Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2002. Том 43, № 3

УДК 517.958.532

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЙ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

В. Н. Монахов

Аннотация: Предложен новый сходящийся алгоритм численного решения нелинейной задачи о параметрах конформных отображений, описывающих фильтрационные потоки жидкости со свободными (контактными) границами в пористых средах. Библиогр. 7.

В работе предложен новый сходящийся алгоритм численного решения нелинейной задачи о параметрах конформных отображений, описывающих фильтрационные потоки жидкости со свободными (контактными) границами в пористых средах.

Основным, ранее применяемым, подходом к решению проблемы геометрических и физических параметров фильтрационных течений жидкости являлся обратный метод — последовательное задание их значений и сравнение фильтрационных потоков с потоком, отвечающим исходной задаче [1, 2]. Впервые теоретический анализ прямой задачи о параметрах конформных отображений, соответствующих задачам гидродинамики со свободными границами (волновым, струйным и задачам безнапорной фильтрации), был предложен автором [3].

С помощью разработанного в [3] вариационного метода конечномерной аппроксимации были доказаны теоремы существования и единственности решений широкого класса задач гидродинамики со свободными границами. В работе автора [4] предложена следующая конструкция построения оператора возмущений задачи о параметрах — метод циклической итерации. Выбирается некоторый простой начальный полигон, для которого решение уравнения относительно параметров известно. С помощью конечного числа малых деформаций этот полигон преобразуется в исходный. Доказывается, что для всех полигонов этого конечного семейства, включая и заданный полигон, вектор возмущений соответствующих им нелинейных уравнений может быть найден путем простой итерации. Применительно к фильтрационным потокам со свободными границами метод циклической итерации получил развитие в работах [5, 6].

1. Фильтрация жидкости в полигональном канале со свободной границей, выходящей на горизонтальный дренаж. Пусть область фильтрации D ограничена полигональными проницаемыми стенками P^1 и P^3 пласта, полигональным непроницаемым основанием P^2 и свободной границей L, выходящей на горизонтальный дренаж в нижнем течении.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00645), гранта МО РФ (код проекта Е00–4.0–65) и программы Университеты России (код проекта 04.01.038).

Обозначим через z_k, $k = \overline{0, n+1}$, вершины полигона $P = \bigcup\limits_1^3 P^i = \bigcup\limits_1^{n+1} P_k$, через $\alpha_k\pi$ — углы при них и через $l_k = |z_k - z_{k-1}|$ — длины конечных звеньев P_k, $k = \overline{1, n+1}$, полигона P с концами в точках z_{k-1}, z_k. Рассмотрим общий случай, когда D является областью типа полосы [5, 6]. Будут изучаться также и задачи в областях типа полуполосы и конечных областях [6].

Пусть $z_s = P^1 \cap P^2$ и $z_m = P^3 \cap P^2$, $0 < s < m < n+1$, — точки, лежащие на бесконечности соответственно вверх и вниз по потоку ($z_m = z_s = \infty$).

На каждом из бесконечных звеньев P_s, P_{s+1} с концами в точках (z_{s-1}, z_s), (z_s, z_{s+1}) и звеньев P_m, P_{m+1} с концами (z_{m-1}, z_m), (z_m, z_{m+1}) зафиксируем по две конечные точки (z^*_{s-1}, z^*_s), (z^*_{s+1}, z^*_{s+2}) и (z^*_{m-1}, z^*_m), (z^*_{m+1}, z^*_{m+2}), включив их в число вершин P с углами при них, равными π.

Предполагается, что звенья P_s, P_{s+1}, P_m, P_{m+1} параллельны оси Oy (углы в точках z_s и z_m равны нулю), причем глубины потока $H_s = |\operatorname{Re}(z_{s+1} - z_{s-1})|$ и $H_m = |\operatorname{Re}(z_{m+1} - z_{m-1})|$ в окрестности z_s и z_m могут быть различными.

В области D ищется аналитическая функция $w(z) = \varphi + i\psi$ $(z = x + iy)$ — комплексный потенциал фильтрации, удовлетворяющая следующим граничным условиям [1, 3, 4]: $\varphi = \mathrm{const}$, $z \in P^k$, $k = 1, 3$; $\psi = \mathrm{const}$, $z \in P^2$; $\varphi + x = \mathrm{const}$, $\psi = \mathrm{const}$, $z \in L$.

Эти условия определяют в плоскости комплексного потенциала $w(z) = \varphi + i\psi$ прообраз D^* области D — прямоугольник с вершинами в точках w_k, $k = 0, s, m, n+1$, в котором величина $H = |w_0 - w_{n+1}| = |w_s - w_m|$ напора предполагается известной, а величина $Q = |w_0 - w_s| = |w_m - w_{n+1}|$ расхода жидкости отыскивается.

Отметим, что в рассматриваемом случае горизонтальный дренаж примыкает к точке $z_{n+1} \in (P \cap L)$ и соответственно этому в вершине $z_n \in P$ угол равен 2π.

2. Представление конформных отображений. Построим конформные отображения $w : E \to D^*$, $z : E \to D$ верхней полуплоскости $E : \operatorname{Im}\zeta > 0$ на области D и D^*. Пусть $t_{n+1} = 0$, $1 = t_0 < t_1 < \dots < \infty$ — прообразы $z_k \in P$, $k = \overline{0, n+1}$, вершин полигона $P(z_k = z(t_k))$, $\alpha_k\pi$ — внутренние углы в вершинах z_k, $l_k = |z_k - z_{k-1}|$ — длины конечных звеньев $P_k \subset P$ с концами в точках z_k, z_{k-1} $\left(P = \bigcup\limits_{k=1}^{n+1} P_k\right)$.

Из условия $\varphi + x = \mathrm{const}$ на свободной границе L вычислим

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt} = \left|\frac{dw}{dt}\right|$$

при $t \in [0, 1]$.

Тогда для определения производной $\frac{dz}{d\zeta}$ получим краевую задачу

$$\arg\frac{dz}{dt} = \delta_k\pi, \quad t \in [t_{k-1}, t_k]; \quad \frac{dx}{dt} = \left|\frac{dw}{dt}\right|, \quad t \in [0, 1], \tag{1}$$

где $\delta_k\pi$ — угол наклона звена $P_k \subset P$ с осью Ox. Каноническим решением однородной задачи (1) в нужном классе аналитических функций является производная

$$\frac{dZ}{d\zeta} = C\prod_{k=0}^{n+1}(\zeta - t_k)^{\beta_k} \equiv C\Pi(\zeta), \quad \beta_k = \alpha_k - 1, \quad C = \mathrm{const},$$

конформного отображения $Z : E \to D(\overline{P})$ верхней полуплоскости E на область $D(\overline{P})$, ограниченную многоугольником $\overline{P} = P \cup P_0 \cup P_{n+2}$, где P_0 и P_{n+2} — бесконечные лучи, выходящие из точек z_0 и z_{n+1}.

