Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2002. Том 43, № 3

УДК 512.542

О СВОБОДНОМ ДЕЙСТВИИ ГРУППЫ НА АБЕЛЕВОЙ ГРУППЕ

В. Д. Мазуров, В. А. Чуркин

Аннотация: Действие нетривиальной группы G на (аддитивной) ненулевой группе V называется *свободным,* если $vg \neq v$ для $1 \neq g \in G, 0 \neq v \in V$.

Теорема 2. *Пусть группа G, действующая свободно на ненулевой абелевой группе, порождается непустым нормальным множеством X элементов порядка 3. Если выполнено любое из следующих условий:*

(а) *порядок $x^{-1}y$ конечен для любых элементов $x, y \in X$,*

(б) *порядок xy конечен для любых элементов $x, y \in X$,*

то G — конечная группа, изоморфная циклической группе порядка 3, $SL_2(3)$ или $SL_2(5)$.

Следствие 2. *Пусть x — элемент порядка 3 в группе G, действующей свободно на нетривиальной абелевой группе. Если для любого $g \in G$ порядок коммутатора $[x, g]$ конечен, то x лежит в конечной нормальной подгруппе группы G.*

Библиогр. 7.

Введение. Действие нетривиальной группы G на (аддитивной) ненулевой группе V называется *свободным*, если $vg \neq v$ для $1 \neq g \in G, 0 \neq v \in V$. А. Х. Журтов и один из авторов работы [1] показали, что группа G, порожденная элементами порядка 3 и действующая свободно на абелевой группе, конечна, если произведение любых двух элементов порядка 3 из G имеет конечный порядок. Доказательство этого результата основывается на теореме авторов [2], рассмотревших случай, когда G порождается двумя элементами x и y порядка 3, для которых порядки элементов xy и xy^{-1} конечны.

Цель настоящей работы — получить аналогичные результаты для свободно действующей группы, порожденной нормальным множеством X элементов порядка 3, при таких же условиях на порядки попарных произведений элементов из X.

Теорема 1. *Пусть группа G, действующая свободно на ненулевой абелевой группе, порождается непустым нормальным множеством X элементов порядка 3. Если выполнено любое из следующих условий:*

(а) *порядок $x^{-1}y$ конечен для любых элементов $x, y \in X$,*

(б) *порядок xy конечен для любых элементов $x, y \in X$,*

то G — конечная группа, изоморфная циклической группе порядка 3, $SL_2(3)$ или $SL_2(5)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00495), грантом в области фундаментального естествознания Министерства образования России (Е00–1.0–77) и грантом программы «Университеты России» (УР.04.01.031).

Следствие 1. *Пусть x — элемент порядка 3 в группе G, действующей свободно на нетривиальной абелевой группе. Если для любого $g \in G$ порядок коммутатора $[x, g]$ конечен, то x лежит в конечной нормальной подгруппе группы G.*

Отметим для сравнения близкий результат А. И. Созутова [3], описывающий подгруппу, порожденную элементами простого порядка в группе, свободно действующей на абелевой группе, при условии конечности любой подгруппы, порожденной сопряженными элементами простого порядка.

Доказательство теоремы 1 основывается на следующих двух результатах.

Предложение 1. *Пусть x, y такие элементы порядка 3 из $SL_2(\mathbb{C})$, что порядок n элемента xy конечен. Если выполнено любое из следующих двух условий:*

(а) *порядок элемента $[x, y] = x^{-1}x^y$ конечен,*

(б) *порядок элемента xx^y конечен и отличен от числа 3,*

то либо n равно одному из чисел $1, 2, 3, 4, 6, 10$ и группа $\langle x, y\rangle$ конечна, либо имеет место случай (б), $n = 14$ и порядок элемента xx^y равен 7.

Предложение 2. *Пусть x, y такие автоморфизмы порядка 3 абелевой группы V, что порядок элемента xy конечен и группа $G = \langle x, y\rangle$ действует на V свободно. Если выполнено любое из следующих двух условий:*

(а) *порядок элемента $[x, y] = x^{-1}x^y$ конечен,*

(б) *порядок элемента xx^y конечен,*

то либо n равно одному из чисел $1, 2, 3, 4, 6, 10$ и группа $\langle x, y\rangle$ конечна, либо имеет место случай (б), $n = 14$ и порядок элемента xx^y равен 7.

