Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2002. Том 43, № 3

УДК 517.26

ОБ АСИМПТОТИКЕ ТОЧЕК СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КОНЕЧНО–РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Ю. Г. Никоноров

Аннотация: Доказаны некоторые асимптотические оценки для точек среднего значения конечно-разностных операторов n-кратного дифференцирования. Библиогр. 3.

Работы [1, 2] посвящены доказательству гипотез В. К. Ионина об асимптотике точек среднего значения в первой интегральной теореме о среднем значении и в формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Здесь предлагается исследование поведения точек среднего значения для конечно-разностных операторов n-кратного дифференцирования. Исходным моментом постановки задачи послужило следующее

Предложение. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[0,1]$ и имеет n-ю производную на интервале $(0,1)$. Тогда для любого $x \in (0,1/n)$ существует $\xi \in (0,nx)$ такое, что*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f(kx) = x^n f^{(n)}(\xi).$$

Доказательство. Рассмотрим интерполяционный многочлен Лагранжа L, принимающий в точках $x_1 = x$, $x_2 = 2x, \dots, x_n = nx$ те же значения, что и функция f. Тогда

$$L(t) = \sum_{k=1}^{n} f(kx) l_k(t),$$

где

$$l_k(t) = \frac{(t-x_1)\dots(t-x_{k-1})(t-x_{k+1})\dots(t-x_n)}{(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}.$$

Для любой точки $t \in [0,1]$, отличной от узлов интерполяции, верна интерполяционная формула Лагранжа с остаточным членом [3]

$$f(t) = L(t) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(t-x_1)(t-x_2)\dots(t-x_n),$$

где ξ лежит в интервале (a,b) таком, что отрезок $[a,b]$ содержит все x_i и t. Если $t=0$, то $\xi \in (0,nx)$ и после упрощений получим формулу

$$f(0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1} n!}{k(k-1)\dots 1(-1)\dots(k-n)} f(kx) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(-1)^n n! x^n.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 99–01–00543, 00–15–96165, 01–01–06224).

Пользуясь тем, что $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, приходим к утверждению предложения. $\square$

Заметим, что выражение

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k f(kx)}{x^n}$$

можно интерпретировать как значение конечно-разностного оператора n-кратного дифференцирования на функции f.

Обозначим через $\xi(x)$ верхнюю грань чисел ξ из формулировки предложения на интервале $(0, nx)$. Поставим перед собой задачу исследовать асимптотическое поведение полученной функции при условии на рост в точке 0 функции f.

Нас в первую очередь будет интересовать величина

$$T_n(f) = \varlimsup_{x\to 0}\frac{\xi(x)}{x}. \tag{1}$$

Далее мы докажем, что величина (1) имеет общую нетривиальную оценку снизу для всех функций, имеющих производную порядка n в точке 0.

Отметим, что функции ξ, построенные по функциям f и $f+P$, где P — многочлен степени n, совпадают. Учитывая это замечание, мы можем считать, что все (существующие) производные функции f до порядка n в точке 0 равны нулю. Далее мы найдем точные оценки снизу величины (1) для классов функций, удовлетворяющих условиям $f(x) = O(x^{n+\alpha})$ $(\alpha > -1)$ или $f^{(n)}(x) = O(x^\alpha)$, $\alpha \in (-n, \infty)$ при $x \to 0$.

Предварительно введем некоторую шкалу, полезную нам в дальнейшем. Через K_n будем обозначать стандартный единичный n-мерный куб, через $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ — его элементы.

Определим функцию $q_n : (-n, \infty) \to \mathbb{R}$, положив

$$q_n(0) = \exp\biggl(\int\limits_{K_n}\ln(y_1 + y_2 + \dots + y_n)\,dy\biggr)$$

и

$$q_n(\alpha) = \biggl(\int\limits_{K_n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n)^\alpha\,dy\biggr)^{1/\alpha}$$

при $\alpha \ne 0$. Определенная таким образом функция q_n обладает рядом свойств, которые мы докажем в следующей лемме.