Записывая теперь решение полученной неоднородной краевой задачи через решение $C\Pi(\zeta)$ однородной, приходим к следующим представлениям для производных $\frac{dw}{d\zeta}$ и $\frac{dz}{d\zeta}$:

$$\frac{dw}{d\zeta} = \prod(\zeta - t_{kj})^{-1/2} = \Pi_0(\zeta); \quad \frac{dz}{d\zeta} = \Pi(\zeta)M(\zeta);$$
$$\Pi = \prod_{k=0}^{n+1}(\zeta - t_k)^{\alpha_k - 1}; \quad M = \frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1 \frac{|\Pi_0(t)|\,dt}{\Pi(t)(t-\zeta)}, \tag{2}$$

где $t_{kj} = t_j$, $j = 0, s, m, n+1$, причем согласно геометрии полигона

$$\sum_{k=0}^{n+1}(\alpha_k - 1) = -1.$$

3. Система уравнений для параметров. Если в представлении (1) произвольно зафиксировать вектор $T = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ неизвестных постоянных t_k $(k = \overline{1,n})$, то соответствующее ему отображение $z = z(\zeta, T)$, $z : E \to D(T)$, переводит отрезок $[0,1]$ в полигон $P(T)$ со сторонами, параллельными сторонам заданного полигона P. Составим систему уравнений относительно вектора T, решение которой обеспечивает совпадение $P(T) = P$. Задачи теории фильтрации жидкости при наличии горизонтального дренажа (промежутка высачивания) в окрестности точки выхода свободной границы на уровень потока в нижнем течении отличаются той особенностью, что положение этой точки z_{n+1} не может быть заранее задано. Соответственно этому длина $l_{n+1} = |z_{n+1} - z_n|$ отрезка дренажа не фиксируется, а должна находиться в процессе решения задачи. Поэтому достаточно, чтобы у полигона $P(T)$, полученного при произвольном задании вектора $T = (t_1, \dots, t_n)$ в (2), и у исходного P совпадали только вершины $z_k(T)$ и z_k, $k = \overline{0,n}$, и, вообще говоря, $z_{n+1}(T) \neq z_{n+1}$. С учетом этого обстоятельства зададим длины $l_k = |z_k - z_{k-1}|$ конечных звеньев полигона P:

$$l_k = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} |\Pi(t)||M(t)|\,dt, \quad k = \overline{1,n},\ k \neq s, s+1, m. \tag{3}$$

На полигоне P^1 зафиксируем точку $z_0 = 0$, при этом соответствующие P^1 условия (3) полностью задают его положение. Аналогично, чтобы зафиксировать положение полигонов P^2 и P^3, зададим координаты точек z_{s+1} и z_{m+1} на них. Так как из граничного условия на прообразе свободной границы имеем

$$|x(t_{n+1}) - x(t_0)| = |\varphi_{n+1} - \varphi_0| = H, \quad |\ln H| < \infty,$$

то $|x(t_{n+1})| = |\operatorname{Re} z_{n+1}| = H$ задано. Поэтому для определения положения полигонов P^2 и P^3 достаточно выполнить следующие уравнения:

$$l_{s+1} + il_s = \int\limits_{t_{s-1}}^{t_{s+1}} \frac{dz}{d\zeta}\,d\zeta; \quad l_m = \operatorname{Im}\int\limits_{t_{m-1}}^{t_{m+1}} \frac{dz}{d\zeta}\,d\zeta. \tag{4}$$

Замечание 1. Любые два из уравнений (4) можно заменить соотношениями для заданных конечных глубин H_s, H_m в окрестностях z_s, z_m:

$$H_k = \pi \left| \frac{dz}{d\zeta}(\zeta - t_k) \right|_{\zeta = t_k}, \quad k = s, m.$$

Положим $u_k = t_k - t_{k-1}$, $k = \overline{1, n+1}$, и введем вектор $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, через который вектор $T = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ однозначно определяется. Тогда вектор $u \in \mathbb{R}^n$ является решением функционального уравнения

$$l = g(u, \alpha), \tag{5}$$

где l_k, $l = (l_1, \dots, l_n)$, представляются в одной из форм (3), (4), а $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{n+1})$. По формулам (5) каждому фиксированному вектору $u = (u_1, \dots, u_n)$, $u_k \neq 0$, подставленному в правую часть (5), отвечает полигон $P(u)$, совпадающий с P только при выполнении (5) с заданными l_k. При этом полигоны $P(u)$, вообще говоря, неоднолистны и некоторые из их звеньев могут иметь между собой внешнее пересечение.

Подчиним (l, α) следующим условиям *простого полигона* [3–6]:

$$G(\delta) = \{0 < \delta \le \alpha_k \le 2,\ k \neq s, m,\ 1/2 \le (\alpha_0, \alpha_{n+1}) \le 3/2 - \delta;\ |\ln l_k| \le \delta^{-1}\}, \tag{6}$$

отражая этот факт включениями: $(P, l, \alpha) \in G(\delta)$. Условия (6) на углы откосов $\alpha_0 \pi$, $\alpha_{n+1}\pi$ обеспечивают ограниченность $M(\zeta)$ в (2) при $\operatorname{Im} \zeta > 0$.

Теорема 1. *Уравнение* (5), *отвечающее простому полигону* $P \subset G(\delta)$, *однозначно разрешимо, и для его решения* $u = (u_1, \dots, u_n)$ *справедливо включение* (*априорные оценки*)

$$u \in \Omega = \{u \mid 0 < \varepsilon(\delta) \le u_k \le \varepsilon^{-1},\ k = \overline{1, n}\}. \tag{7}$$

При этом $g(u, \alpha) \in C^\infty[\Omega \times G]$ *и решение* $u = (u_1, \dots, u_n)$ *локально единственно, т. е.*

$$\left| \frac{Dg}{Du} \right| \ge d(\delta) > 0; \quad \frac{Dg}{Du} = \left\{ \frac{\partial g_i}{\partial u_j} \right\}, \quad u \in \Omega. \tag{8}$$

Доказательство основной априорной оценки $|\ln Q| \le N < \infty$ расхода жидкости $Q = |w_0 - w_s|$ проводится, как и в работе [6], методом экстремальных длин семейств кривых [7]. После получения этой оценки установление априорных свойств (7), (8) решения $(u_1, \dots, u_n)$ и на их основе доказательство однозначной разрешимости уравнения (5) получаются полностью аналогично работам [4, 5].

Замечание 2. В работе [4] величина $l_n = |z_n - z_{n-1}|$ не задавалась и соответственно этому фиксировалось на одну постоянную t_k больше.

4. Эквивалентное уравнение для вектора $u = (u_1, \dots, u_n)$**.** Для уравнения (5), соответствующего общим задачам фильтрации жидкости со свободными границами, разработаны сходящиеся алгоритмы численных расчетов [4]. Однако при численной реализации этих алгоритмов возникает необходимость вычисления двумерных несобственных интегралов с подвижной особенностью, не позволяющих непосредственно применять методы последовательного расчета одномерных интегралов.

В этой работе предлагается при расчете параметров фильтрационных потоков с горизонтальным дренажем использовать эквивалентное (5) уравнение, правая часть которого не содержит двумерных интегралов с подвижной особенностью.

Заменим в системе (3) первое уравнение для стороны $l_1 = |z_1|$ ($z_0 = 0$) соотношением для заданного напора $H = |w_{n+1} - w_0|$ и рассмотрим векторное уравнение

$$l^* = g(u, \alpha), \quad l^* = (H, l_2, \dots, l_n), \tag{9}$$

в котором $g_k(u, \alpha)$, $k = \overline{2, n}$, совпадают с компонентами $g(u, \alpha)$ в (5), а $g_1(u, \alpha) = \int\limits_0^1 |\Pi_0(t)|\, dt$.