Строится пример, показывающий, что в предложении 2 одного условия конечности порядка xy не достаточно для заключения о конечности группы G. Более точно, доказывается, что для любого натурального числа n, отличного от $1, 2, 3, 4, 6, 10$, существует подгруппа $G = G(n)$ в $SL_2(\mathbb{C})$, обладающая следующими свойствами:

(а) G порождается двумя элементами порядка 3, порядок произведения которых равен n,

(б) порядок G бесконечен,

(в) G действует свободно на $\mathbb{C}^2$.

Кроме того, показывается, что существует бесконечная группа, действующая свободно на абелевой группе и порожденная тремя элементами порядка 3, любая пара из которых порождает конечную подгруппу.

Второй пример основан на следующей характеризации подгрупп из группы $SU(2)$ унитарных унимодулярных матриц, порожденных двумя элементами порядка 3.

Предложение 3. *Пусть x, y — неперестановочные элементы порядка 3 из $SL_2(\mathbb{C})$. Группа $G = \langle x, y\rangle$ сопряжена в $SL_2(\mathbb{C})$ с подгруппой из $SU(2)$ тогда и только тогда, когда след s элемента xy является вещественным числом, для которого $-1 < s < 2$.*

Доказательство предложений 1, 2 и 3. Решающую роль в доказательстве предложения 1 играет теорема, доказанная в [4], из которой мы приведем только необходимую нам часть.

Лемма 1. *Пусть дано непустое множество M, состоящее из трех или менее различных рациональных кратных числа π, лежащих в интервале $(0, \pi/2)$, некоторая рациональная линейная комбинация косинусов которых равна рациональному числу. Если ни одно собственное подмножество множества M не обладает таким свойством, то эта линейная комбинация совпадает с точностью до умножения на рациональное число с одной из следующих:*

$$\cos(\pi/3) = 1/2, \quad -\cos(\phi) + \cos(\pi/3 - \phi) + \cos(\pi/3 + \phi) = 0 \qquad (0 < \phi < \pi/6),$$
$$\cos(\pi/5) - \cos(2\pi/5) = 1/2, \quad \cos(\pi/7) - \cos(2\pi/7) + \cos(3\pi/7) = 1/2,$$
$$\cos(\pi/5) - \cos(\pi/15) + \cos(4\pi/15) = 1/2,$$
$$\cos(2\pi/5) - \cos(2\pi/15) + \cos(7\pi/15) = -1/2.$$

Пусть теперь x, y такие элементы порядка 3 из $SL_2(\mathbb{C})$, что порядок элемента xy равен $n \in \mathbb{N}$. Если $[x, y] = 1$, то $\langle x, y\rangle$ сопряжена с подгруппой из $SL_2(\mathbb{C})$, состоящей из диагональных матриц, и поэтому является циклической. В частности, $\langle x, y\rangle = \langle x\rangle$. Пусть $[x, y] \neq 1$. По лемме 2 из [2] можно считать, что
$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} -1 & -\lambda^{-1} \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$
где $\lambda = \cos(2\pi r/n) + i\sin(2\pi r/n)$ — примитивный корень степени n из единицы. Следы элементов $z_1 = [x, y]$ и $z_2 = xx^y$ равны соответственно $s_1 = 2 - \lambda - \lambda^{-1} + \lambda^2 + \lambda^{-2}$ и $s_2 = -1 + \lambda + \lambda^{-1} - \lambda^2 - \lambda^{-2}$. Если порядок элемента z_k, $k = 1, 2$, равен m, то $s_k = \rho + \rho^{-1}$, где $\rho = \cos(2\pi s/m) + i\sin(2\pi s/m)$ — примитивный корень степени m из единицы. Таким образом,
$$1 - \cos(2\pi r/n) + \cos(4\pi r/n) = \cos(2\pi s/m) \tag{2}$$
или соответственно
$$-1/2 + \cos(2\pi r/n) - \cos(4\pi r/n) = \cos(2\pi s/m). \tag{3}$$

