречит проекционной полноте $R(P^c_\gamma)$.

Лемма 4. *Пусть справедливо* (7). *Тогда операторы $P^{\pm}$ допускают продолжение до операторов класса $L(F_0)$. Соответствующие подпространства $F_{0b}^{+} = R(P^{+})$, $F_{0b}^{-} = R(P^{-})$ являются максимальными неотрицательным и неположительным подпространствами пространства F_{0b}, инвариантными относительно* *оператора* $A : F_{0b} \to F_{0b}$. *В случае, если оператор* $A : F_{0b} \to F_{0b}$ *равномерно* J*-диссипативен, условие* (7) *является необходимым и достаточным условием для того, чтобы проекторы* $P^{\pm}$ *допускали продолжение до операторов класса* $L(F_0)$ *и чтобы подпространства* $F_{0b}^{\pm}$ *были максимальными семидефинитными подпространствами, инвариантными относительно* A.

Доказательство. В силу равенства (13) операторы $P^{\pm}$ допускают продолжение до операторов класса $L(F_0)$ и первая часть утверждения доказывается точно так же, как и в лемме 10 в [24]. Вторая часть утверждения есть следствие леммы 11 в [24].

Замечание 1. Оператор $A : F_{0b} \to F_{0b}$ равномерно J-диссипативен, например, в случае, если выполнено неравенство

$$|[Au, v]_0| \leq c \operatorname{Re}[-Au, u]_0^{1/2} \operatorname{Re}[-Av, v]_0^{1/2} \quad \forall u, v \in F_1,$$

которое всегда выполнено, если A J-самосопряжен.

Положим $A^+ = A|_{F_{0b}^+}$, $A^- = A|_{F_{0b}^-}$.

Лемма 5. *При выполнении условия* (7) *операторы* A^+ *и* $-A^-$ *являются инфинитезимальными операторами аналитических полугрупп* e^{A^+t} *и* e^{-A^-t}, *и соответствующие полугруппы удовлетворяют оценкам*

$$\|e^{A^+t}\|_{L(F_{0b}^+)} \leq ce^{-\delta t}, \quad \|e^{-A^-t}\|_{L(F_{0b}^-)} \leq ce^{-\delta t},$$

где c, δ *— некоторые положительные постоянные. При этом* $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > -\delta_1\} \subset \rho(A^+)$, $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda < \delta_1\} \subset \rho(A^-)$ *для некоторого* $\delta_1 > 0$ *и в этих полуплоскостях справедливы оценки резольвент*

$$\|(A^+ - \lambda I)^{-1}\|_{L(F_0^+)} \leq c/(1 + |\lambda|), \quad \|(A^- - \lambda I)^{-1}\|_{L(F_0^-)} \leq c/(1 + |\lambda|),$$

где c *— некоторая постоянная.*

Доказательство приведено в [25, с. 472, 473; 23, следствие 3.3].

Лемма 6. *Пусть выполнено* (7). *Тогда найдутся максимальное неотрицательное и максимальное неположительное подпространства пространства* F_0, *инвариантные относительно* A.

Доказательство. Вначале приведем некоторые свойства цепочек с.п.э. оператора A.

Пусть $\{u_i\}_{i=0}^{k-1}$ — цепочка с.п.э. A, соответствующая собственному значению $\lambda \in i\mathbb{R}$. Тогда $u_i \in D(A^c)$ и $A^c u_i = -Au_i$ для $i \leq [(k-1)/2]$. Пусть $\{v_i\}_{i=0}^{m-1}$ — другая цепочка с.п.э. A, соответствующая λ, и $m \geq k$. Возможно, что $v_i = u_i$ для каждого i. Если $i \leq [(k-1)/2]$, то

$$[u_i, v_j]_0 = 0 \ \text{ при } \quad i + j < m - 1. \tag{14}$$

Если $i > [(k-1)/2]$ и $m > k$, то

$$[u_i, v_j]_0 = 0 \text{ при } \ i + j \leq \left[\frac{k-1}{2}\right] + \left[\frac{m-1}{2}\right]. \tag{15}$$

Если $[u_0, v_{m-1}]_0 = 0$ и $[u_{k-1}, v_0]_0 = 0$, тогда равенство (14) справедливо для $i + j \leq m - 1$.

Эти соотношения доказаны (в несколько другом виде) при доказательстве теоремы 2.26 в [18, гл. 2]. Отметим также, что при $\lambda \in i\mathbb{R}$ [18, гл. 2, следствие 2.17]

$$\ker(A - \lambda I) = \ker(A^c - \bar{\lambda}), \quad R(A - \lambda I) = (\ker(A^c - \bar{\lambda}))^{[\perp]}.$$

Рассмотрим корневое подпространство $L_\lambda(A)$ ($\lambda \in i\mathbb{R}$). Докажем вначале утверждение леммы для каждого из корневых подпространств $L_\lambda(A)$ ($\lambda \in i\mathbb{R}$). По лемме 3 в $L_\lambda(A)$ можно рассмотреть индефинитную метрику, индуцированную из F_0. Рассмотрим оператор $A|_{L_\lambda(A)} : L_\lambda(A) \to L_\lambda(A)$. Без ограничения общности можем считать, что $\lambda = 0$, иначе рассмотрим оператор $A - \lambda I$ вместо A.