Теорема 2. *Уравнения* (5) *и* (9) *относительно* $u = (u_1, \dots, u_n)$ *эквивалентны.*

Доказательство. Из справедливости уравнения (5) выполнение (9) очевидно. Докажем обратное. Обозначим через

$$z = F(u, \zeta) = \int\limits_1^\zeta \Pi(\zeta) M(\zeta)\, d\zeta$$

конформное отображение $F : E \to D(u)$, отвечающее решению $u = (u_1, \dots, u_n)$ уравнения (9), и пусть $X(u, \zeta) = \operatorname{Re} F(u, \zeta)$. По построению $\frac{dF}{d\zeta}$ удовлетворяет краевой задаче (1). Из граничного условия

$$\frac{dX}{dt} = |\Pi_0(t)|, \quad t \in [0, 1],$$

находим $X(u, 1) = 0$, $X(u, 0) = -H$. Но согласно (1)

$$\arg \frac{dF}{dt} = 0, \quad t \in R \equiv (t_{n-1}, \infty) \cup (-\infty, 0),$$

и, следовательно, $X(u, t) = X(u, 0) = -H$ при $t \in R$. В частности,

$$X(u, t_k) = -H, \quad k = n - 1, n, n + 1.$$

Тогда в силу уравнений $l_k = g_k(u, \alpha)$, $k = \overline{m + 1, n}$, положение полигона $P^3 = \bigcup\limits_{k=m}^{n+1} P_k$ фиксируется с точностью до сдвига вдоль оси Oy и тем самым задается глубина H_m,

$$H_m = \pi \left| \frac{dF}{d\zeta} (\zeta - t_m) \right|_{\zeta = t_m}.$$

Обходом водоупора P^2 от точки $z_m = \infty$ до $z_s = \infty$ придем также к выполнению соотношения

$$H_s = \pi \left| \frac{dF}{d\zeta} (\zeta - t_s) \right|_{\zeta = t_s}.$$

Таким образом определится значение $X(T, t_{s-1}) = x_{s-1}$ ($x_k = \operatorname{Re} z_k$), а при обходе полигона P^1 от z_{s-1} до z_1 и величина $X(T, t_1) = x_1$. Поскольку точка $z_0 = 0$ фиксирована и угол $\alpha_0 \pi$ в ней задан, то определяется и величина $l_1 = |F(T, t_1) - F(T, t_0)|$, т. е. выполняется первое уравнение в системе (3). Итак, уравнения (5) и (9) эквивалентны. Теорема доказана.

Замечание 3. Все построения этого пункта, очевидно, сохраняются и в более простых случаях, когда полигон P имеет одну бесконечную вершину [5] (область фильтрации D типа полуполосы) или когда P конечен [4].

Чтобы оценить преимущества уравнения (9), преобразуем интегралы, входящие в соотношения для l_k. Перейдем в этих интегралах к новой переменной θ с помощью подстановки $t = \tau_k(\theta) = u_k\theta + t_{k-1}$, $u_k = t_k - t_{k-1}$:

$$l_k = \int\limits_0^1 \theta^{\beta_{k-1}}(1-\theta)^{\beta_k}\Pi_k(\theta)M_k(\theta)\,d\theta,$$

где

$$\Pi_k = \prod_{i\neq k-1,k} |\tau_k(\theta) - t_i|^{\beta_i} u_k^{\varkappa_k - 1}, \quad \varkappa_k = \alpha_{k-1} + \alpha_k, \quad M_k = M[\tau_k(\theta)].$$

С учетом этих преобразований представим l_k в форме

$$l_k = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{\theta^{\beta_{k-1}}(1-\theta)^{\beta_k} t^{-\gamma_{n+1}}(1-t)^{-\gamma_0}}{|t-\tau_k(\theta)|} N_k(t,\theta)\,dtd\theta, \quad \sup N_k < \infty,$$

где $\gamma_j = \alpha_j - \frac{1}{2} \geq 0$, $j = \overline{0,n+1}$. Имеем $\rho_k(t,\theta) = t - \tau_k(\theta) \neq 0$, $(t,\theta) \in [0,1]\times[0,1]$, при $k \neq 1, n+1$. Если $k = 1$, то $\rho_1(t,\theta) = 0$ в точке $t = 1$, $\theta = 0$ и $\rho_{n+1}(t,\theta) = 0$ в точке $t = 0$, $\theta = 1$. Следовательно, подынтегральная функция в l_k, $k = 1, n+1$, имеет подвижную особенность $[\rho_k(t,\theta)]^{-1}$, равную бесконечности соответственно в точках $(1,0)$ при $k = 1$ и $(0,1)$ при $k = n+1$. Поскольку в задаче, рассмотренной в п. 1, уравнения (5) и (9) не содержат компоненты $l_{n+1} = |z_{n+1} - z_n|$, а в (9) не входит также компонента $l_1 = |z_1|$, то подынтегральные выражения во всех уравнениях (9) не имеют подвижной особенности.

Замечание 4. В силу эквивалентности уравнений (5) и (9) свойства (7), (8) имеют место и для решений уравнения (9).

5. Преобразование функционального уравнения. В работе [4] разработан метод циклической итерации решения систем уравнений относительно параметров гидродинамических потоков со свободными границами, который будет применен к сформулированной в п. 1 фильтрационной задаче. Преобразуем уравнение (9), производя в интегралах $g_k(u,\alpha)$, $k = \overline{2,n}$, замену переменных

$$t = \theta u_k + t_{k-1} \equiv \tau_k(\theta), \quad \theta \in [0,1],$$

и для единообразия полагая $\tau_1(\theta) = \theta$. Остановимся сначала на случае конечного полигона P.

Умножим покомпонентно обе части уравнений $l_k^* = g_k(u,\alpha)$ на $u_k(l_k^*)^{-1}$ и представим уравнение (9) в виде

$$u = f(u,p), \quad p = (l,\alpha), \quad f = (f_1,\dots,f_n). \tag{10}$$

Здесь

$$f_k = \int\limits_0^1 \theta^{\beta_{k-1}}(1-\theta)^{\beta_k}\Pi_k(\theta)M_k(\theta)\,d\theta, \quad k = \overline{2,n},$$

$$f_1 = \int\limits_0^1 [\theta(1-\theta)]^{-1/2}\Pi_1(\theta)\,d\theta,$$

$$\Pi_k = u_k^{\varkappa_k} l_k^{-1} \prod_{i \neq k-1,k} |t_i - \tau_i(\theta)|^{\beta_k}, \quad \varkappa_k = \alpha_{k-1} + \alpha_k,$$

$$M_k = |M[\tau_k(\theta)]|, \ k = \overline{2,n}, \quad \Pi_1 = u_1 H^{-1} |t_m - \theta|^{-1/2} |t_s - \theta|^{-1/2}.$$

Индекс $(*)$ у вектора l^* в (10) опущен и условно положено $l_1 = H$.

В случае бесконечного полигона P преобразуем интегралы в (4), считая их взятыми по полукругу $R_k = \{\rho_k e^{i\theta\pi} \mid \rho_k = \frac{t_{k+1} - t_{k-1}}{2}, \ 0 < \theta < 1\}$, $k = s, m$. Тогда

$$l_{k+1} + i l_k = \pi \rho_k \int_0^1 e^{i\theta\pi} \Pi(\rho_k e^{i\theta\pi}) M(\rho_k e^{i\theta\pi})\, d\theta, \quad k = s, m.$$

Отметим, что подынтегральные функции в этих формулах не имеют особенностей на промежутке интегрирования и $(\Pi M) \in C^\infty[0,1]$. Поэтому в случае неограниченного полигона P компоненты $f_k(u,p), k = s, s+1, m$, в (10) не меняют свойств оператора $f(u,p)$, $f = (f_1, \dots, f_n)$.

Для оператора $f(u,p)$ справедливы соотношения, аналогичные (8):

$$f \in C^\infty(\Omega \times G); \quad \left\| \left(I - \frac{Df}{Du} \right)^{-1} \right\| \leq d(\delta) < \infty, \quad \frac{Df}{Du} = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right\}, \tag{11}$$

где I — единичная матрица, $||A|| = \sup\limits_{|v|=1} |Av|$, $A = \{a_{ij}\}$ [4].

