Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2002. Том 43, № 3

УДК 517.95

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Е. А. Мазепа

Аннотация: Предлагается новый подход к постановке краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений на произвольных римановых многообразиях, основанный на введении классов эквивалентных на многообразии M функций. На основе данного подхода устанавливается взаимосвязь между разрешимостью краевых и внешних краевых задач для стационарного уравнения Шредингера, доказывается справедливость теоремы сравнения и теоремы единственности для решений краевых задач в указанной постановке, кроме того, получены условия, при выполнении которых сохраняется разрешимость краевых задач при изменении коэффициента в уравнении Шредингера. Библиогр. 12.

1. Введение

Проблема разрешимости различных краевых задач (в том числе задачи Дирихле) для эллиптических дифференциальных уравнений на римановых многообразиях с предписанными граничными данными на «бесконечности» является достаточно интересной в анализе и геометрии. Истоки указанной проблематики восходят к классификационной теории некомпактных римановых многообразий, основанной на изучении функциональных пространств (например, пространств гармонических функций) на римановых многообразиях. Многие проблемы, относящиеся к данному направлению, можно сформулировать в виде теорем типа Лиувилля, утверждающих тривиальность пространств ограниченных решений некоторых эллиптических уравнений на многообразии (см. [1–8]).

Проблема разрешимости задачи Дирихле о восстановлении решения уравнения по граничным данным на «бесконечности» является в некотором смысле двойственной по отношению к справедливости теоремы Лиувилля на многообразии. С этой точки зрения наибольший интерес представляют некомпактные и особенно полные римановы многообразия. Заметим, что сама постановка задачи Дирихле на таких многообразиях может оказаться проблематичной, поскольку неясно, как понимать граничные данные. С другой стороны, если многообразие допускает некоторую геометрическую компактификацию, то постановка краевых задач на таком многообразии, в том числе и задачи Дирихле, осуществляется так же, как и для ограниченных областей в $\mathbb{R}^n$ (см., например, [8–12]).

В настоящей работе предлагается новый подход к постановке краевых задач на некомпактных римановых многообразиях, основанный на введении понятия классов эквивалентных на многообразии M непрерывных ограниченных функций.

В основе работы лежит изучение ограниченных решений стационарного уравнения Шредингера

$$Lu \equiv \Delta u - c(x)u = 0, \tag{1}$$

где $c(x)$ — гладкая неотрицательная функция, на некомпактном римановом многообразии M без края.

Особый интерес представляет взаимосвязь между разрешимостью внешней краевой задачи Дирихле и геометрией многообразия. Так, в [3] установлена связь между справедливостью лиувиллевых теорем для ограниченных решений уравнения (1) и однозначной разрешимостью внешних краевых задач для произвольных римановых многообразий.

В данной работе, используя новый подход к постановке краевых задач на произвольном некомпактном римановом многообразии, мы устанавливаем зависимость между разрешимостью краевых и внешних краевых задач. Более того, получены условия разрешимости некоторых краевых задач при изменении коэффициента $c(x)$ в уравнении (1).

2. Краевые и внешние краевые задачи

Пусть M — произвольное гладкое связное некомпактное риманово многообразие без края, $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — исчерпание многообразия M, т. е. последовательность предкомпактных открытых подмножеств риманова многообразия M таких, что $\overline{B}_k \subset B_{k+1}$, $M = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$.

Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — непрерывные ограниченные на M функции. Будем говорить, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ *эквивалентны на* M, и использовать обозначение $f_1(x) \sim f_2(x)$, если для некоторого исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ многообразия M выполнено равенство

$$\lim_{k\to\infty} \|f_1(x) - f_2(x)\|_{C^0(M\setminus B_k)} = 0,$$

где $\|f(x)\|_{C^0(G)} = \sup\limits_{G} |f(x)|$.