Положим $\ker A = M_0$ и $N_0 = M_0 \cap (\ker A)^{[\perp]}$. Представим M_0 в виде прямой суммы $M_0 = M_{0,1} + N_0$. Подпространство $M_{0,1}$ выбирается произвольно. Мы имеем $M_{0,1}[\perp]N_0$ и подпространство $M_{0,1}$ невырожденно, т. е. не существует $u \in M_{0,1}$, $u \neq 0$, такого, что $[u, v]_0 = 0\ \forall v \in M_{0,1}$. Действительно, поскольку $\ker A = \ker A^c$ и $R(A)$ — замкнутое подпространство, элемент $f \in N_0$ представим в виде $f = Af_1$. Тогда $[u, f]_0 = [u, Af_1]_0 = [Au, f_1]_0 = 0$, где $u \in M_{0,1}$. Предположим противное, т. е. что $M_{0,1}$ вырожденное в F_0. Найдется $f \in M_{0,1}$ такой, что $[f, v]_0 = 0$ для $v \in M_{0,1}$. Следовательно, $[f, v]_0 = 0$ для $v \in N_0 + M_{0,1} = M_0$, а этот факт влечет, что $f \in N_0$. Это противоречит равенству $N_0 \cap M_{0,1} = \{0\}$. Фиксируем оператор $A^{-1} : R(A) \to F_0$ ($R(A) \subset F_0$). Положим $M_1 = \{A^{-1}f + f_1,\ f \in N_0,\ f_1 \in M_{0,1}\}$, где элемент $f_1 \in M_{0,1}$ определяется из условия $[A^{-1}f + f_1, v]_0 = 0$ для каждого $v \in M_{0,1}$. Элемент f_1 существует и единствен. Он может быть найден в виде $f_1 = \sum_i c_i v_i$, где $\{v_i\}$ — базис в $M_{0,1}$. Поскольку $M_{0,1}$ невырожденно, матрица $[v_i, v_j]_0$ невырожденна. Как и ранее, представим подпространство M_1 в виде прямой суммы $M_1 = N_1 + M_{1,2}$, где $N_1 = M_1 \cap M_0^{[\perp]}$. Положим $M_{0,2} = AM_{1,2}$. Имеем $M_0 = M_{0,1} + M_{0,2} + AN_1$. По построению $M_{1,2}[\perp]M_{0,1}$. Поскольку каждый элемент $f \in N_1$ представим в виде $f = Af_1$, в силу соотношений (14), (15) $M_{1,2}[\perp]AN_1$. Из определения подпространства $M_{1,2}$ выводим $M_{1,2} \cap M_{0,2}^{[\perp]} = \{0\}$. Полученные соотношения можно записать в виде

$$M_0 = M_{0,1} + M_{0,2} + AN_1,\ M_1 = M_{1,2} + N_1,\ M_{1,2}[\perp]M_{0,1} + AN_1,\ M_{1,2} \cap M_{0,2}^{[\perp]} = \{0\}.$$

Продолжим по индукции. Предположим, что при $n = k$ мы построили подпространства M_i, N_i, и $M_{i,j}$ со свойствами

$$M_0 = M_{0,1} + \ldots + M_{0,n} + A^{n-1}N_{n-1},\ M_1 = M_{1,2} + M_{1,3} + \ldots + M_{1,n} + A^{n-2}N_{n-1}, \ldots, \tag{16}$$

$$M_i = M_{i,i+1} + M_{i,i+2} + \ldots + M_{i,n} + A^{n-i-1}N_{n-1},\ \ldots, M_{n-1} = M_{n-1,n} + N_{n-1}, \tag{17}$$

$$M_{i,i+1}[\perp]M_{0,s}\ (s \neq i+1),\ M_{i,i+1}[\perp]A^{n-1}N_{n-1}\ (i \leq n-1),\ M_{i,i+1} \cap M_{0,i+1}^{[\perp]} = \{0\}. \tag{18}$$

Построим эти подпространства при $n = k + 1$. Положим

$$M_k = \Big\{A^{-1}f + \sum_{i \leq k-1} f_{i,i+1},\ f \in N_{k-1},\ f_{i,i+1} \in M_{i,i+1}\Big\},$$

где элементы $f_{i,i+1}$ определяются из условий

$$\Big[A^{-1}f + \sum_{i \leq k-1} f_{i,i+1}, v\Big]_0 = 0 \quad \forall v \in M_{0,1} + M_{0,2} + \ldots + M_{0,k-1}.$$

В силу (18) нам достаточно иметь

$$[A^{-1}f + f_{i,i+1}, v]_0 = 0 \quad \forall v \in M_{0,i+1},\ i = 0, 1, \dots, k-1.$$

Пусть $\{v_i\}$ и $\{g_i\}$ — некоторые базисы в $M_{i,i+1}$ и $M_{0,i+1}$. Поскольку $M_{i,i+1} \cap M_{0,i+1}^{[\perp]} = \{0\}$, матрица $a_{i,j} = [v_i, g_j]_0$ невырожденна и элемент $f_{i,i+1}$ может быть найден в виде $f_{i,i+1} = \sum c_i v_i$. По построению $M_k[\perp]M_{0,i}$ для $0 \le i \le k-1$. Положим $N_k = M_k \cap M_0^{[\perp]}$ и представим M_k в виде прямой суммы $M_k = N_k + M_{k,k+1}$. По определению положим $M_{i,k+1} = A^{k-i}M_{k,k+1}$. Покажем, что $M_{k,k+1}[\perp]A^k N_k$. Каждый элемент $f_k \in N_k$ представим в виде $f_k = Af_{k+1}$, и мы имеем соответствующую цепочку $f_{k+1}, f_k, f_{k-1}, \dots, f_0$ $(Af_i = f_{i-1})$. Используя соотношения (14), (15) для этой цепочки и произвольной цепочки $\{v_i\}_{i=0}^k$ $(v_k \in M_{k,k+1})$, мы получим, что $[v_i, f_0]_0 = 0$ для каждого $i \le k$ и, таким образом, $M_{k,k+1}[\perp]A^k N_k$. Кроме того, $A^k(M_{k,k+1} + N_k) = A^{k-1}N_{k-1}$. Мы показали (16)–(18) для $n = k+1$. Описанная процедура состоит из конечного числа шагов, поскольку подпространство $L_0(A)$ конечномерно. В конце концов мы придем к ситуации, когда $M_s \cap M_0^{[\perp]} = \{0\}$. По построению $M_s[\perp]M_{0,i}$ для $i \le s-1$ и, таким образом, $M_s \cap (A^s M_s)^{[\perp]} = \{0\}$. Положим $M_{s,s+1} = M_s$ и $M_{i,s+1} = A^{s-i}M_s$. Получим множество подпространств $\{M_{i,j}\}$ такое, что