6. Деформация простых полигонов. Рассмотрим вспомогательный полигон P^0, у которого

$$P^1 = \{z \mid x = 0, y > 0\}, \quad P^1 : \varphi = 0;$$

$$P^2 = \{z \mid x = -H_s, -\infty < y < \infty\}, \quad P^2 : \psi = 0;$$

$$P^3 = \{z \mid x = -H, -\infty < y < y_{n+1}\}, \quad P^3 : \varphi = H < H_s.$$

Прообразы $t_0^0 = 1$, $t_{n+1}^0 = 0$ точек $z_0^0 = 0$ и z_{n+1}^0 фиксируются, а неизвестные постоянные t_s^0 и t_m^0 — прообразы бесконечных вершин полигона P^0, $z_s = \infty$, $z_m = \infty$, — однозначно определяются из системы уравнений для H_s и $H_m = H_s - H > 0$, приведенной в замечании 1.

Зафиксируем дополнительно постоянные t_k^0, $k = \overline{1,n}$ $(k \neq s, m)$, $t_0^0 = 1 < t_1^0 < \ldots < t_n^0 < \infty$, и однозначно определим их прообразы — «вершины» z_k^0 с углами $\alpha_k^0 \pi = \pi$. Будем рассматривать теперь P^0 как полигон с вершинами z_k^0, $k = \overline{0, n+1}$. Соответствующая ему система уравнений (3), (4) имеет единственное решение $T^0 = \left(t_1^0, \dots, t_n^0\right)$ [5]. Очевидно, для полигона P^0 однозначно разрешимо и функциональное уравнение (10), эквивалентное соответствующей системе уравнений (3), (4). Построим семейство полигонов $\{P^\nu\}$, $\nu = (\nu_0, \dots, \nu_{n+1})$, $\nu_k \in [0,1]$, включающее P^0 и исходный полигон $P = P^e$, $e = (1, \dots, 1)$.

Пусть P^μ и P^λ, $0 \leq \mu_k \leq \lambda_k \leq 1$, — два различных $(|\mu - \lambda| > 0)$ полигона из семейства $\{P^\nu\}$ таких, что их характеристики $p^\mu = (l^\mu, \alpha^\mu)$, $p^\lambda = (l^\lambda, \alpha^\lambda)$ и соответствующие им мультииндексы μ, λ близки:

$$0 \leq |p^\lambda - p^\mu| = q \ll 1, \quad 0 < |\lambda - \mu| \leq \rho(q) \ll 1, \tag{12}$$

где постоянная $q > 0$ — мера деформации $P^\mu \to P^\lambda$ — будет выбрана ниже.

Произведем непрерывную деформацию $P^\mu \to P^\lambda$ с помощью следующего линейного преобразования вершин $z_k^\mu \in P^\mu$, $z_k^\lambda \in P^\lambda$, $k = \overline{0, n+1}$:

$$z_k^\nu = \varepsilon_k z_k^\lambda + (1 - \varepsilon_k) z_k^\mu, \quad \varepsilon_k \in [0,1], \quad \mu_k \leq \nu_k \leq \lambda_k, \tag{13}$$

где $\varepsilon_k = (\nu_k - \mu_k)(\lambda_k - \mu_k)^{-1}$ при $\lambda_k > \mu_k$ и $\varepsilon_k = 0$ при $\lambda_k = \mu_k$. Преобразование (13) вершин $z_k^\mu \to z_k^\lambda$, удовлетворяющее условию (12) близости P^μ и P^λ, будем называть *циклом деформаций*. Очевидно, при каждом фиксированном $q > 0$ в (12) за конечное число таких циклов деформаций начальный полигон P^0 преобразуется в заданный $P = P^e$, $e = (1, \dots, 1)$, при этом $P^\nu \in G(\delta)$, $\delta = \delta(q) > 0$.

В силу теоремы 1 уравнение (10), соответствующее любому полигону $P^\mu \subset G(\delta)$, однозначно разрешимо.

7. Сходимость метода циклической итерации. Рассмотрим один цикл деформаций $P^\mu \to P^\lambda$ при условии (12), и пусть $u = u^\lambda$, $\bar{u} = u^\mu$ — решения уравнения (10), соответствующие характеристикам $p = p^\lambda$, $\bar{p} = p^\mu$: $u = f(u, p)$, $\bar{u} = f(\bar{u}, \bar{p})$. Вычтем обе части этих уравнений друг из друга и представим результат в виде [4]:

$$v - \frac{D\bar{f}(u)}{Du} \cdot v = A(v) + \Delta_p f, \quad v = \bar{u} - u, \tag{14}$$

где

$$\bar{f}(u) = f(u, \bar{p}), \quad A = \left[\frac{D\bar{f}(u + \Theta v)}{Du} - \frac{D\bar{f}(u)}{Du}\right] v,$$

$$\Theta v = (\Theta_1 v_1, \dots, \Theta_n v_n), \quad |\Theta_k| \le 1, \quad \Delta_p f = f(u, p) - f(u, \bar{p}).$$

Учитывая оценку (11), уравнению (14) можно придать вид

$$v = B(v), \quad B = \left(I - \frac{D\bar{f}(u)}{Du}\right)^{-1} (A + \Delta_p f). \tag{15}$$

Выбирая $q = |p - \bar{p}| = (2dM)^{-2}$, $M = ||f||_{C^2(Q)}$, $Q = \Omega \times G$, получим, что на множестве $\Omega_q = \{v \mid |v| < \sqrt{q}\}$ оператор $B : \Omega_q \to \Omega_q$ является сжимающим [4]: $|B(v_1) - B(v_2)| \le \frac{1}{2}|v_1 - v_2|$. Пусть в (12) $\rho = \rho(q) > 0$ отвечает выбранному $q = (2Md)^{-2}$ и $N = N(q)$ — целое число, подчиненное неравенствам $1 \le N\rho < 1 + \rho$. Рассмотрим последовательность мультииндексов ν_k, $k = \overline{1, N}$,

$$\{\nu_k\} = \{\nu_0 = 0,\ |\nu_{k+1} - \nu_k| = \rho,\ k = \overline{1, N-1},\ |\nu_N - e| < \rho\}.$$

Соответствующие ν_k циклы малых деформаций $P^{\nu_k} \to P^{\nu_{k+1}}$ подчиним условию (12).

По построению на каждом шаге таких циклов отвечающее ему уравнение (15) может быть решено методом простой итерации:

$$v^{(m+1)} = B(v^{(m)}), \quad m = 0, 1, \dots, \quad v^{(0)} \in \Omega_q. \tag{16}$$

Процесс построения решения уравнения (10) для заданного полигона $P = P^e$, $e = (1, \dots, 1)$, последовательным решением (15) для циклов деформаций $P^{\nu_k} \to P^{\nu_{k+1}}$ по схеме (16) назовем *методом циклической итерации*. Аналогично [4] доказывается справедливость следующего утверждения.

Теорема 3. *Метод циклической итерации за конечное число циклов деформаций $P^{\nu_k} \to P^{\nu_{k+1}}$, $k = \overline{1, N}$, начиная с P^0, сходится к единственному решению уравнения* (10) *для заданного полигона $P = P^e$, $e = (1, \dots, 1)$.*

При этом на каждом цикле деформаций возмущения $v = (u^{\nu_{k+1}} - u^{\nu_k})$ могут быть построены по схеме (16) *простой итерации.*

8. Аппроксимация одномерных интегралов. Построим квадратурные формулы вычисления двойных несобственных интегралов $f_k(u, p)$ в (10) при произвольно фиксированных $(u,p) \in \Omega \times G$. Для этого аппроксимируем сначала одномерные несобственные интегралы $M_k(\theta)$, $k = \overline{2,n}$, $k \neq s, s+1, m$, в представлении $f_k(u,p)$:

$$M_k(\theta) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{|\Pi_0(t)|\,dt}{|\Pi(t)|\,|t-\tau_k(\theta)|} \equiv \int\limits_0^1 t^{-\gamma_{n+1}}(1-t)^{-\gamma_0}\Lambda_k(t,\theta)\,dt,$$

где $\Lambda_k(t,\theta) \in C^\infty(R)$, $R = [0,1]\times[0,1]$, $\gamma_j = \alpha_j - \frac{1}{2}$, $j = 0, n+1$, причем согласно условиям (6) простого полигона будет $0 \le \gamma_j \le 1-\delta$, $\delta > 0$.