По лемме 1 равенство (2) возможно только при $n = 1, 3, 4, 6, 10$, а равенство (3) — при $n = 1, 3, 4, 6, 10, 14$ и, кроме того, в случае $n = 14$ число m равно 7. Случаи $n = 1, 4, 6, 10$ по лемме 2 из [2] приводят к конечной группе $\langle x, y\rangle$. Остается рассмотреть случай $n = 3$, который для равенства (2) приводит к $m = 1$ и, следовательно, к равенству $\langle x, y\rangle = \langle x\rangle$. Для равенства (3) случай $n = 3$ исключен. Тем самым предложение 1 доказано.

Предположим теперь, что группа G, порожденная двумя элементами x, y порядка 3, действует свободно на аддитивной абелевой группе V и что порядок элемента xy конечен. Понятно, что G действует свободно, а следовательно, и точно на каждой нетривиальной G-инвариантной подгруппе из V. Пусть u — элемент из V. Поскольку $(ux^2 + ux + u)x = ux^2 + ux + u$ и G действует свободно на V, то $ux^2 + ux + u = 0$ и
$$ux^{-1} = ux^2 = -u - ux \quad \text{для любого } u \in V. \tag{4}$$
Точно так же
$$uy^{-1} = -u - uy \quad \text{для любого } u \in V. \tag{5}$$
Пусть теперь $v \in V$ — нетривиальный элемент. Определим $u_i = v(xy)^i, v_i = v(xy)^i x$, $i = 0, 1, \ldots, n - 1$, где n — порядок xy. Тогда, очевидно,
$$u_i x = v_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n - 1, \tag{6}$$

и по (4), (6)

$$v_i x = u_i x^2 = -u_i - u_i x = -u_i - v_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{7}$$

С другой стороны, по (6)

$$v_i y = u_i xy = u_{i+1} \quad \text{для } i < n-1, \quad v_{n-1} y = v(xy)^n = v = u_0. \tag{8}$$

Теперь (5) и (8) дают $v_i = u_{i+1} y^{-1} = -u_{i+1} - u_{i+1} y$ для $i < n-1$ и $v_{n-1} = u_0 y^{-1} = -u_0 - u_0 y$, поэтому

$$u_0 y = -u_0 - v_{n-1}, \quad u_j y = -u_j - v_{j-1}, \quad j = 1, \ldots, n-1. \tag{9}$$

По (6)–(9) подгруппа $U = \langle u_i, v_i | i = 0, 1, \ldots, n-1 \rangle$ является G-инвариантной. Если порядок элемента v конечен, то U и, следовательно, G конечны. Поэтому можно считать, что V без кручения, откуда следует, что U — конечномерный $\mathbb{Z}G$-модуль. Очевидно, G действует свободно на $U \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$, и без потери общности можно предполагать, что этот $\mathbb{C}G$-модуль совпадает с V. Пусть $u \in V$ — собственный вектор для xy, т. е.

$$u(xy) = \lambda u, \tag{10}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$. По (5) и (10),

$$ux = \lambda u y^{-1} = \lambda(-u - uy). \tag{11}$$

Положим $w_1 = u$, $w_2 = ux$. Тогда (4), (5) и (11) показывают, что

$$w_1 x = w_2, \quad w_2 x = -w_1 - w_2, \quad w_1 y = -w_1 - \lambda^{-1} w_2, \quad w_2 y = \lambda w_1. \tag{12}$$

Отсюда следует, что подпространство W, порожденное элементами w_1, w_2, является G-инвариантным. Если W одномерно, то G абелева и поэтому конечна. Если W двумерно, то w_1, w_2 составляют базу в W и (12) показывает, что G изоморфна подгруппе в $SL(W)$. По предложению 1 либо G конечна, либо порядок элемента xy равен 3. В последнем случае из (12) вытекает, что след коммутатора $[x, y]$ как элемента из $SL(W)$ равен 2 и поэтому в W есть собственный вектор для $[x, y]$ с собственным значением, равным 1. Свобода действия группы G на W в этом случае дает равенство $[x, y] = 1$, которое показывает, что G конечна. Предложение 2 доказано.