$$M = \sum_{i,j: i<j, j=1,2,\dots,s} M_{i,j}, \quad AM_{i,j} = M_{i-1,j},$$

$$M_{i,i+1}[\perp]M_{0,j+1}\ (i \ne j), \quad M_{i,i+1} \cap M_{0,i+1}^{[\perp]} = \{0\}, \tag{19}$$

где $i < j \le s+1$. Покажем, что

$$\text{подпространство } C = \mathrm{Lin}\{M_{i,j},\ i \le [(j-2)/2]\} \text{ нейтрально,} \tag{20}$$

т. е. $[u,u]_0 = 0$ $(\forall u \in C)$. Действительно, пусть $f \in M_{i,j}$ и $g_{l,r} \in M_{l,r}$, причем $i \le [(j-2)/2]$ и $l \le [(r-2)/2]$. Для определенности предположим, что $r \ge j$. В силу соотношений (14), (15) $[f,g]_0 = 0$ (у нас $i + l \le [(r-2)/2] + [(j-2)/2] \le 2[(r-2)/2] < r-1$).

Возьмем произвольную цепочку подпространств $\{M_{i,j}\}_{i=0}^{j-1}$ и покажем, что

$$M_{j-1-i,j} \cap M_{i,j}^{[\perp]} = \{0\}, \quad i \le [(j-1)/2]. \tag{21}$$

Пусть $f \in M_{j-1-i,j} \cap M_{i,j}^{[\perp]}$. Имеем $f = A^i f_1$ $(f_1 \in M_{j-1,j})$. Используя соотношения (14), (15), придем к равенствам

$$[f,v]_0 = [A^i f_1, v]_0 = [f_1, A^i v]_0 = 0 \quad \forall v \in M_{i,j}.$$

В силу (19) и равенства $A^i M_{i,j} = M_{0,j}$ мы заключаем, что $f_1 = 0$.

Из (14), (15) получим при $m > k$, что

$$M_{i,k}[\perp]M_{j,m} \tag{22}$$

в следующих случаях:

a) $i \le [(k-1)/2]$ и $i + j \le m-1$;

b) $i > [(k-1)/2]$ и $i + j \le [(k-1)/2] + [(m-1)/2]$.

Ввиду (21) для нечетного j подпространство $M_{[(j-1)/2,j]}$ невырождено. По теореме 6.4 в [18, гл. 1] имеем разложение $M_{[(j-1)/2,j]} = M^+_{[(j-1)/2,j]} + M^-_{[(j-1)/2,j]}$ в прямую сумму равномерно положительного и равномерно отрицательного подпространств. Положим

$$M^+ = \mathrm{Lin}\big\{M_{i,j},\ i \le [(j-2)/2];\ M^+_{[(j-1)/2],j},\ j \text{ нечетно}\big\}.$$

Очевидно, подпространство M^+ инвариантно относительно A. Покажем, что M^+ — максимальное неотрицательное подпространство. Предположим противное. Пусть существует элемент $\varphi \in M$ ($\varphi \notin M^+$) такой, что подпространство $\mathrm{Lin}\{\varphi, M^+\}$ также неотрицательно. Без ограничения общности можем считать, что элемент φ представим в виде

$$\varphi = \sum_{i,j:i>[(j-1)/2]} \varphi_{i,j} + \sum_{k=0}^{[(s-1)/2]} \varphi^-_{k,2k+1},$$

где $\varphi_{i,j} \in M_{i,j}$ и $\varphi_{k,2k+1} \in M^-_{k,2k+1}$. Пусть $\psi \in M^+$ обладает свойством $[\psi,\psi]_0 = 0$. Из неравенства Коши — Буняковского для неотрицательного линеала [18, гл. 1, предложения 1.16 и 1.17] получим $[\varphi,\psi]_0 = 0$. Предположим, что $\psi \in M_{0,j}$ с $j > 1$. Из (22) вытекает, что $[\varphi,\psi]_0 = [\varphi_{j-1,j},\psi]_0 = 0$. Тогда соотношения (21) гарантируют равенства $\varphi_{j-1,j} = 0$ для $j > 1$. Возьмем $\psi \in M_{1,j}$ с $j \ge 4$ (т. е. $1 \le [(j-2)/2]$). Используя (21) и (22), придем к соотношениям

$$M_{j-2,j} \cap M_{1,j} = \{0\}, \quad M_{1,j}[\perp]M_{l,j}\ (l < j-2), \quad M_{1,j}[\perp]M_{l,r}\ (l \le r-2,\ r \ne j).$$