Лемма 1. *Функция q_n непрерывна и возрастает на области определения, $q_n(\alpha) \to n$ при $\alpha \to \infty$ и $q_n(\alpha) \to 0$ при $\alpha \to -n$.*

Доказательство. Непрерывность функции q_n очевидна. Покажем, что она возрастает. При $0 < \alpha < \beta$, используя неравенство Гёльдера, получаем

$$\int\limits_{K_n}(y_1{+}y_2{+}\dots{+}y_n)^\alpha\,dy < \biggl(\int\limits_{K_n}((y_1{+}y_2{+}\dots{+}y_n)^\alpha)^{\beta/\alpha}\,dy\biggr)^{\alpha/\beta}\biggl(\int\limits_{K_n}1\,dy\biggr)^{(\beta-\alpha)/\alpha}$$
$$= \biggl(\int\limits_{K_n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n)^\beta\,dy\biggr)^{\alpha/\beta}.$$

Поэтому $q_n(\alpha) < q_n(\beta)$. При $\beta < \alpha < 0$ можно записать ту же цепочку неравенств, но так как $\alpha < 0$, то в этом случае $q_n(\beta) < q_n(\alpha)$. Учитывая непрерывность рассматриваемой функции в нуле, приходим к выводу, что она возрастает на области определения.

Заметим, что $q_n(\alpha)$ является L_α-нормой функции $g(y_1,\dots,y_n)=y_1+\dots+y_n$, поэтому $q_n(\alpha)\to\|g\|_{L_\infty}$ при $\alpha\to\infty$, а $\|g\|_{L_\infty}=n$. Нетрудно также показать, что при $\alpha=-n$ интеграл $\int\limits_{K_n}(y_1+y_2+\dots+y_n)^{-\alpha}\,dy$ расходится и, следовательно, $q_n(\alpha)\to 0$ при $\alpha\to -n$, что и требовалось. □

Вычисляя нужные интегралы, можно получить выражение

$$q_n(\alpha)=\left(\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k k^{n+\alpha}}{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}\right)^{1/\alpha}. \tag{2}$$

Оно определено при $\alpha\neq 0,-1,-2,\dots,-(n-1)$. Пользуясь непрерывностью функции q_n в указанных особых точках, получаем следующие формулы:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k k^n=n!,\quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k k^l=0\quad \text{при } l=1,\dots,n-1.$$

Устремляя α к нулю, приходим к новому выражению для $q_n(0)$:

$$q_n(0)=\exp\left(\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k k^n\ln k-\left(1+\frac12+\dots+\frac1n\right)\right). \tag{3}$$

Степенные функции играют в наших рассуждениях ключевую роль. Это связано с тем, что функция ξ, построенная для степенной функции, постоянна. Действительно, пусть $f_\alpha(x)=x^{n+\alpha}$ ($\alpha\neq 0$), тогда, привлекая равенство (2), получаем, что $\xi=q_n(\alpha)x$ удовлетворяет условию вышеприведенного предложения (в особых точках можно воспользоваться предельным переходом). Также представляет интерес функция

$$f_0(x)=\frac{1}{n!}\int\limits_0^x n(x-t)^{n-1}\ln t\,dt=\frac{x^n}{n!}\int\limits_0^1 n(1-\tau)^{n-1}\ln(x\tau)\,d\tau.$$

Она является n-кратной первообразной функции $g(x)=\ln x$. Можно проверить, что для нее $\xi(x)=q_n(0)x$. Для этого достаточно заметить, что

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k k^n=n!,\qquad \int\limits_0^1 n(1-t)^{n-1}\ln t\,dt=1+\frac12+\dots+\frac1n,$$

и использовать формулу (3).

Сформулируем основные результаты.

Теорема 1. *Пусть непрерывная на отрезке $[0,1]$ функция f имеет на интервале $(0,1)$ непрерывную производную порядка n, удовлетворяющую условию $f^{(n)}(x)=O(x^\alpha)$ при $x\to 0$ ($\alpha>-n$). Тогда $T_n(f)\geq q_n(\alpha)$.*

В случае $\alpha>-1$ утверждение теоремы 1 можно усилить.

Теорема 2. *Пусть функция f имеет $(n-1)$-ю производную на отрезке $[0,1]$ и n-ю производную на интервале $(0,1)$ и удовлетворяет условию $f(x)=O(x^{n+\alpha})$ при $x\to 0$ ($\alpha>-1$), тогда $T_n(f)\geq q_n(\alpha)$.*

Как следствие из теоремы 2 получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть функция f имеет n-ю производную на отрезке $[0,1]$. Тогда $T_n(f)\geq q_n(0)$.*

Отметим, что приведенные в теоремах оценки неулучшаемы. Это следует из непосредственного вычисления указанной величины для степенных функций. Доказательство сформулированных теорем опирается на следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть непрерывная на отрезке* $[0,1]$ *функция* h *удовлетворяет на некотором интервале* $(0,a)$ *неравенству*

$$\int\limits_{K_n} h(x(y_1+y_2+\cdots+y_n))\,dy < h(px)$$

для всех $q_0 \le p \le n$. *Тогда если* $h(x) = o(x^\alpha)$ $(\alpha \ne 0)$ *при* $x \to 0$, *то* $q_0 \ge q_n(\alpha)$.