На промежутке интегрирования $S = (0,1)$ выделим окрестности точек $t = 0$ и $t = 1$, в которых имеются особенности $\Lambda_k(t,\theta)$:

$$S_0 = (0,\varepsilon_0), \quad S_1 = (1-\varepsilon_0, 1), \quad 0 < \varepsilon_0 \le \frac{1}{2}; \quad S_2 = (\varepsilon_0, 1-\varepsilon_0).$$

Положим

$$M_{km} = \int\limits_{S_m} |t-m|^{-a_m}\Lambda_{km}(t,\theta)\,dt, \quad m = 0,1,2. \tag{17}$$

Здесь $a_0 = \max(\gamma_{n+1},0)$, $a_1 = \max(\gamma_0,0)$, $a_2 = 0$, $\Lambda_{mk} = \Lambda_k(t,\theta)$ при $t \in S_m$ и $\Lambda_{mk} \equiv 0$ при $t \notin S_m$. Произведем разбиение S с шагом $h = 1/N$, $N \gg 1$, и положим $E_i = \{t \mid 0 < t - t^i < h\}$, $i = \overline{0,N}$. Аппроксимируем функции $\Lambda_{km}(t,\theta) \in C^\infty(S_m)$ кусочно-постоянными, полагая $\Lambda_{km}(t) = \Lambda_{km}(t^i)$, $t \in E_i$, и вычислим приближенное значение M_k по формуле

$$M_k^h = \sum_{i=0}^{N}\sum_{m=0}^{2} H_m^i \Lambda_{km}(t^i,\theta), \tag{18}$$

где $H_m^i = \frac{1}{1-a_m}\big|\,|t^{i+1}-m|^{1-a_m} - |t^i-m|^{1-a_m}\big|$.

Аналогично произведем аппроксимацию $M_k(\theta) = M(\rho_k e^{i\theta\pi})$, $k = s, s+1, m$, в представлении (4), считая в (17) $\Lambda_{km}(t,\theta)$ комплекснозначными функциями.

9. Оценка погрешности аппроксимации M_k. Рассмотрим произвольную функцию $F(t,\theta,\omega) \in C^2(S\times S\times Q)$, $\omega = (u,l,\alpha) \in Q = \Omega\times G$, где $u = (u_0,\dots,u_{n+1})$, $u_0 = t_0$ — вектор параметров конформного отображения, $p = (l,\alpha)$ — геометрическая характеристика полигона P. Положим $\|F\|_t^{(k)} = \|F\|_{C^k(S)}$, $\|F\|_\omega^{(k)} = \|F\|_{C^k(Q)}$, $k = 0,1,2$. Введем также векторы первых и вторых производных:

$$D^{(1)}F = \nabla_\omega F = (\nabla_u F, \nabla_l F, \nabla_\alpha F), \quad \nabla_u F = \left(\frac{\partial F}{\partial u_0},\dots,\frac{\partial F}{\partial u_{n+1}}\right),$$

$$D^{(2)}F = (\nabla_\omega F_{u_0},\dots;\nabla_\omega F_{l_0},\dots;\nabla_\omega F_{\alpha_0},\dots), \quad F_{u_i} = \frac{\partial F}{\partial u_i},\dots.$$

Вычислим погрешность аппроксимации M_k:

$$\partial_h M_k = \sum_i \int\limits_{E_i} |t-m|^{-a_m}\partial_t\Lambda_k(t,\theta)\,dt, \quad \partial_t\Lambda_k = \Lambda_k(t,\theta) - \Lambda_k(t^i,\theta).$$

Поскольку $M_k(\theta,\omega) \in C^\infty[(0,1)\times Q]$, аналогичные формулы имеют место и для вектора $D^{(\varkappa)}M_{k\theta}^l$:

$$\partial_h\big(D^{(\varkappa)}M_{k\theta}^l\big) = \sum_i D^{(\varkappa)}\int\limits_{E_i} |t-m|^{-a_m}\partial_t\Lambda_{k\theta}^l(t,\theta)\,dt, \quad (\varkappa,l) = \overline{0,2}, \tag{19}$$

где $\Phi_\theta^l = \frac{\partial^l}{\partial\theta^l}\Phi$ для любой функции $\Phi(t,\theta,\omega)$.

Учитывая, что $\Lambda_k(t,\theta) \in C^\infty(E_i)$ при $\theta \in (0,1), (u,p) \in (\Omega \times G)$, из (19) находим

$$\left\|\partial_h M_{k\theta}^l\right\|_\omega^{(2)} \le Ch^{1-a}, \quad 0 < \varepsilon \le a \le 1-\delta,\ \delta > 0 \quad (\varepsilon \ll 1 \text{ любое}), \qquad (20)$$

где $C = C_m(a_m)\sup\limits_{\mu,\theta}\left\|D^{(\varkappa)}\Lambda_{k\theta}^l\right\|_t^{(1)}$, $a = 0$ при $a_m = 0$ и $a = \max\limits_m a_m \le 1-\delta < 1$ при $a_m > 0$, $\mu = (k,\varkappa,l)$.

10. Аппроксимация оператора. Рассмотрим $f_k(u,p)$ в (10) как одномерные несобственные интегралы. Аналогично предыдущему разобьем промежуток интегрирования $S = [0,1]$ на интервалы $S_0 = (0,\varepsilon_0)$, $S_1 = (1-\varepsilon_0, 1)$, $S_2 = (\varepsilon_0, 1-\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \in \left(0,\frac{1}{2}\right]$, и положим

$$f_k = \sum_{m=0}^{2} f_{km}, \quad f_{km} = \int\limits_{S_m} |\theta - m|^{-b_m}\Gamma_{km}(\theta)\,d\theta.$$

Здесь $b = \max(-\beta_{k+m-1}, 0)$ $m = 0,1$, $b_2 = 0$,

$$\Gamma_{km} = \Pi_{km}(\theta)M_{mk}(\theta), \quad M_{km} = M_k(\theta) \text{ при } \theta \in S_m,$$
$$\Pi_{km} = \Pi_k(\theta)|\theta + m - 1|^{\beta_{k-m}},\ m = 0,1,$$
$$\Pi_{k2} = \Pi_k(\theta)|\theta|^{\beta_{k-1}}|1-\theta|^{\beta_k}, \quad \Gamma_{km}(\theta) \in C^\infty[0,1].$$

Для каждой ячейки $E_{ij} \subset S_m$, $m = 0,1,2$, введем обозначения

$$f_\mu = \int\limits_{E_j} q_m(\theta)\Gamma_\mu(\theta)\,d\theta, \quad f_{h\mu} = \int\limits_{E_j} q_m(\theta)\Pi_\mu(\theta)M_\mu^h(\theta)\,d\theta,$$

$$q_m = |\theta - m|^{-b_m}, \quad f_\mu^h = \frac{1}{1-b_m}\Gamma_\mu(\theta^j)\Delta_j|\theta - m|^{1-b_m},$$

$$\Delta_j\Phi(\theta) = \Phi(\theta^{j+1}) - \Phi(\theta^j), \quad \Delta f_\mu = f_\mu - f_{h\mu} = \int\limits_{E_j} q_m(\theta)\Pi_\mu(\theta)\partial_h M_\mu(\theta)\,d\theta,$$

$$\partial_h f_\mu = \int\limits_{E_j} q_m(\theta)\partial_\theta\Gamma_\mu(\theta)\,d\theta, \quad \partial_\theta\Phi(\theta) = \Phi(\theta) - \Phi(\theta^j),$$