Поскольку $j \ge 4$, подпространство $M_{1,j}$ нейтрально и равенство $[\varphi,\psi]_0 = 0$ влечет, что $[\varphi_{j-2,j},\psi]_0 = 0$. Тогда $\varphi_{j-2,j} = 0$. Сейчас предположим, что $j \ge 6$ и $\psi \in M_{2,j}$ (т. е. $2 \le [(j-2)/2]$). Используя вышеприведенные рассуждения, придем к равенству $\varphi_{j-3,j} = 0$ для $j \ge 6$. Повторяя рассуждения, мы можем заключить, что

$$\varphi_{j-i,j} = 0 \quad \forall i \le [(j-2)/2] \text{ и } j \le s.$$

Тогда

$$\varphi = \sum_{k=0}^{[(s-1)/2]} \varphi^-_{k,2k+1}.$$

Отметим, что (см. (22)) $\varphi^-_{k,2k+1}[\perp]\varphi^-_{l,2l+1}$ для $k \ne l$. Далее,

$$[\varphi,\varphi]_0 = \sum_{k=0}^{[(s-1)/2]} [\varphi^-_{k,2k+1}, \varphi^-_{k,2k+1}]_0 \ge 0.$$

По построению подпространств $M_{k,2k+1}$ имеем $\varphi^-_{k,2k+1} = 0$ для каждого k. Таким образом, $\varphi = 0$, и доказательство утверждения для линеала $L_0(A)$ завершено. Подпространство M^- может быть построено по аналогии. Например, мы можем положить

$$M^- = \mathrm{Lin}\{M_{i,j},\ i \le [(j-2)/2];\ M^-_{[(j-1)/2],j},\ j \text{ нечетно}\}.$$

По построению подпространства $M^\pm$ обладают свойством

$$M^\pm \in D(A^c), \quad A^c f = -Af \quad (\forall f \in M^\pm). \tag{23}$$

Используя лемму 4, найдем максимальные неотрицательное и неположительное подпространства $F^\pm_{0b}$ пространства F_{0b}, инвариантные относительно A, такие, что

$$F_{0b} = F^+_{0b} + F^-_{0b} \quad \text{(сумма прямая)}.$$

Рассмотрим $L_{\lambda_i}(A)$. По доказанному мы можем найти подпространства $M_i^{\pm}$, инвариантные относительно A, являющиеся максимальными неотрицательным и неположительным подпространствами $L_{\lambda_i}(A)$, инвариантными относительно $A|_{L_{\lambda_i}(A)}$, причем имеет место равенство (23). По следствию 2.18 в [18, гл. 2, § 2] $M_i^+[\perp]M_j^+$ при $i \neq j$ (и $M_i^-[\perp]M_j^-$ при $i \neq j$). Следовательно, подпространство $F_{0a}^+ = \mathrm{Lin}\{M_i^+,\ i = 1, 2, \dots, m\}$ — максимальное неотрицательное подпространство пространства F_{0a}, инвариантное относительно A. Соответственно подпространство $F_{0a}^- = \mathrm{Lin}\{M_i^-,\ i = 1, 2, \dots, m\}$ — максимальное неположительное подпространство пространства F_{0a}, инвариантное относительно A. Покажем, что $F_{0a}^{\pm}[\perp]F_{0b}$. Поскольку $R(P_\gamma) = \mathrm{Lin}\{L_{\lambda_i}(A),\ i = 1, 2, \dots, m\}$, $R(P_\gamma^c) = \mathrm{Lin}\{L_{\lambda_i}(A^c),\ i = 1, 2, \dots, m\}$ и $F_{0a}^{\pm} \subset R(P_\gamma) \cap R(P_\gamma^c)$, имеем $P_\gamma f = P_\gamma^c f$ для каждого $f \in F_{0a}^{\pm}$. Тогда

$$[x, y]_0 = \left[P_\gamma^c x, y\right]_0 = \left[P_\gamma^c x, (I - P_\gamma)y\right]_0 = 0,$$

где $x \in F_{0a}^{\pm}$ и $y \in F_{0b}$. Таким образом, $F_{0a}^{\pm}[\perp]F_{0b}$. Этот факт гарантирует, что подпространства

$$F^+ = F_{0b}^+ + F_{0a}^+, \quad F^- = F_{0b}^- + F_{0a}^-$$

суть максимальные неположительное и неотрицательное подпространства, инвариантные относительно A. Доказательство завершено.

Лемма 7. *При выполнении* (7) *операторы* $V^+ = E^+$, $V^- = E^-$ *осуществляют изоморфное отображение подпространств* F^+, F^- *на подпространства* F_0^+, F_0^- *соответственно.*

Утверждение вытекает из теорем 4.1 и 4.5 в [18, гл. 1, § 2].

Замечание 2. Пусть выполнено (7) и можно построить подпространства $F^{\pm}$ так, что $F^+ \cap F^- = \{0\}$. Тогда оператор $V = E^+P_0^+ + E^-P_0^-$, где $P_0^{\pm}$ — проекторы, отвечающие разложению $F_0 = F^+ + F^-$ в прямую сумму, осуществляет изоморфизм F_0 на себя и $(V^{\pm})^{-1} = V^{-1}|_{F_0^{\pm}}$. В теории переноса и кинетической теории оператор V^{-1} называется оператором альбедо (см., например, [5]).