Напомним, что *унитарной матрицей* называется такая квадратная $(n \times n)$-матрица x над $\mathbb{C}$, что xx^* — единичная матрица. Здесь x^* — комплексно сопряженная транспонированная матрица x. Группа $SU(n)$ состоит из унитарных матриц размерности n, определители которых равны единице. Нетрудно убедиться в том, что матрица x над $\mathbb{C}$ тогда и только тогда принадлежит $SU(2)$, когда

$$x = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad \text{где } a, b \in \mathbb{C}, \ |a|^2 + |b|^2 = 1. \tag{13}$$

Для доказательства предложения 3 нам потребуется следующий результат.

Лемма 2. 1. *Если x — элемент из $SL_2(\mathbb{C})$, след которого отличен от ± 2, то порядок x равен $n \in \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда след x равен $2\cos(2\pi k/n)$ для некоторого целого числа k, взаимно простого с n.*

2. *Пусть $x, y \in SL_2(\mathbb{C})$, след x равен α, след y равен β, след xy равен γ. Тогда либо группа $H = \langle x, y \rangle$ приводима, т. е. существует вектор из $\mathbb{C}^2$, являющийся собственным для каждого вектора из H, либо H сопряжена в $SL_2(\mathbb{C})$ с группой*

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta & -\lambda^{-1} \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

где $\lambda = -\gamma/2 + \sqrt{\gamma^2/4 - 1}$.

3. *Пусть x, y, t, z — элементы порядка 3 из $SL_2(\mathbb{C})$, след xy равен следу tz и отличен от чисел -1 и ± 2. Тогда группы $H = \langle x, y \rangle$ и $H_1 = \langle t, z \rangle$ сопряжены в $SL_2(\mathbb{C})$.*

Доказательство. 1. Пусть λ — характеристический корень элемента x. Тогда λ^{-1} также является характеристическим корнем x и $\lambda \neq \lambda^{-1}$, поскольку след x отличен от ± 2. Поэтому x сопряжен в $SL_2(\mathbb{C})$ с диагональной матрицей, ненулевые элементы которой равны λ и λ^{-1}. Если x — элемент конечного порядка n, то $\lambda = \cos(2\pi k/n) + i \sin(2\pi k/n)$, где $(k, n) = 1, \lambda^{-1} = \bar{\lambda}$ и $\lambda + \bar{\lambda} = 2\cos(2\pi k/n)$.

Обратно, если $\lambda + \bar{\lambda} = 2\cos(2\pi k/n)$, то $\lambda^2 - 2\cos(2\pi k/n)\lambda + 1 = 0$ и $\lambda = \cos(2\pi k/n) \pm i \sin(2\pi k/n)$, откуда вытекает, что порядок x равен n.

2. Очевидно, $\gamma = \lambda + \lambda^{-1}$, где $\lambda = -\gamma/2 + \sqrt{\gamma^2/4 - 1}$ — характеристический корень элемента xy. Пусть u — ненулевой вектор из $\mathbb{C}^2$, для которого $uxy = \lambda u$. Если $ux = \sigma u$ для некоторого $\sigma \in \mathbb{C}$, то u — собственный вектор для каждого элемента из H, поэтому можно предполагать, что элементы u и

$$v = ux \tag{14}$$

линейно независимы. Так как $x^2 - \alpha x + 1 = 0$, то

$$vx = ux^2 = \alpha ux - u = -u + \alpha v. \tag{15}$$

Далее,

$$vy = uxy = \lambda u. \tag{16}$$

Поскольку $y^2 - \beta y + 1 = 0$, то $\lambda uy = vy^2 = \beta vy - v = \beta\lambda u - v$, откуда

$$uy = \beta u - \lambda^{-1} v. \tag{17}$$

Равенства (14)–(17) вместе с линейной независимостью векторов показывают, что H сопряжена в $GL_2(\mathbb{C})$ с группой

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta & -\lambda^{-1} \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Поскольку любая матрица из $GL_2(\mathbb{C})$ равна произведению матрицы из $SL_2(\mathbb{C})$ на скалярную матрицу, п. 2 доказан.