Доказательство будем вести от противного. Предположим, что $q_0 < q_n(\alpha)$. Тогда неравенство в условии леммы обязано выполняться при $p = q_n(\alpha)$ и $p = n$. Разберем отдельно случаи $\alpha < 0$ и $\alpha > 0$.

Пусть $\alpha < 0$. Положим $\varepsilon_0 = \min h(x)$ на отрезке $[q_n(\alpha)a, na]$ и докажем, что найдется $x_0 \in (0, q_n(\alpha)a)$, в которой $h(x_0) < \varepsilon_0$. Действительно, если такой точки не существует, то, очевидно, найдется точка nx_1 $(x_1 < a)$ такая, что для всех $t \in (0, nx_1)$ выполняется неравенство $h(t) \ge h(nx_1)$. Следовательно, для всех $y \in K_n$ справедливо неравенство $h(x_1(y_1+\cdots+y_n)) \ge h(nx_1)$, интегрируя которое, получаем

$$\int\limits_{K_n} h(x_1(y_1+y_2+\cdots+y_n))\,dy \ge h(nx_1),$$

чего не может быть. Выберем теперь ε_1 такое, что $h(x_0) < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$. После этого подберем такое $\varepsilon_2 > 0$, что выполняется неравенство $h(x_0) - \varepsilon_1 + \varepsilon_2 x_0^\alpha < 0$. Тогда функция, определяемая формулой

$$h_0(x) = h(x) - \varepsilon_1 + \varepsilon_2 x^\alpha,$$

положительна на отрезке $[q_n(\alpha)a, na]$ и $h_0(x_0) < 0$. Так как

$$\int\limits_{K_n} (x(y_1+y_2+\cdots+y_n))^\alpha\,dy = (q_n(\alpha)x)^\alpha,$$

то для $x \in (0,a)$

$$\int\limits_{K_n} h_0(x(y_1+y_2+\cdots+y_n))\,dy < h_0(q_n(\alpha)x).$$

Однако $h_0(x) \to +\infty$ при $x \to 0$. Это следует из того, что $h(x) = o(x^\alpha)$ и $\alpha < 0$. Поэтому функция h_0 достигает своего минимального значения на промежутке $(0, na]$ в некоторой точке вида $q_n(\alpha)x_*$ $(x_* < a)$, так как h_0 положительна на отрезке $[q_n(\alpha)a, na]$ и принимает отрицательное значение в точке x_0. Значит, для всех $y \in K_n$ справедливо неравенство $h(x_*(y_1+\cdots+y_n)) \ge h(q_n(\alpha)x_*)$, интегрируя которое, имеем

$$\int\limits_{K_n} h(x_*(y_1+\cdots+y_n))\,dy \ge h(q_n(\alpha)x_*),$$

что невозможно. Полученное противоречие и доказывает первую часть леммы.

Пусть теперь $\alpha > 0$. Так как $h(x) \to 0$ при $x \to 0$, то функция h положительна на промежутке $(0, na]$. В противном случае существует точка nx_1 $(x_1 < a)$ такая, что для всех $t \in (0, nx_1)$ справедливо неравенство $h(t) \ge h(nx_1)$.

Таким образом, как и в первой части доказательства, получаем неверное неравенство

$$\int\limits_{K_n} h(x_1(y_1 + y_2 + \cdots + y_n))\,dy \geq h(nx_1).$$

Выберем теперь такое $\varepsilon > 0$, что функция $h_0(x) = h(x) - \varepsilon x^\alpha$ положительна на отрезке $[q_n(\alpha)a, na]$. Поскольку

$$\int\limits_{K_n} (x(y_1 + y_2 + \cdots + y_n))^\alpha\,dy = (q_n(\alpha)x)^\alpha,$$