2. Теоремы существования и единственности

Пусть u — решение уравнения (1), заданное на интервале $(0, \infty)$, из пространства $W_{\mathrm{loc}} = \{u \in L_2(0, T; H_1) : (Bu)_t \in L_2(0, T; H_1')$ для любого $T > 0\}$. Применяя проекторы $\widetilde{S}^*$, $I - \widetilde{S}^*$ к уравнению (1), придем к системе

$$LSu = \widetilde{S}f, \ \text{ т. е. } Su = L^{-1}\widetilde{S}^*f, \ \ B\frac{d}{dt}(I - S)u - L(I - S)u = (I - \widetilde{S}^*)f.$$

В силу свойств проектора $\widetilde{S}$ найдется $g \in F_{-1}$ такое, что $(I - \widetilde{S}^*)f = Bg$. Таким образом, уравнение (1) сведется к системе

$$Su = L^{-1}\widetilde{S}^*f, \quad \frac{d}{dt}v - Av = g, \quad v = (I - S)u. \tag{24}$$

Рассмотрим граничное условие

$$E^+u(0) = u_0^+. \tag{25}$$

Используя лемму 5 и теорию полугрупп (см. [23]), ограниченную на ∞ компоненту решения уравнения (24) (она убывает на ∞) из подпространства F_{0b}

можно записать в виде (при условии, что $g \in L_2(0,T;F_{-1})$, а это выполнено, если $f \in L_2(0,\infty;H_1'))$

$$u_1 = e^{A^+t}P^+(I-P_\gamma)u(0) + g_1(t), \tag{26}$$

$$g_1(t) = \int\limits_0^t e^{(t-\xi)A^+}P^+(I-P_\gamma)g(\xi)\,d\xi - \int\limits_t^\infty e^{(t-\xi)A^-}P^-(I-P_\gamma)g(\xi)\,d\xi.$$

Пусть $\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_s\} = \sigma(A)\cap i\mathbb{R}$ и $u^r_{i,j}$ $(r=1,2,\dots,s; i=1,\dots,N_r; j=0,1,\dots,p^r_i-1)$ — базис в $L_{\lambda_r}(A)$, состоящий из цепочек с.п.э. оператора A, отвечающих собственному значению $\lambda_r \in \sigma(A)\cap i\mathbb{R}$. Без ограничения общности можем считать, что $u^r_{i,j} \in F^+_{0a}$ при $i < \big[(p^r_i-2)/2\big]$, $u^r_{i,j} \in F^+_{0a}$ или $u^r_{i,j} \in F^-_{0a}$ при $i = [(p^r_i-1)/2]$ и p^r_i нечетно, где $F^\pm_{0a}$ — подпространства, построенные в конце доказательства леммы 6. Тогда компонента решения (24) из подпространства F_{0a} [26] записывается в виде

$$u_2 = \sum_{r,k,j} c^r_{k,j}\tilde{u}^r_{k,j}(t) + g_2(t) = \tilde{u}_2 + g_2(t), \tag{27}$$

где

$$\tilde{u}^r_{k,j} = \sum_{l=0}^{j} e^{\lambda_r t}u^r_{k,j-l}\frac{t^l}{l!}, \quad k=1,2,\dots,N_r,\ j=0,1,\dots,p^r_k-1,$$

$$g_2(t) = -\sum_{r=1}^{s}\sum_{i=1}^{N_r}\sum_{k=0}^{p^r_i-1}\left(\int\limits_t^\infty \sum_{j=k}^{p^r_i-1} e^{\lambda_r(t-\tau)}g^r_{i,j}(\tau)\frac{(t-\tau)^{j-k}}{(j-k)!}\,d\tau\right)u^r_{i,k}$$

и $g^r_{i,j}(\tau)$ — коэффициенты разложения $P_\gamma g(t)$ по базису $u^r_{i,j}$.

Исследуем свойства решений $u_1(t)$, $u_2(t)$, предполагая, что условие (7) выполнено. Теория полугрупп, вообще говоря, не дает точных результатов. Мы будем использовать результаты Гривара (см. [27] и библиографию в ней). Рассмотрим оператор $A: F_0 \to F_0$ и положим $D(A^k) = W_{2k}$ $(k=0,1,\dots)$. При целых $k<0$ определим пространства W_{2k} как пополнение F_0 по нормам $\|u\|_{W_{2k}} = \|(A-\lambda I)^{-k}u\|_{F_0}$ $(\lambda \in \rho(A))$. Рассмотрим оператор A как неограниченный оператор в F_{-1} со значениями в F_{-1} и областью определения F_1. Аналогично определим пространства W_{2k-1} для целых k. В частности, при $k>0$

$$W_{2k-1} = D(A^k) = \{u \in F_{-1} : A^l u \in F_{-1} \text{ для всех } l \le k\}.$$

Фиксируем целое $k>0$ и положим $\widetilde{B}^s = (W_{2k}, W_{-2k})_{\theta,2}$ $((1-\theta)2k - 2k\theta = s,\ -2k < s < 2k)$. Аналогично положим $B^s = (W_{2k-1}, W_{-2k+1})_{\theta,2}$ $((1-\theta)(2k-1)-(2k-1)\theta = s,\ -2k+1 < s < 2k-1)$. Эти пространства и их свойства приведены в [28, § 5]. Определение Гривара немного отличается от нашего, но в результате получим те же пространства.

Доказательство следующей леммы использует свойства пространств B^s и $\widetilde{B}^s$, приведенные в [28, § 5]. Мы его опустим.

Лемма 8. *При выполнении* (7) *интерполяционные шкалы* B^s *и* $\widetilde{B}^s$ *совпадают. Тогда* $B^s = W_s$ *при четных* s. *Если дополнительно*

$$(D(A), F_0)_{1/2,2} = F_1, \tag{28}$$

то $B^s = W_s$ *при нечетных* s.