3. По п. 1 порядок элемента из $SL_2(\mathbb{C})$ равен 3 тогда и только тогда, когда его след равен -1. По п. 2 либо H и H_1 сопряжены, либо некоторый вектор является собственным для любого элемента из H, либо некоторый вектор является собственным для любого элемента из H_1. Предположим, например, что вектор u является собственным для любого элемента из H. Тогда $ux = \lambda u, uy = \mu u$, где λ, μ — примитивные корни степени 3 из H. Но тогда $uxy = \lambda\mu u$ и либо $\lambda\mu = 1$, либо $\lambda\mu$ — примитивный корень степени 3 из 1. Так как след xy равен $\lambda\mu + (\lambda\mu)^{-1}$, то в первом случае этот след равен 2, а во втором — равен -1, что запрещено условием.

Лемма доказана.

Пусть теперь x, y — неперестановочные элементы порядка 3 из $SL_2(\mathbb{C})$, и пусть след s произведения xy является вещественным числом из интервала $(-1, 2)$. Тогда существует вещественное число α, для которого $s = 2\cos\alpha$. Пусть λ — характеристический корень элемента xy. Поскольку определитель xy равен 1, λ^{-1} также является характеристическим корнем элемента xy и $\lambda + \lambda^{-1} = 2\cos\alpha$, откуда $\lambda = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$ и, следовательно, $|\lambda| = 1$. Положим $a = 2(1/4 - \cos\alpha)/\sqrt{3}$. Тогда $1/4 + a^2 < 1$ и поэтому существует вещественное число b, для которого $1/4 + a^2 + b^2 = 1$, иными словами, матрица

$$t = \begin{pmatrix} -1/2 + ia & b \\ -b & -1/2 - ia \end{pmatrix}$$

принадлежит $SU(2)$. По п. 1 леммы 2 $t^3 = 1$. Положим $z = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \bar{\varepsilon} \end{pmatrix}$, где $\varepsilon = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ — примитивный корень степени 3 из единицы. Очевидно, что $z^3 = 1, H_1 = \langle z, t\rangle \leq SU(2)$ и след элемента zt равен $2\cos\alpha = \lambda + \lambda^{-1}$. По п. 3 леммы 2 группы $H = \langle x, y\rangle$ и $H_1 = \langle z, t\rangle$ сопряжены в $SL_2(\mathbb{C})$.

Предположим теперь, что x, y — элементы порядка 3 из $SU(2)$. По п. 1 леммы 2 след каждого из них равен -1. Более того, можно считать, что $x = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \bar{\varepsilon} \end{pmatrix}$, где $\varepsilon = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ — примитивный корень степени 3 из единицы. Так как y — элемент из $SU(2)$ со следом, равным -1, то по (13)

$$y = \begin{pmatrix} -1/2 + ia & b \\ -\bar{b} & -1/2 - ia \end{pmatrix},$$

где $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C}$ и $1/4 + a^2 + |b|^2 = 1$. Если $b = 0$, то $a = \pm\sqrt{3}$ и $x = y^{\pm 1}$ вопреки условию. Поэтому $a^2 < 3/4$ и

$$-\sqrt{3}/2 < a < \sqrt{3}/2. \tag{18}$$

Далее, след элемента xy равен $s = 1/2 - \sqrt{3}a$, откуда по (18) $-1 < s < 2$. Предложение 3 доказано.

Примеры.

Пример 1. Пусть

$$G = \left\langle x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} -1 & -\lambda^{-1} \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