$\mu = kmj$ — мультииндекс, $k = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,N_m}$, $m = 0,1,2$, $N_0 + N_1 + N_1 = N$. Тогда погрешность аппроксимации $\partial_h f_\mu = f_\mu - f_\mu^h$ представляется в виде

$$\partial_h f_\mu = \partial_h(f_{h\mu}) + \partial_h(\Delta f_\mu),$$

где первое слагаемое соответствует погрешности аппроксимации двойного интеграла по $E_j \times S$, а второе — одномерного по E_j. Для входящих в интегральное представление $\partial_h f_\mu$ функций имеют место очевидные оценки

$$\left|\partial_\theta M_\mu^h, \partial_\theta(\partial_h M_\mu), \partial_\theta\Pi_\mu\right| \le Ch.$$

Полностью аналогично неравенству (20) приходим к следующей оценке погрешности аппроксимации:

$$\|\partial_h f_k\|_\omega^{(2)} \le Ch^{1-b}, \quad 0 < \varepsilon \le b < 1-\delta.$$

Здесь $b = \max(a_m, b_m) + \varepsilon$ $\forall\varepsilon \ll 1$, a_m определено в (17), $C = C_0\sup\limits_{k,\varkappa}\|D^{(\varkappa)}\Gamma_k\|_S^{(2)}$, $C_0 = \mathrm{const}$. Итак, доказана

Теорема 4. *Для вектора погрешности $\partial_h f = f - f^h$ справедлива оценка*

$$\|\partial_h f\|_\omega^{(2)} \le Ch^{1-b}, \quad 0 < \varepsilon \le b \le 1 - \delta,\ \delta > 0. \tag{21}$$

11. Сходимость численного метода циклической итерации. Рассмотрим уравнение (14) для определения возмущения $v = u^{\nu_{k+1}} - u^{\nu_k}$ одного цикла метода итераций (см. п. 7). Построим аппроксимацию входящих в коэффициенты $\frac{Df}{Du}$ этого уравнения интегральных операторов $f = (f_1, \dots, f_n)$ по формулам предыдущего пункта. Зафиксируем шаг h сетки E так, чтобы

$$\left|\left(I - \frac{Df^h}{Du}\right)\right| \ge \varepsilon_1(\delta, h) > 0, \qquad \left\|\left(I - \frac{Df^h}{Du}\right)^{-1}\right\| \le d_1(\delta, h) < \infty.$$

В силу оценок (21) такой выбор h возможен. Обратим оператор $\left(I - \frac{Df^h}{Du}\right)$ и составим аппроксимационный аналог оператора $B(v)$ в (15):

$$v = \left(I - \frac{Df^h}{Du}\right)^{-1}(A^h + \Delta_p f^h) \equiv B^h(v), \quad v \in \Omega_q. \tag{22}$$

Выбором шага деформации $|\Delta p| \le q \ll 1$ (неравенства (12)) добьемся того, чтобы аналогично $B(v)$ оператор $B^h(v)$ был сжимающим.

Теорема 5. *Аппроксимационный аналог метода циклической итерации сходится за конечное число деформаций полигона $\{P^\nu\}$ к решению уравнения* (10) *для заданного полигона P. На каждом цикле деформаций $P^{\nu_k} \to P^{\nu_{k+1}}$ решение соответствующего приближенного уравнения* (22) *может быть найдено методом итераций: $v^{(m+1)} = B^h(v^{(m)})$, $m = 0, 1, \dots,$ $v^{(0)} \in \Omega_q$.*

В качестве конкретного приложения полученных результатов остановимся на классической задаче фильтрации жидкости со свободной границей, выходящей на горизонтальный дренаж.

12. Земляная плотина на непроницаемом основании с горизонтальным дренажем. Аналог этой задачи рассмотрен в монографии П. Я. Полубариновой-Кочиной [2, с. 290].

Стенки плотины $P_1 = \{z \mid -H_1 < x < 0,\ y = -x \operatorname{ctg} \alpha\pi\}$ и $P_3 = \{z \mid 0 < x + H_1 < H,\ y = -l\}$, а также горизонтальный дренаж $P_4 = \{z \mid x = -H,\ y \in (-l, y_4) \cup (y_5, y_4)\}$ являются эквипотенциалями, а именно $P_1 : \varphi = 0$, $(P_3 \cup P_4) : \varphi = H$, H — заданная величина напора жидкости. Основание плотины $P_2 = \{z \mid x = -H_1,\ -l < y < H_1 \operatorname{ctg} \alpha\pi\}$ есть линия тока $\psi = 0$. На свободной границе L выполняются условия: $\varphi = -x$ и $\psi = Q$, Q — искомый расход жидкости.

Заданными краевыми условиями для $w = w(D)$ на полигоне $P = \bigcup\limits_1^4 P_k$ и свободной границе L в плоскости $w = \varphi + i\psi$ определяется образ области D — прямоугольник D^* с вершинами в точках $w_0 = iQ$, $w_1 = 0$, $w_2 = H$, $w_5 = H + iQ$.

Пусть t_k, $t_5 = 0 < t_0 = 1 < \dots < t_4 < \infty$ — прообразы вершин $z_k = z(t_k)$ полигона $P = \bigcup\limits_1^4 P_k$.

В сформулированной задаче в представлении (2) имеем

$$\Pi_0(\zeta) = \Pi(\zeta - t_{kj})^{-1/2}, \quad j = 0, 1, 2, 5; \quad \Pi(\zeta) = \prod_{k=0}^{5} (\zeta - t_k)^{\alpha_k - 1},$$

где $\alpha_0 = 1 - \alpha$, $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 1/2$, $\alpha_4 = 2$, $\alpha_5 = 1$.

Отметим, что в задачах фильтрации жидкости в земляных плотинах при наклонном дренаже или его отсутствии соответствующие уравнения (5) и (9) могут быть неэквивалентными. Приведем пример такой задачи.

13. Плотина с наклонной поверхностью дренажа [1, с. 211]. Граница ∂D области фильтрации D в этой задаче состоит из непроницаемого водоупора $P_2 = \{z \mid x = -H_1,\ y_1 < y < y_2\}$ $(P_2 : \psi = 0)$, проницаемого откоса $P_1 = \{z \mid -H_1 < x < 0,\ y = -x \operatorname{ctg} \alpha\pi\}$ $(P_1 : \varphi = 0)$, наклонного дренажа $P_3 = \{z \mid -H_1 < x < -H,\ y - y_2 = -(H_1 + x) \operatorname{ctg} \alpha\pi\}$ $(P_3 : \varphi = H)$ и свободной границы L: $\varphi + x = 0$, $\psi = Q$.

В формулах (2):

$$\Pi_0(\zeta) = \prod_{k=0}^{3} (\zeta - t_k)^{-1/2}, \quad \Pi(\zeta) = \prod_{k=0}^{3} (\zeta - t_k)^{\alpha_k - 1},$$

где $t_3 = 0 < t_0 = 1 < t_1 < t_2 < \infty$, $\alpha_0 = \alpha_2 = 1 - \alpha$, $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_3 = 1 + \alpha$, $0 < \alpha < 1/2$.

Для нахождения вектора $T = (t_1, t_2)$ достаточно решить уравнение вида (5) с двумя компонентами $l_k = g_k(T, \alpha)$ $(= |z_k - z_{k-1}|)$, $k = 1, 2$, определяющими вместе с $z_0 = 0$ положение заданных вершин z_1, z_2 полигона $P = \bigcup\limits_1^3 P_k$. В силу граничного условия $\frac{dx}{dt} = |\Pi_0(t)|$, $t \in [0, 1]$, находится $x_3 = \operatorname{Re} z_3 = -\int\limits_0^1 |\Pi_0(t)|\, dt = -H$, а из уравнения прямой P_3 — координата $y_3 = \operatorname{Im} z_3 = -H \operatorname{ctg} \alpha\pi$. Построенное по решению $T = (t_1, t_2)$ уравнения (5) конформное отображение z: $E \to D(P)$ переводит $t_3 = 0$ в заданную вершину $z_3 \in P$, и тем самым выполняется уравнение $l_3 = g_3(T, \alpha)$. Таким образом, уравнение (5) с $g = (g_1, g_2)$ однозначно определяет полигон P.