Отметим, что (28) всегда выполнено, если оператор A J-самосопряжен в F_0.

Лемма 9. *Пусть выполнено условие* (7), $g(t) \in L_2(0,\infty;B^s)$ $(s \in \mathbb{R})$, $P^+(I-P_\gamma)u(0) \in B^{s+1}$. *Тогда компонента решения* $u_1(t)$ *обладает свойством*

$$u_1(t) \in L_2(0,\infty;B^{s+2}), \quad u_{1t} \in L_2(0,\infty;B^s), \quad u_1(t) \in C([0,\infty);B^{s+1}).$$

Доказательство вытекает из результатов работы [27] и леммы 7.

Будем искать решение задачи (1), (25) из пространства $W_{\rm loc}$, убывающее на ∞ или ограниченное на ∞. Поясним, что мы имеем в виду. Из вышеприведенных рассуждений вытекает, что решение представимо в виде трех компонент $u = u_1(t) + u_2(t) + Su(t)$. Если $f(t) \in L_2(0,\infty;H_1')$, легко увидеть, что $g(t) \in L_2(0,\infty;F_{-1})$. Если также $P^+(I-P_\gamma)u(0) \in F_0$, то из леммы 9 при $s=-1$, получим вложение $u_1(t) \in L_2(0,\infty;F_1)$ (и, следовательно, $u_1(t) \in L_2(0,\infty;H_1)$) и $u_{1t} \in L_2(0,\infty;F_{-1})$. Из теорем о следах (см., например, [21, пп 1.8.3, 1.8.5]) имеем $u_1(t) \in C([0,\infty);F_0)$, т. е. $|B|^{1/2}u_1 \in C([0,\infty);E)$. Более того, из формулы Ньютона — Лейбница, примененной к функции $\||B|^{1/2}u_1(t)\|^2$, вытекает, что существует

$$\lim_{t\to\infty} \||B|^{1/2}u_1(t)\| = 0.$$

Кроме того, ограниченная на ∞ (в том смысле, что $\||B|^{1/2}u_1(t)\| \in L_\infty(0,\infty)$) компонента решения u_1 из подпространства F_{0b} всегда представима в виде (26). Компонента решения $Su(t)$ принадлежит $\ker B$ при почти всех $t \in (0,\infty)$ и обладает свойствами: если $f(t) \in L_\infty(0,\infty;H_1')$ (или хотя бы $\widetilde{S}^*f(t) \in L_\infty(0,\infty;H_1')$), то $Su(t) \in L_\infty(0,\infty;H_1)$; если $f(t) \in L_2(0,\infty;H_1')$ (или хотя бы $\widetilde{S}^*f(t) \in L_2(0,\infty;H_1')$), то $Su(t) \in L_2(0,\infty;H_1)$. Компонента решения $u_2(t)$ растет полиномиальным образом при $t \to \infty$ и представима в виде суммы функций, первая из которых принадлежит $C^\infty([0,\infty);H_1)$, дифференциальные свойства второй определяются свойствами функции $f(t)$: если $f(t) \in L_2(0,\infty;H_1')$ и $P_\gamma g(t)(1+t)^l \in L_1(0,\infty;H_1')$ $(l = \max\limits_{i,r} p_i^r - 1)$, то функция $g_2(t)$ в (27) принадлежит $C([0,\infty);H_1)$, $\max\limits_{t>0} \|g_2(t)\|_{H_1} < \infty$, $g_2 \in L_{2,\rm loc}(0,\infty;H_1)$ и $g_{2t} \in L_2(0,\infty;H_1)$; если дополнительно $P_\gamma g(t)(t+1)^{l+\varepsilon} \in L_1(0,\infty;H_1')$ $(\varepsilon > 1/2)$, то $\|g_2(t)\|_{H_1} \to 0$ при $t \to \infty$ и $g_2 \in L_2(0,\infty;H_1)$; если $\varepsilon > 0$, то $\|g_2(t)\|_{H_1} \to 0$ при $t \to \infty$.

Под убывающим на ∞ решением задачи (1), (25) мы понимаем решение $u(t) = u_1 + u_2 + Su$ из класса $W_{\rm loc}$ такое, что функция $Su(t) \in L_2(0,\infty;H_1)$ и существует $\lim\limits_{t\to\infty} \||B|^{1/2}(u_1(t)+u_2(t))\| = 0$.

Под ограниченным на ∞ решением задачи (1), (25) мы понимаем решение $u(t) = u_1 + u_2 + Su$ из класса $W_{\rm loc}$ такое, что $Su(t) \in L_\infty(0,\infty;H_1)$ и $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \||B|^{1/2}(u_1(t)+u_2(t))\| < \infty$.

Положим $M_0 = {\rm Lin}\{\ker(A-\lambda_i I),\ i=1,\dots,s\}$, $l_0 = \dim M_0$, $l_1 = \dim F_{0a}^+$, $g_0(t) = g_1(t) + g_2(t)$.

Теорема. *Пусть выполнены* (7) *и* (28). *Для того чтобы для данного элемента* $u_0^+ \in F_0^+$ *и данной правой части* f *такой, что* $f \in L_2(0,\infty;H_1')$, $P_\gamma g(t)(1+t)^{l+\varepsilon} \in L_1(0,\infty;H_1')$ $((I-\widetilde{S}^*)f = Bg,\ l = \max\limits_{1\le r\le s, 1\le i\le N_r;}(p_i^r-1), \varepsilon > 0)$ *существовало решение задачи* (1), (25) *из пространства* $W_{\rm loc}$, *убывающее на* ∞, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$P_\gamma(V^+)^{-1}E^+(u_0^+ - g_0(0)) = 0.$$

В этом случае $\tilde{u}_2(t) = 0$.