где λ — примитивный корень из единицы натуральной степени n, отличной от 1, 2, 3, 4, 6, 10. По п. 1 леммы 2 порядок каждого из элементов x и y равен 3, а порядок элемента $xy = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1-\lambda & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ равен n. С другой стороны, по теореме 2 из [2] порядок элемента $x^{-1}y = \begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda^{-1} \\ -1 & -\lambda^{-1} \end{pmatrix}$ бесконечен. В частности, G — бесконечная группа. С другой стороны, G действует дробно линейными преобразованиями на комплексной плоскости, более того, ее можно рассматривать как подгруппу собственных движений в группе Γ, порожденной отражениями в сторонах треугольника T с углами $\pi/3, \pi/3, \pi/n$ на плоскости Лобачевского (см., например, [5, § 10.6]). В частности, Γ является фуксовой группой (определение см. в [5, § 8.1]). По следствию 9.2.9 из [5] группа Γ не содержит параболических элементов, поскольку ее фундаментальный треугольник T и его сдвиги не пересекаются с границей плоскости Лобачевского. Отсутствие параболических элементов в Γ означает, в частности, что G не содержит нетривиальных элементов со следом, равным 2, иными словами, что G действует свободно на $\mathbb{C}^2$.

Итак, группа G бесконечна, действует свободно на нетривиальной абелевой группе и порождается двумя элементами порядка 3, порядок произведения которых конечен.

Пример 2. Пусть

$$G = \left\langle x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} -1 & -\lambda^{-1} \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

где $\lambda = \cos\alpha + i\sin\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$. Тогда след s элемента xy равен $2\cos\alpha$, а след $[x, y]$ равен $2 - 2\cos\alpha + 2\cos 2\alpha$. Выберем α так, чтобы

$$\cos\alpha = 1/4 - \sqrt{1/16 + (\cos\pi/5)/2}.$$

Тогда $1 - \cos\alpha + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - \cos\alpha = \cos(\pi/5)$ и $-1 < s < 2$. С помощью леммы 1 легко проверить, что α не является рациональным кратным числа π, т. е. λ не является корнем из единицы и, следовательно, порядок элемента $xy = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1-\lambda & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ бесконечен. В частности, бесконечна группа G. По предложению 3 G сопряжена с подгруппой из $SU(2)$ и поэтому действует свободно на $\mathbb{C}^2$. Отметим попутно, что таким же способом можно получить свободу действия группы из примера 1. Поскольку след элемента $[x, y] = x^{-1}x^y$ равен $2\cos(\pi/5)$, порядок этого элемента по п. 1 леммы 2 равен 10. По теореме 2 из [2] подгруппа $\langle x, x^y\rangle$ изоморфна $SL_2(5)$. Так как $\langle x, x^y\rangle^{y^2} = \langle x^y, x^{y^2}\rangle^y = \langle x, x^{y^2}\rangle$, то $\langle x, x^y\rangle \simeq \langle x^y, x^{y^2}\rangle \simeq \langle x, x^{y^2}\rangle \simeq SL_2(5)$. Пусть H — группа, порожденная элементами $x_1 = x, x_2 = x^y, x_3 = x^{y^2}$. Очевидно, H является нормальной подгруппой конечного индекса в G, поэтому ее порядок бесконечен. Она действует свободно на абелевой группе $\mathbb{C}^2$, и при этом любая пара элементов x_i, x_j при $i, j = 1, 2, 3$ порождает конечную подгруппу.

Доказательство теоремы 1 и следствия. Пусть группа G, порожденная непустым инвариантным множеством X элементов порядка 3, действует свободно на ненулевой аддитивной группе V. Предположим, что выполнено одно из следующих условий:

(а) для любых $x, y \in X$ порядок $x^{-1}y$ конечен,

(б) для любых $x, y \in X$ порядок xy конечен.

Лемма 3. *Если $x, y \in X$, то группа $\langle x, y\rangle$ конечна.*

Доказательство. Пусть выполнено условие (а). Тогда $y^{-1}xy \in X$ и, следовательно, порядок элемента $x^{-1}y^{-1}xy$ конечен. Этот порядок совпадает с порядком элемента $(x^{-1}y^{-1}xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}yx$ и, значит, с порядком элемента $xy^{-1}x^{-1}y = [x^{-1}, y]$. Итак, порядки элементов $x^{-1}y$ и $[x^{-1}, y]$ конечны. По предложению 2 подгруппа $\langle x, y\rangle = \langle x^{-1}, y\rangle$ конечна.

Пусть выполнено условие (б). Тогда $x^y \in X$ и поэтому порядки элементов xy и xx^y конечны. По предложению 2 либо $\langle x, y\rangle$ — конечная группа, либо порядок n элемента xz, где $z = x^y$, равен 7. Последнее невозможно, поскольку в этом случае $x^z \in X$ и, следовательно, порядок xx^z конечен, что противоречит предложению 2. Лемма доказана.