то для $x \in (0, a)$

$$\int\limits_{K_n} h_0(x(y_1 + y_2 + \cdots + y_n))\,dy < h_0(q_n(\alpha)x).$$

Если функция h_0 принимает отрицательные значения на промежутке $(0, na]$, то она достигает своего минимального значения на этом промежутке в некоторой точке вида $q_n(\alpha)x_*$ $(x_* < a)$ в силу того, что h_0 положительна на отрезке $[q_n(\alpha)a, na]$. Значит, для всех $y \in K_n$ справедливо неравенство $h(x_*(y_1 + \cdots + y_n)) \geq h(q_n(\alpha)x_*)$, проинтегрировав которое, приходим к неравенству

$$\int\limits_{K_n} h(x_*(y_1 + \cdots + y_n))\,dy \geq h(q_n(\alpha)x_*),$$

что невозможно. Таким образом, h_0 неотрицательна в некоторой окрестности нуля, т. е. $h(x) - \varepsilon x^\alpha \geq 0$. Это неравенство противоречит условию $h(x) = o(x^\alpha)$ при $x \to 0$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. $\square$

Замечание. Условие $\alpha \neq 0$ в лемме несущественно. Более того, тем же способом можно показать, что если в условиях леммы $h(x) = o(\ln x)$ при $x \to 0$, то $q_0 \geq q_n(0)$.

Доказательство теоремы 1. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда, используя непрерывность функции $f^{(n)}$, а также непрерывность и возрастание функции q_n, и заменяя при необходимости f на $-f$, можно утверждать, что существуют $\beta < \alpha$ и $a > 0$ такие, что для всех $p \in [q_n(\beta), n]$ и $x \in (0, a]$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f(kx) < x^n f^{(n)}(px).$$

Непосредственным интегрированием можно убедиться в том, что

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f(kx) = \int\limits_{K_n} f^{(n)}(x(y_1 + \cdots + y_n))\,dy.$$

Интегрируемость функции $f^{(n)}(x(y_1 + \cdots + y_n))$ следует из условий теоремы. Таким образом для всех $p \in [q_n(\beta), n]$ и $x \in (0, a]$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{K_n} f^{(n)}(x(y_1 + \cdots + y_n))\,dy < x^n f^{(n)}(px).$$

Положим $h = f^{(n)}$ и выберем $\beta_1 \neq 0$, лежащее между β и α. Из условий теоремы вытекает, что $h(x) = o(x^{\beta_1})$. Привлекая лемму 2, получаем неравенство $q_n(\beta) \geq q_n(\beta_1)$, которое противоречит возрастанию функции q_n. Теорема доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2. Допустим, что утверждение теоремы неверно. Тогда, используя непрерывность функции f, теорему Дарбу о промежуточных значениях производной применительно к $f^{(n)}$, а также непрерывность и возрастание функции q_n, и заменяя при необходимости f на $-f$, можно убедиться в том, что существуют $\beta < \alpha$ и $a > 0$ такие, что для всех $p \in [q_n(\beta), n]$ и $x \in (0, a]$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f(kx) < x^n f^{(n)}(px).$$

Если бы у нас были в наличии непрерывность и соответствующее условие на рост в нуле функции $f^{(n)}$, то мы бы завершили доказательство, как доказательство предыдущей теоремы. Здесь же поступим несколько иначе. Рассмотрим функцию g, являющуюся n-кратной первообразной функции $f(x)/x^n$ и удовлетворяющую условию $g(0) = g'(0) = \dots = g^{(n-1)}(0) = 0$. Для произвольного $p \in [q_n(\beta), n]$ определим функцию F следующим образом:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k g(kx) - x^n g^{(n)}(px) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k g(kx) - \frac{f(px)}{p^n}.$$

Очевидно, что $F(0) = F'(0) = \dots = F^{(n-1)}(0) = 0$. Для этого достаточно заметить, что $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$. Кроме того,

$$F^{(n)}(x) = \frac{1}{x^n} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f(kx) - x^n f^{(n)}(px) \right) < 0$$

при $x \in (0, a]$. Таким образом, на этом промежутке $F(x) < 0$, т. е.

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k g(kx) < x^n g^{(n)}(px).$$

Очевидно, что функция $g^{(n)}(x) = f(x)/x^n$ непрерывна на промежутке $(0, 1]$ и $g^{(n)}(x) = o(x^\alpha)$ при $x \to 0$. Теперь доказательство теоремы можно завершить так же, как и доказательство теоремы 1. Действительно, для всех $p \in [q_n(\beta), n]$ и $x \in (0, a]$ выполняется неравенство

$$\int_{K_n} g^{(n)}(x(y_1 + \dots + y_n))\, dy < x^n g^{(n)}(px).$$

Положим $h = g^{(n)}$ и выберем $\beta_1 \neq 0$, лежащее между β и α. Из условий теоремы следует, что $h(x) = o(x^{\beta_1})$. Привлекая лемму 2, получаем неравенство $q_n(\beta) \geq q_n(\beta_1)$, которое противоречит возрастанию функции q_n. $\square$

Доказательство теоремы 3. Достаточно вычесть из функции f ее многочлен Тейлора порядка n в точке 0 и применить теорему 2 при $\alpha = 0$. $\square$

Учитывая особую роль функции q_n, для каждого α найдем асимптотику величины $q_n(\alpha)$ при $n \to \infty$.