Несложно проверить, что отношение «$\sim$» является отношением эквивалентности, не зависит от выбора исчерпания многообразия и, таким образом, разбивает множество всех непрерывных ограниченных на M функций на классы эквивалентности. Обозначим класс эквивалентных f функций через $[f]$.

Будем говорить, что для уравнения (1) на M *разрешима краевая задача с граничными условиями из класса* $[f]$, если на M существует решение $u(x)$ уравнения (1) такое, что $u \in [f]$.

Пусть $B \subset M$ — произвольное связное компактное подмножество с гладкой границей и $B \subset B_k$ для всех k. Будем говорить, что для уравнения (1) на $M \setminus B$ *разрешима внешняя краевая задача с граничными условиями из класса* $[f]$, если для любой непрерывной на ∂B функции $\Phi(x)$ на $M \setminus B$ существует решение $u(x)$ уравнения (1) такое, что $u \in [f]$ и $u|_{\partial B} = \Phi|_{\partial B}$.

Заметим, что если многообразие M имеет компактный край или существует естественная геометрическая компактификация многообразия M (например, на многообразиях отрицательной секционной кривизны, на сферически-симметричных многообразиях), добавляющая границу на бесконечности, данный подход естественным образом приводит к классической постановке задачи Дирихле (см., например, [8–12]).

Всюду в дальнейшем будем считать, что $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — исчерпание многообразия M с гладкими границами ∂B_k. Обозначим через v_k решение уравнения (1) в $B_k \setminus B$, удовлетворяющее условиям

$$v_k|_{\partial B} = 1, \quad v_k|_{\partial B_k} = 0.$$

Используя принцип максимума, легко проверить, что последовательность v_k равномерно ограничена на $M \setminus B$ и, следовательно, компактна в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций на любом компактном подмножестве $G \subset (M \setminus B)$. Более того, при $k \to \infty$ она монотонно возрастает и сходится на $M \setminus B$ к решению уравнения (1):

$$v = \lim_{k\to\infty} v_k, \quad 0 < v \le 1, \quad v|_{\partial B} = 1.$$

Заметим также, что функция v не зависит от выбора исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$. Функцию v будем называть *L-потенциалом компакта B относительно многообразия M*. Для уравнения Лапласа — Бельтрами функция v есть не что иное, как емкостный потенциал компакта B относительно многообразия M (см. [4]).

Многообразие M будем называть *L-строгим* многообразием, если для некоторого компакта $G \subset M$ существует L-потенциал v такой, что $v \in [0]$ (если $L = \Delta$, то многообразие будем называть *Δ-строгим*).

Заметим, что из Δ-строгости многообразия M следует его L-строгость (обратное неверно). Кроме того, понятие L-строгости не зависит от выбора компакта.

Сформулируем основные результаты.

Теорема 1. *Пусть на $M \setminus B$ для любой постоянной A существует решение $u(x)$ уравнения* (1) *такое, что $u \in [f]$ и $u|_{\partial B} = A|_{\partial B}$. Тогда на M для уравнения* (1) *разрешима краевая задача с граничными условиями из того же класса.*

Следствие 1. *Пусть на $M \setminus B$ для уравнения* (1) *разрешима внешняя краевая задача с граничными условиями из класса $[f]$. Тогда на M для уравнения* (1) *разрешима краевая задача с граничными условиями из того же класса.*

Теорема 2. *Пусть на L-строгом многообразии M для уравнения* (1) *разрешима краевая задача с граничными условиями из класса $[f]$. Тогда на $M \setminus B$ разрешима внешняя краевая задача с граничными условиями из класса $[f]$.*

Очевидно, что отношение эквивалентности функций характеризует поведение функций вне произвольного компактного подмножества $B \subset M$, и если изменить значения функции f на компакте B, то вновь полученная функция будет эквивалентна исходной. В этой связи будем говорить, что функция w *асимптотически неотрицательна*, если на M существует непрерывная ограниченная функция $f \ge 0$ такая, что $w \sim f$.