Будем рассматривать G как подгруппу мультипликативной полугруппы кольца E эндоморфизмов группы V.

Лемма 4. *Умножение в E справа на элементы из G определяет свободное действие G на аддитивной группе E. Если $g \in G$ — элемент порядка 3, то $g^{-1} = g^2 = -1 - g$. Если $g \in G$ — элемент порядка 2, то $g = -1$.*

Доказательство. Пусть $0 \neq e \in E$. Тогда существует такой элемент $v \in V$, что $ve \neq 0$, и поэтому для любого нетривиального элемента $g \in G$ справедливо неравенство $v(eg) = (ve)g \neq ve$, из которого вытекает, что $eg \neq e$.

Если $g \in G$ — элемент порядка 3, то $(1 + g + g^2)g = 1 + g + g^2$, что дает $1+g+g^2 = 0$ или $g^{-1} = g^2 = -1-g$. Аналогично если $g \in G$ — элемент порядка 2, то $(1 + g)g = 1 + g$, откуда $1 + g = 0$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Любая конечная подгруппа группы G, порожденная элементами из X, либо циклична, либо изоморфна $SL_2(3)$, либо изоморфна $SL_2(5)$.*

Доказательство вытекает из описания конечных групп регулярных автоморфизмов абелевых групп [6].

Нам будут нужны следующие две леммы из [1] (леммы 9 и 13 соответственно).

Лемма 6. 1. *Пусть элементы x, y порядка 3 порождают $SL_2(5)$. Тогда порядки xy и xy^{-1} равны 10.*

2. *Пусть элементы x, y порядка 3 порождают $SL_2(3)$. Тогда с точностью до замены y на y^{-1} порядок xy равен 4 и порядок xy^{-1} равен 6.*

Лемма 7. *Если x, y, z — элементы порядка 3 из X такие, что $(xz)^2 = (yz)^2 = -1$, то либо $\langle x, y\rangle = \langle x\rangle$ и $\langle x, y, z\rangle \simeq SL_2(3)$, либо $\langle x, y, z\rangle = \langle x, y\rangle$, либо $(xy)^2 = -1$ и $\langle x, y, z\rangle \simeq SL_2(5)$.*

Кроме того, нам потребуется следующее задание знакопеременной группы A_n образующими и определяющими соотношениями (см. [7, с. 172]).

Лемма 8. *Пусть $3 \leq n \in \mathbb{Z}, H_n = \langle x_3, \dots, x_n | x_i^3 = (x_i x_j)^2 = 1, 3 \leq i \neq j \leq n\rangle$. Тогда отображение $x_i \to (1, 2, i) \in A_n$ продолжается до изоморфизма группы H_n на знакопеременную группу A_n.*

Пусть теперь x — элемент порядка 3 из X. Если все элементы из X содержатся в $\langle x\rangle$, то $G = \langle x\rangle$, и теорема доказана. Предположим, что существует такой элемент y из X, что $L = \langle x, y\rangle \neq \langle x\rangle$. По леммам 3 и 5 L изоморфна $SL_2(3)$ или $SL_2(5)$. Мы можем считать, что $G \neq L$, поэтому существует элемент $z \in X \setminus L$.

Предположим вначале, что среди подгрупп вида $\langle x, x^g\rangle$ нет подгрупп, изоморфных $SL_2(5)$. Тогда $\langle x, z\rangle \simeq \langle x, y\rangle \simeq \langle y, z\rangle \simeq SL_2(3)$. Заменив, если нужно, z на z^{-1} и y на y^{-1}, мы можем считать по п. 2 леммы 6, что $(xy)^2 = (xz)^2 = -1$. Если $(yz)^2 = -1$, то по леммам 8 и 5 $\langle x, y, z\rangle \simeq SL_2(5)$ вопреки предположению. По лемме 5 $x \in \langle y, z\rangle \simeq SL_2(3)$ и $\langle x, y, z\rangle = \langle x, y\rangle$ вопреки выбору элемента z.