Теорема 4. *Для каждого α справедливо асимптотическое равенство*

$$q_n(\alpha) \sim \frac{n}{2}$$

при $n \to \infty$.

Доказательство теоремы 4. Учитывая монотонность функции q_n, достаточно доказать утверждение теоремы для отрицательных и для всех натуральных α. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{q_n(-\alpha)}{n}$ при $\alpha>0$. Нетрудно показать, что

$$\frac{1}{(y_1+\dots+y_n)^\alpha}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty e^{-u(y_1+\dots+y_n)}u^{\alpha-1}\,du.$$

Тогда с учетом равенства

$$\int\limits_{K_n} e^{-u(y_1+\dots+y_n)}\,dy=\left(\frac{1-e^{-u}}{u}\right)^n$$

получаем

$$\begin{aligned}(q_n(-\alpha))^{-\alpha}&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{K_n}\left(\int\limits_0^\infty e^{-u(y_1+\dots+y_n)}u^{\alpha-1}\,du\right)dy\\&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty\left(\frac{1-e^{-u}}{u}\right)^n u^{\alpha-1}\,du.\end{aligned}\tag{4}$$

Нетрудно убедиться в том, что при $n\to\infty$ имеет место эквивалентность

$$\int\limits_0^\infty\left(\frac{1-e^{-u}}{u}\right)^n u^{\alpha-1}\,du\sim\frac{2^\alpha}{n^\alpha}\Gamma(\alpha).$$

Для этого в интеграле достаточно произвести замену $u=2v/n$ и воспользоваться определением Γ-функции. Таким образом, в этом случае утверждение теоремы обосновано.

Пусть теперь α — натуральное число. Рассмотрим интеграл

$$S(u)=\int\limits_{K_n} e^{-u(y_1+\dots+y_n)}\,dy=\left(\frac{1-e^{-u}}{u}\right)^n.$$

Очевидно, что

$$S^{(\alpha)}(u)=(-1)^\alpha\int\limits_{K_n}(y_1+\dots+y_n)^\alpha e^{-u(y_1+\dots+y_n)}\,dy.$$

Поэтому

$$(q_n(\alpha))^\alpha=(-1)^\alpha S^{(\alpha)}(0)=(-1)^\alpha\frac{\partial^\alpha}{\partial u^\alpha}\left(\frac{1-e^{-u}}{u}\right)^n\Bigg|_{u=0}.$$

Так как $\lim\limits_{u\to0}\frac{1-e^{-u}}{u}=1$, то α-я производная S в точке 0 является многочленом $P(n)$ от переменной n степени α, причем степень α появляется только в члене

$$n(n-1)\dots(n-\alpha+1)\left(\frac{1-e^{-u}}{u}\right)^{n-\alpha}\left(\left(\frac{1-e^{-u}}{u}\right)'\right)^\alpha.$$

Нетрудно проверить, что $\lim\limits_{u\to0}\left(\frac{1-e^{-u}}{u}\right)'=-\frac12$. Таким образом, многочлен $P(n)$ имеет вид $P(n)=\left(\frac{n}{2}\right)^\alpha+o(n^\alpha)$. Значит,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{q_n(\alpha)}{n}=\frac12,$$

что и требовалось доказать. $\square$

Замечание. Используя предельный переход, из равенства (4) можно получить новое выражение для $q_n(0)$, а именно

$$q_n(0) = \exp\left(\int_0^\infty \left(e^{-u} - \left(\frac{1-e^{-u}}{u}\right)^n\right)\frac{du}{u}\right).$$

Автор выражает признательность В. К. Ионину и В. В. Славскому за их участие в постановке задачи и ее обсуждении.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никоноров Ю. Г.* Об интегральной теореме о среднем // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 6. С. 150–152.

2. *Иванов В. В., Никоноров Ю. Г.* Асимптотика точек Лагранжа в формуле Тейлора // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 1. С. 86–92.

3. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967.

Статья поступила 17 марта 2000 г.

Никоноров Юрий Геннадьевич
Рубцовский индустриальный институт Алтайского гос. технического университета им. И. И. Ползунова,
ул. Тракторная, 2/6, Рубцовск 658207, Алтайский край
nik@inst.rubtsovsk.ru