Для того чтобы для данного элемента $u_0^+ \in F_0^+$ *и данной правой части* f *такой, что* $(I-\widetilde{S}^*)f \in L_2(0,\infty;H_1')$, $P_\gamma g(t)(1+t)^l \in L_1(0,\infty;H_1')$ $((I-\widetilde{S}^*)f =$

Bg, $l = \max\limits_{1\le r\le s, 1\le i\le N_r}(p_i^r - 1))$ и $\widetilde{S}^* f \in L_\infty(0,\infty; H_1')$ существовало решение задачи (1), (25) из пространства W_{loc}, ограниченное на ∞, необходимо и достаточно, чтобы

$$P_\gamma(V^+)^{-1}E^+(u_0^+ - g_0(0)) \in P_\gamma(V^+)^{-1}E^+M_0. \tag{29}$$

Задача о существовании ограниченного решения безусловно разрешима тогда и только тогда, когда отображение $P_\gamma(V^+)^{-1}E^+ : M_0 \to F_{0a}^+$ — отображение «на». Ограниченное решение единственно тогда и только тогда, когда $\ker P_\gamma(V^+)^{-1}E^+ = \{0\}$. В частности, решение всегда существует для любых данных задачи, если длины цепочек с.п.э., соответствующих мнимым собственным значениям, не превышают 2. Единственность этого решения имеет место, например, в случае $M_0 = F_{0a}^+$.

Доказательство. Пусть $u(t)$ — убывающее на ∞ решение задачи (1), (25). Имеем $u(t) = u_1(t) + u_2(t) + Su$, где свойства функций u_i $(i = 1, 2)$ описаны выше, перед теоремой. По условию $E^+(u(0)) = E^+(u_1(0) + u_2(0)) = u_0^+$. Запишем элемент $u^0 = u_1(0) + u_2(0)$ в виде

$$u^0 = u_2^+ + u_2^- + u_1^+ + g_0(0), \quad u_2^+ \in F_{0a}^+, \quad u_2^- \in (F_{0a}^+)^\perp \cap F_{0a}, \ u_1^+ \in F_{0b}^+.$$

Тогда начальное условие запишется в виде $E^+(u_2^+ + u_1^+) = E^+(u_0^+ - g_0(0) - u_2^-)$ или в виде

$$u_2^+ + u_1^+ = (V^+)^{-1}E^+(u_0^+ - g_0(0) - u_2^-).$$

Применяя операторы P_γ, $(I - P_\gamma)$ к этому равенству, придем к соотношениям

$$u_1^+ = (I - P_\gamma)(V^+)^{-1}E^+(u_0^+ - g_0(0) - u_2^-), \tag{30}$$

$$P_\gamma(V^+)^{-1}E^+(u_2^+ + u_2^-) = P_\gamma(V^+)^{-1}E^+(u_0^+ - g_0(0)). \tag{31}$$

Из убывания решения u и линейной независимости полиномов $\tilde{u}_{i,j}^r(t)$ вытекает, что $\tilde{u}_2(t) = 0$. Тогда из (31) получим $P_\gamma(V^+)^{-1}E^+(u_0^+ - g_0(0)) = 0$. Если это условие выполнено, то, полагая $\tilde{u}_2 = 0$ и определяя затем элемент u_1^+ из (30), найдем и функцию $u_1(t)$ в соответствии с (26).

Пусть $u(t)$ — ограниченное на ∞ решение. Аналогично придем к соотношениям (30), (31). Однако решение $u_2(t)$ будет ограниченным на ∞ тогда и только тогда, когда $u_2^+ + u_2^- \in M_0$. Это вместе соотношениями (30), (31) и рассуждениями, приведенными перед теоремой, гарантирует вторую часть утверждения.

Если длина цепочек с.п.э., соответствующих мнимым собственным значениям, не превышает 2, то $F_{0a}^+ \subset M_0$ (по построению). В этом случае, взяв произвольный элемент u_2^- с вышеуказанными свойствами, определяя элемент $u_2^+ = P_\gamma(V^+)^{-1}E^+(u_0^+ - g_0(0) - u_2^-)$ и пользуясь первым из соотношений (30), мы полностью находим решение из (26), (27). В случае $M_0 = F_{0a}^+$ элемент u_2^- всегда равен нулю.

Замечание 3. В силу максимальности различные подпространства F_{0a}^+ имеют одинаковую размерность [18, гл. 1, § 4] и возникающие в теореме условия ортогональности на самом деле не зависят от способа построения подпространства F_{0a}^+ и соответственно оператора V^+. Это вытекает из утверждения теоремы. Отметим также, что мера неединственности ограниченного решения задачи (1), (25) равна величине $l_0 - l_1$.

Замечание 4. Аналогично исследуются и другие возможные постановки краевых задач для уравнения (1). Представления решений, приведенные выше, позволяют исследовать также вопрос о гладкости решений краевых задач. Однако отметим, операторы V^+ и V^- (соответственно оператор альбедо V^{-1}), являющиеся изоморфизмами соответствующих подпространств пространства $B^0 = F_0$ (пространства F_0), не являются изоморфизмами соответствующих подпространств пространств B^s при всех s. В общем случае это выполнено лишь в некоторой окрестности точки $s = 0$.