Докажем некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть $Lw \le 0$ на $M \setminus B$, $w|_{\partial B} \ge 0$, w асимптотически неотрицательна. Тогда $w \ge 0$ на $M \setminus B$.*

Доказательство. Допустим, что существует точка $x^* \in M \setminus B$ такая, что $w(x^*) < 0$. Так как последовательность $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ монотонно возрастает, будем считать, что $x^* \in B_k \setminus B$ для всех k. Поскольку w асимптотически неотрицательна, существует функция $f \ge 0$ такая, что $w \sim f$, т. е.

$$\lim_{k\to\infty} \|w - f\|_{C^0(M \setminus B_k)} = 0.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $K = K(\varepsilon)$ такое, что для всех $k \geq K(\varepsilon)$ выполнено $\sup\limits_{M\setminus B_k} |w(x) - f(x)| < \varepsilon$, а значит, $|w - f| < \varepsilon$ на ∂B_k.

Возьмем $\varepsilon = |w(x^*)|$. Тогда для $k \geq K(\varepsilon)$ имеет место следующее неравенство:

$$|w(x) - f(x)| < |w(x^*)| \quad \text{при } x \in \partial B_k.$$

Следовательно, $w(x) > f(x) - |w(x^*)| \geq -|w(x^*)| = w(x^*)$ для всех $x \in \partial B_k$. Кроме того, из условия $w|_{\partial B} \geq 0$ получаем, что $w(x) > w(x^*)$ для всех $x \in \partial B$.

Далее, функция $w(x)$, будучи непрерывной на компакте $\overline{B_K \setminus B}$, достигает минимального значения. Пусть $w(x^{**}) = \min\limits_{\overline{B_K\setminus B}} w(x)$, при этом $w(x^{**}) \leq w(x^*) < 0$ и $x^{**} \in B_K \setminus \overline{B}$. Таким образом, точка x^{**} является внутренней точкой отрицательного минимума функции $w(x)$ в области $B_K \setminus B$, что противоречит сильному принципу максимума для оператора L. Лемма доказана.

Следствие 2. *Пусть $Lw \leq Lu$ на $M \setminus B$, $w|_{\partial B} \geq u|_{\partial B}$, $w \sim u$. Тогда $w \geq u$ на $M \setminus B$. Если же $Lw = Lu$ на $M \setminus B$ и $w|_{\partial B} = u|_{\partial B}$, $w \sim u$, то $w = u$ на $M \setminus B$.*

Лемма 2. *Пусть $Lw \leq 0$ на M, w асимптотически неотрицательна. Тогда $w \geq 0$ на M.*

Доказательство. Допустим, что существует точка $x^* \in M$, где $w(x^*) < 0$. Так как последовательность $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ монотонно возрастает, будем считать, что $x^* \in B_k$ для всех k. Поскольку w асимптотически неотрицательна, существует функция $f \geq 0$ такая, что $w \sim f$. Тогда

$$\lim_{k\to\infty} \|w(x) - f(x)\|_{C^0(M\setminus B_k)} = 0$$

и, как в лемме 1, для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $K = K(\varepsilon) > 0$ такой, что для всех $k \geq K(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\sup\limits_{M\setminus B_k} |w(x) - f(x)| < \varepsilon$, а, значит, $|w(x) - f(x)| < \varepsilon$, $x \in \partial B_k$.

Проводя рассуждения, как и в лемме 1, получаем существование в области B_K внутренней точки отрицательного минимума функции $w(x)$, что противоречит сильному принципу максимума для оператора L и доказывает лемму.

Следствие 3. *Пусть $Lw \leq Lu$ на M и $w \sim u$. Тогда $w \geq u$ на M. Если же $Lw = Lu$ на M и $w \sim u$, то $w \equiv u$ на M.*

Следствия 2 и 3 непосредственно влекут за собой выполнение теоремы единственности для решений краевой и внешней краевой задач для уравнения (1) с граничными условиями из класса $[f]$.