Рассмотрим теперь систему уравнений, соответствующую (9):

$$H = \int_0^1 |\Pi_0(t)|\, dt, \quad l_2 = g_2(T, \alpha).$$

В силу первого уравнения и граничного условия $\varphi + x = 0$ на L имеем $x_3 = \operatorname{Re} z_3 = -H$ $(\varphi_3 = H)$. Тогда задание длины $l_2 = |z_2 - z_1|$ определяет координату $y_3 = \operatorname{Im} z_3 = -H \operatorname{ctg} \alpha\pi$. Однако при этом длина стороны $l_k = |z_k - z_{k-1}|$, $k = 1, 3$, а с ней и координаты точек z_1, z_2, очевидно, не фиксируются. Итак, для этой задачи уравнения (5) и (9) неэквивалентны.

Поэтому для задач фильтрации жидкости в земляных плотинах с наклонным дренажем, а также при отсутствии дренажа необходимо решать систему уравнений (5).

14. Аппроксимация двумерных интегралов. Пусть полигон P конечный. Представим компоненты $f_k(\omega)$, $\omega = (u, p)$, вектора $f = (f_1, \dots, f_n)$ в (10), полученного преобразованием уравнения (5), в виде двойных несобственных интегралов:

$$f_k(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 F_k(t, \theta, \omega) R_k(t, \theta, \omega)\, dt d\theta, \quad k = \overline{1, n}. \tag{23}$$

Здесь

$$R_k(t,\theta,\omega) \in C^\infty(S\times Q), \quad S=(0,1)\times(0,1), \quad Q=\Omega\times G;$$

$$F_k = \theta^{\beta_{k-1}}(1-\theta)^{\beta_k} t^{-\gamma_{n+1}}(1-t)^{-\gamma_0} \quad \text{при } k=\overline{2,n},$$

$$F_1 = \theta^{\beta_0}(1-\theta)^{\beta_1} t^{-\gamma_{n+1}}(1-t)^{-\gamma_0}\rho(t,\theta), \quad \rho=(t-1-\theta u_1)^{-1}, \quad u_1=t_1-1.$$

Отметим, что уравнение, отвечающее стороне $l_{n+1}=|z_{n+1}-z_n|$, является следствием уравнения (5) и в число компонент $l=(l_1,\ldots,l_n)$ не входит. Функция F_1, соответствующая стороне $l_1=|z_1|$ $(z_0=0)$, помимо особых точек в вершинах $(m,r)\in\overline{S}$ $(m=0,1; r=0,1)$ содержит подвижную особенность $\rho(t,\theta)$, $\rho=\infty$ при $t=1$, $\theta=0$.

Построим квадратурные формулы вычисления двойных несобственных интегралов $f_k(\omega)$ в (23) при произвольно фиксированных $\omega\in Q$, $Q=\Omega\times G$. Для этого в квадрате $S=(0,1)\times(0,1)$ (область интегрирования) выделим окрестности S_{mr} его вершин (m,r), в которых имеются особенности подынтегральных функций $\Lambda_k(t,\theta)=F_kR_k$ (зависимость от ω опускается):

$$S_{mr}=\{t,\theta \mid |t-m|<\varepsilon_0,\ |\theta-r|<\varepsilon_0\}\subset S, \quad \varepsilon_0\in(0,1/2],$$

где m и r принимают значения 0 или 1. Отметим, что при $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$ множество $S_{22}=(S\backslash\bigcup S_{mr})$ непустое. Положим

$$\Lambda_{k\nu}(t,\theta)=\Lambda_k(t,\theta) \quad \text{при } (t,\theta)\in S_\nu, \quad \Lambda_k(t,\theta)=0 \quad \text{при } (t,\theta)\notin S_\nu,$$

где $\nu=mr$ или $\nu=\nu_{22}$ $(m=r=2)$. Введем аналогичные обозначения и для интегралов по S_{mr} и S_{22}:

$$f_{k\nu}=\iint\limits_S \Lambda_{k\nu}(t,\theta)\,dtd\theta, \quad f_k=\sum_\nu f_{k\nu}, \quad \nu=mr.$$

Покроем квадрат S равномерной сеткой E с шагом $h=\frac{1}{N}$ и положим $E_{ij}=\{t,\theta \mid 0<t-t^i<h,\ 0<\theta-\theta^j<h\}$, $\sigma_{ij}=(t^i,\theta^j)$. Аппроксимируем функции $\Lambda_{k\nu}(t,\theta)\in C^\infty(S)$, $\nu=22$, при $\omega\in Q$ кусочно-постоянными, полагая $\Lambda_{k\nu}(t,\theta)=\Lambda_{k\nu}(\sigma_{ij})$ при $(t,s)\in E_{ij}$, и вычислим приближенные значения f_k^h по следующей квадратурной формуле:

$$f_{k\nu}^h=\sum_{i,j}\Lambda_{k\nu}(\sigma_{ij})h^2, \quad \nu=22. \tag{24}$$

Рассмотрим множество J всех мультииндексов $\varkappa=(k\,m\,r)$ $(m=0,1;\ r=0,1;\ k=\overline{1,n})$ и положим $J_*=[J\backslash(1,1,0)]$. В интегралах $f_{k\nu}$, $(k\,m\,r)\in J_*$, выделим особенности подынтегральных функций:

$$\Lambda_{k\nu}=|t-m|^{-a_m}|\theta-r|^{-b_r}\Phi_{k\nu}(t,\theta), \quad \Phi_{k\nu}\in C^\infty(S_\nu).$$

Здесь $a_m=\max(\bar a_m,0)$, $b_r=\max(\bar b_m,0)$; $\bar a_0=\gamma_{n+1}=\alpha_{n+1}-\frac{1}{2}\geq 0$, $\bar a_1=\gamma_0=\alpha_0-\frac{1}{2}\geq 0$, $\bar b_r=-\beta_{k+r-1}$, $r=0,1$; $(\bar a_m,\bar b_r)\in(0,1]$.

Вычислим приближенные значения $f_{k\nu}^h$, $(k\,m\,r)\in J_*$, по квадратурным формулам

$$f_{k\nu}^h=\sum_{i,j}\Delta_m^i\Delta_r^j\Phi_{k\nu}(\sigma_{ij}), \tag{25}$$

где

$$\Delta_m^i=\frac{1}{1-a_m}|\Delta_t|t-m|^{1-a_m}|, \quad \Delta_r^j=\frac{1}{1-b_r}|\Delta_\theta|\theta-r|^{1-b_r}|,$$

$$\Delta_t f=f(t^{i+1})-f(t^i), \quad \Delta_\theta g=g(\theta^{j+1})-g(\theta^j)$$

($\Delta_m^i = h$ при $r_m = 0$, $\Delta_r^j = h$ при $b_r = 0$). При вычислении последнего интеграла $f_{1\nu}$ заметим, что подынтегральная функция $\Lambda_{1\nu}(t,\theta)$, $\nu = 10$, имеет дополнительную подвижную особенность и представляется в виде

$$\Lambda_{1\nu}(t,\theta) = (1-t)^{-a_1}\theta^{-b_0}(u_1\theta + 1 - t)^{-1}\Phi_{1\nu}, \quad \Phi_{1\nu} \in C^\infty(S_{10}),\ \nu = 10,$$

где $(u_1\theta + 1 - t) \to 0$ при $(t,\theta) \to (1,0)$. Наличие подвижной особенности у $\Lambda_{1\nu}$ не позволяет вычислить $f_{1\nu}$ аналогично $f_{k\nu}$, $k\nu \neq 110$, как повторный интеграл, так как при этом порядок особенности по t и по θ в точке $(1,0)$ может быть большим единицы.