Пример. Система уравнений, описывающих многогрупповой перенос нейтронов, при некоторых предположениях имеет вид [29]

$$xu_t(x,t) = -Au(x,t) + \frac{1}{2}C\int\limits_{-1}^{1} u(y,t)\,dy + f(x,t), \quad x \in (-1,1),\ t \in (0,\infty),$$

где $u(x,t) = (u_1(x,t),\dots,u_n(x,t))^T$, матрица $A = \operatorname{diag}\{a_1,\dots,a_n\}$ с $a_i > 0$ $i = 1,\dots,n$, а матрица $(A - C)$ обладает свойством $(A - C) + (A - C)^* \geq 0$ (причем $\ker(A - C) \neq \{0\}$). Пусть

$$E = \bigotimes_{i=1}^{n} L_2(-1,1).$$

Определим операторы

$$Bu(x) = xu(x), \quad Lu(x) = -Au(x) + \frac{1}{2}C\int\limits_{-1}^{1} u(y)\,dy.$$

Тогда $\ker B = \{0\}$ и

$$\ker L = \{u(x) = v \mid (A - C)v = 0\},$$

$$L_0 = \{u(x) = v - xA^{-1}w \mid (A - C)v = (A - C)w = 0\}.$$

Все необходимые предположения выполнены, причем в этом случае длины цепочек с.п.э., соответствующих $\lambda = 0$, равны 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Beals R.* An abstract treatment of some forward-backward problems of transport and scattering // J. Funct. Anal. 1979. V. 34, N 1. P. 1–20.
2. *Case K. M., Zweifel P. F.* Linear transport theory. Mass.: Addison-Wesley, 1969.
3. *Cercignani C.* Mathematical methods in kinetic theory. New York: Pergamon Press, 1969.
4. *Cercignani C.* Theory and Applications of the Boltzmann Equation. New York: Elsevier, 1975.
5. *Greenberg W., Van der Mee C. V. M., Zweifel P. F.* Generalized kinetic equations // Integral Equations Operator Theory. 1984. V. 7, N 1. P. 60–95.
6. *Greenberg W., Van der Mee C. V. M., Protopopescu V.* Boundary value problems in abstract kinetic theory. Basel: Birkhäuser, 1987.
7. *Kaper H. G., Lekkerkerker C. G., Hejtmanek J.* Spectral methods in linear transport theory. Basel; Boston; Stuttgart: Birkhauser Verl., 1982.
8. *Latrach K., Mokhtar-Kharroubi M.* Spectral analysis and generation results for streaming operator with multiplying boundary conditions // Positivity. 1999. V. 3, N 2. P. 273–296.
9. *Van der Mee C. V. M.* Semigroups and factorization methods in transport theory. Amsterdam: Math. Centre Tract., 1981. V. 146.
10. *Latrach K.* Compactness properties for linear transport operator with abstract boundary conditions in slab geometry // Transport Theory Statist. Phys. 1993. V. 22. P. 39–65.
11. *Latrach K., Mokhtar-Kharroubi M.* On an unbounded linear operator arising in the theory of growing cell population // J. Math. Anal. Appl. 1997. V. 211. P. 273–294.

12. *Webb G.* A model of proliferating cell population with inherited cycle length // J. Math. Biol. 1986. V. 23. P. 269–282.

13. *Кислов Н. В.* Неоднородные краевые задачи для дифференциально-операторного уравнения смешанного типа и их приложения // Мат. сб. 1984. Т. 125, № 1. С. 19–37.

14. *Пятков С. Г.* Свойства собственных функций одной спектральной задачи и некоторые их приложения // Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики. Новосибирск, 1986. С. 65–84.

15. *Egorov I. E.* On smoothness of a solution to a nonlocal boundary value problem for an operator-differential equation with variable time direction // Мат. заметки ЯГУ. 1995. V. 2, N 1. P. 98–104.

16. *Egorov I. E.* Solvability of a nonlocal boundary value problem for an operator-differential equation of mixed type // Мат. заметки ЯГУ. 1995. V. 2, N 2. P. 61–72.

17. *Пятков С. Г., Абашеева Н. Л.* Разрешимость краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 6. С. 1419–1435.

18. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М.: Наука, 1986.

19. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, № 2. С. 43–118.

20. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.

21. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.

22. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.

23. *Grisvard P.* An approach to the singular solutions of elliptic equations via the theory of differential equations in Banach spaces. // Differential Equations in Banach Spaces. Lect. Notes in Math. 1986. V. 1223. P. 131–155.

24. *Пятков С. Г.* Базисность по Риссу собственных и присоединенных элементов линейных самосопряженных пучков // Мат. сб. 1994. Т. 185, № 3. С. 93–116.

25. *Dore G., Venni A.* Separation of two (possibly unbounded) components of the spectrum of a linear operator // Integral Equations Operator theory. 1989. V. 12, N 4. P. 470–485.

26. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.

27. *Da Prato G., Grisvard P.* Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationelles // J. Math. Pures Appl. Ser IX. 1975. V. 54, N 3. P. 305–387.

28. *Grisvard P.* Commutative de deux foncteurs d'interpolation et applications // J. Math. Pures et Appliq. 1966. V. 45, N 2. P. 144–206.

29. *Greenberg W.* Functional calculus for the symmetric multigroup transport operator // J. Math. Phys. 1976. V. 17. P. 159–162.

Статья поступила 18 февраля 2000 г.

Пятков Сергей Григорьевич, Абашеева Нина Леонидовна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
pyatkov@math.nsc.ru, anl@math.nsc.ru