Итак, можно считать, что $L = \langle x, y\rangle \simeq SL_2(5)$ и поэтому $L/\langle -1\rangle \simeq A_5$. Все элементы порядка 3 из L сопряжены и, следовательно, лежат в X. Пусть $\bar{a} = (123), \bar{b} = (124), \bar{c} = (125) \in A_5$. Тогда $(\bar{a}\bar{b})^2 = (\bar{a}\bar{c})^2 = (\bar{b}\bar{c})^2 = 1$. Пусть a, b, c — прообразы порядка 3 элементов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ в L. Тогда a, b, c принадлежат X, порождают L и $(ab)^2 = (ac)^2 = (bc)^2 = -1$ по лемме 6.

Если $\langle a, z\rangle \simeq SL_2(3)$, то с точностью до замены z на z^{-1} можно предполагать, что $(az)^2 = -1$. Если дополнительно $(bz)^2 \neq -1$, то по лемме 7 $a \in \langle b, z\rangle$ и так как $z \notin \langle a, b\rangle$, то $K = \langle a, b, z\rangle = \langle b, z\rangle \simeq SL_2(5)$. Если $(bz)^2 = -1$, то по леммам 8 и 4 $K = \langle a, b, z\rangle \simeq SL_2(5)$.

Таким образом, в любом случае G содержит подгруппу $K \simeq SL_2(5)$ такую, что $K \neq L$ и $K \cap L$ содержит подгруппу, изоморфную $SL_2(3)$. Так как $|SL_2(5)|/|SL_2(3)| = 5$, то $L \cap K \simeq SL_2(3)$. Выберем в $L \cap K$ элементы a, b порядка 3, для которых $(ab)^2 = -1$. Поскольку все элементы порядка 3 из K и L сопряжены, то $a, b \in X$ и существует такой элемент $c \in L \cap X$, что $(ac)^2 = (bc)^2 = -1$ и $L = \langle a, b, c\rangle$. Аналогично $K \cap X$ содержит такой элемент d, что $(ad)^2 = (bd)^2 = -1$ и $K = \langle a, b, d\rangle$. Если $(cd)^2 \neq -1$, то по лемме 7 $a, b \in \langle c, d\rangle$ и, следовательно, $\langle L, K\rangle \leq \langle c, d\rangle$, что по лемме 5 невозможно. Поэтому $(cd)^2 = -1$ и по лемме 8 $\langle a, b, c, d\rangle/\langle -1\rangle \simeq A_6$, что снова противоречит лемме 5. Теорема 1 доказана.

Пусть теперь выполнены условия следствия. Положим

$$X = x^G = \{x^g \mid g \in G\}.$$

Тогда для любых $u = x^g, v = x^h \in X$ порядок элемента $u^{-1}v = (x^{-1}x^{hg^{-1}})^g = [x, hg^{-1}]^g$ конечен. По теореме 1 $\langle X\rangle$ — конечная группа. Следствие доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Журтов А. Х., Мазуров В. Д.* О группах Фробениуса, порожденных квадратичными элементами. Алгебра и логика (в печати).
2. *Мазуров В. Д., Чуркин В. А.* О группе, свободно действующей на абелевой группе // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 4. С. 888–891.
3. *Созутов А. И.* О строении неинвариантного множителя в некоторых группах Фробениуса // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 4. С. 893–901.
4. *Conway J. H., Jones A. J.* Trigonometric diophantine equations (on vanishing sums of roots of unity) // Acta Arithm. 1976. V. 30, N 3. P. 229–240.
5. *Бердон А.* Геометрия дискретных групп. М.: Наука, 1986.
6. *Zassenhaus H.* Kennzeichnung endlicher linearen Gruppen als Permutationsgruppen // Abhandl. math. Semin. Univ. Hamburg. 1936. V. 11. P. 17–40.
7. *Carmichael R. D.* Introduction to the theory of groups of finite order. Boston: Gime & Co, 1937.

Статья поступила 10 апреля 2002 г.

Мазуров Виктор Данилович, Чуркин Валерий Авдеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
mazurov@math.nsc.ru, churkin@math.nsc.ru