Поэтому перейдем в интеграле $f_{1\nu}$, $\nu = 10$, к полярным координатам (ρ,γ), полагая $1 - t = \rho\cos\gamma$, $\theta = \rho\sin\gamma$:

$$f_{1\nu} = \int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\rho_0(\gamma)} \sin^{-b_0}\gamma\cos^{-a_1}\gamma\rho^{-(b_0+a_1)}\Phi_0(t,\theta)\,d\rho d\gamma, \quad |\Phi_0| \le M < \infty.$$

Здесь $\rho_0(\gamma) = (1-\varepsilon_0)\cos^{-1}\gamma$ при $\gamma \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ и $\rho_0 = \varepsilon_0\sin^{-1}\gamma$ при $\gamma \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Представим интеграл в $f_{1\nu}$, $\nu = 10$, в виде суммы интегралов N_1 и N_2 по областям $(0,\pi/4)\times(0,\rho_0)$ и $(\pi/4,\pi/2)\times(0,\rho_0)$, полагая $f_{1\nu} = N_1 + N_2$. В интеграле N_1 сделаем замену переменных $\eta = \sqrt{2}\sin\gamma$, $\xi = \rho\rho_0^{-1}(\gamma)$, а в N_2 — замену $\eta = \sqrt{2}\cos\gamma$, $\xi = \rho\rho_0^{-1}(\gamma)$. Тогда полученный интеграл

$$N_1 = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \eta^{-b_0}\xi^{-(b_0+a_1)}\Phi_1(t,\theta)\,d\xi d\eta; \quad |\Phi_1| \le M < \infty, \quad (b_0, b_0 + a_1) \in (0,1],$$

можно вычислять с помощью квадратурной формулы (25). Аналогично вычисляется и интеграл N_2.

Таким образом, окончательно $f_1^h = f_{122}^h + N_1^h + N_2^h$. Индексом h отмечается приближенное значение интеграла.

Замечание 5. Вместо приближения функций $\Phi_{k\nu}(t,\theta)$ в (25) кусочно-постоянными $\Phi_{k\nu}(\sigma_{ij})$ будем рассматривать для них также линейную аппроксимацию:

$$\Phi_{k\nu}^h(t,\theta) = \Phi_{k\nu}(\sigma_{ij}) + \frac{\partial}{\partial t}\Phi_{k\nu}(\sigma_{ij})(t - t^i) + \frac{\partial}{\partial\theta}\Phi_{k\nu}(\sigma_{ij})(\theta - \theta^j), \quad (t,\theta) \in E_{ij}. \tag{26}$$

15. Оценка погрешности и сходимость численного алгоритма. Представим квадратурные формулы (25) в ячейке $E_{ij} \in S$ в виде

$$f_{k\mu}^h = \iint\limits_{E_{ij}} |t-m|^{-a_m}|\theta - r|^{-b_r}\Phi_k^h(t,\theta)\,d\theta dt, \quad \mu = ij, \quad i,j = \overline{0,N},$$

и вычислим погрешность аппроксимации $\partial_h f_{k\mu} = f_{k\mu} - f_{k\mu}^h$:

$$\partial_h f_{k\mu} = \iint\limits_{E_{ij}} |t-m|^{-a_m}|\theta - r|^{-b_r}\partial_h\Phi_k(t,\theta)\,d\theta dt, \quad \mu = ij.$$

При этом в ячейках $E_{ij} \subset S_{22}$ положено $a_m = b_r = 0$.

Так как $f_{k\mu}(\omega) \in C^\infty(Q)$, то аналогичные формулы имеют место и для вектора $D^{(\varkappa)}f_{k\mu}$:

$$\partial_h(D^{(\varkappa)}f_{k\mu}) = D^{(\varkappa)}\iint\limits_{E_{ij}} |t-m|^{-a_m}|\theta - r|^{-b_r}\partial_h\Phi_k\,d\theta dt, \quad \varkappa = 0,1,2. \tag{27}$$

Поскольку $\Phi_k(t,\theta) \in C^\infty(E_{ij})$ $(a_m = b_r = 0,\ (t,\theta) \in S_{22})$ при произвольных $\omega \in Q$ из (27), учитывая порядок линейной аппроксимации (26), находим

$$\|\partial_h f_{k\mu}\|_\omega^{(2)} \le Mh^2, \quad \mu = ij, \quad (i,j) \in \overline{0,N}, \tag{28}$$

где

$$M = \sup_{k,\varkappa} \|D^{(\varkappa)}\Phi_k\|_\sigma^{(1)}, \quad k = \overline{1,N}, \quad \varkappa = 0,1,2.$$

Аналогично в каждой ячейке $E_{ij} \subset S$ имеем

$$\iint\limits_{E_{ij}} |t-m|^{-a_m}|\theta - r|^{-b_r}\, dsdt = \Delta_{\overline{m}}^{i}\Delta_{\overline{r}}^{j} \le M_0 h^{2-a}, \tag{29}$$

где $a = \max\limits_m(a_m, b_m) + \varepsilon$, $\varepsilon \le a < 2$, $0 < \varepsilon \ll 1$.

Учитывая (28), (29), приходим к следующей оценке погрешности аппроксимации f_k:

$$\|\partial_h f_k\|_\omega^{(2)} \le Mh^{1-\alpha}, \quad 0 < \varepsilon \le \alpha < 1, \quad k = \overline{1,n}. \tag{30}$$

Рассмотрим уравнение (15) для определения возмущения $v = u^{\nu_{k+1}} - u^{\nu_k}$ одного цикла метода итераций (см. п. 4). Построим аппроксимацию входящих в коэффициенты $\frac{Df}{Du}$ этого уравнения интегральных операторов $f = (f_1, \dots, f_n)$ по формулам предыдущего пункта. Зафиксируем шаг h сетки E так, чтобы

$$\left|\left(I - \frac{Df^h}{Du}\right)\right| \ge \varepsilon_1(\delta, h) > 0, \qquad \left\|\left(I - \frac{Df^h}{Du}\right)^{-1}\right\| \le d_1(\delta, h) < \infty.$$

В силу оценок (30) такой выбор h возможен. Обратим оператор $\left(I - \frac{Df^h}{Du}\right)$ и составим аппроксимационный аналог оператора $B(v)$ в (15):

$$v = \left(I - \frac{Df^h}{Du}\right)^{-1}(A^h + \Delta_p f^h) \equiv B^h(v), \quad v \in \Omega_q. \tag{31}$$

Выбором шага деформации $|\Delta p| \le q \ll 1$ (неравенства (12)) добьемся того, чтобы аналогично $B(v)$ оператор B^h был сжимающим.

Тем самым и в этом случае справедливы утверждения теоремы 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977.
2. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Гостехиздат, 1952.
3. *Монахов В. Н.* Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Наука, 1977.
4. *Монахов В. Н.* Об одном вариационном методе решения задач гидродинамики со свободными границами // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 5. С. 1106–1121.
5. *Губкина Е. В., Монахов В. Н.* Фильтрация жидкости со свободными границами в неограниченных областях // Прикл. механика и теор. физика. 2000. Т. 41, № 5. С. 188–197.
6. *Губкина Е. В., Монахов В. Н.* Об однозначной разрешимости одного класса задач фильтрации жидкости со свободными границами в пористых средах // Региональные проблемы Сибири и Дальнего Востока. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2000. С. 9–16.
7. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир, 1969.

Статья поступила 4 января 2002 г.

Монахов Валентин Николаевич
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. Акад. М. А. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090
monakhov@hydro.nsc.ru