Перейдем к доказательству основных результатов.

3. Доказательство теоремы 1

Обозначим через $u_0 \in [f]$ решение внешней краевой задачи для уравнения (1) на $M \setminus B$, удовлетворяющее условию $u_0|_{\partial B} = 0$.

Рассмотрим последовательность функций ϕ_i, являющихся решением задачи

$$L\phi_i = 0 \text{ в } B_i, \quad \phi_i|_{\partial B_i} = u_0|_{\partial B_i}.$$

Используя принцип максимума, для всех i имеем

$$|\phi_i| \leq \sup_{B_i} |\phi_i| = \sup_{\partial B_i} |\phi_i| = \sup_{\partial B_i} |u_0| \leq \sup_{M} |u_0|,$$

откуда следует равномерная ограниченность семейства функций $\{\phi_i\}_{k=1}^{\infty}$ на M.

Учитывая равномерную ограниченность семейства функций $\{\phi_i\}$, получаем его компактность в классе $C^2(G)$ для произвольного компактного подмножества $G \subset M$. В свою очередь, компактность семейства $\{\phi_i\}_{k=1}^{\infty}$ влечет существование предельной функции $u = \lim_{i\to\infty} \phi_i$, которая является решением уравнения (1) на M.

Докажем, что $u(x) \in [f]$. Действительно, в силу непрерывности функции $u(x)$ существуют

$$U_1 = \min_{\partial B} u(x), \quad U_2 = \max_{\partial B} u(x).$$

Тогда $U_1 \le u|_{\partial B} \le U_2$ и, следовательно, при достаточно больших i выполнены неравенства

$$U_1 - 1 \le \phi_i|_{\partial B} \le U_2 + 1.$$

Пусть $A_1 = \min\{0, U_1 - 1\}$, $A_2 = \max\{0, U_2 + 1\}$. Учитывая, что $u_0|_{\partial B} = 0$, имеем $A_1 \le u_0|_{\partial B} \le A_2$, и $A_1 \le \phi_i|_{\partial B} \le A_2$ для достаточно больших i.

Согласно условию теоремы на $M \setminus B$ существуют решения $u_1(x) \in [f]$ и $u_2(x) \in [f]$ уравнения $Lu = 0$, удовлетворяющие условиям

$$u_1|_{\partial B} = A_1, \quad u_2|_{\partial B} = A_2.$$

Так как $u_1 \sim u_2 \sim u_0$ и $u_1|_{\partial B} \le u_0|_{\partial B} \le u_2|_{\partial B}$, ввиду следствия 2 на $M \setminus B$ получаем $u_1 \le u_0 \le u_2$. Тогда для достаточно больших i выполнены соотношения

$$u_1|_{\partial B_i} \le \phi_i|_{\partial B_i} = u_0|_{\partial B_i} \le u_2|_{\partial B_i}, \quad u_1|_{\partial B} \le \phi_i|_{\partial B} \le u_2|_{\partial B}.$$

Применяя принцип сравнения к функциям ϕ_i, для достаточно больших i на множестве $B_i \setminus B$ имеем $u_1 \le \phi_i \le u_2$. Переходя к пределу при $i \to \infty$, на $M \setminus B$ получим $u_1 \le u \le u_2$. Учитывая, что $u_1 \sim u_2 \sim u_0$, приходим к эквивалентности $u \sim u_0$ и, следовательно, $u \in [f]$. Теорема 1 доказана.

Замечание. В условиях теоремы 1 многообразие M является L-строгим.

4. Доказательство теоремы 2

Докажем сначала, что на $M \setminus B$ для любой непрерывной на ∂B функции $\Phi(x)$ существует решение w уравнения (1) такое, что $w|_{\partial B} = \Phi$, $w \in [0]$. Рассмотрим последовательность функций w_k, являющихся решением следующих краевых задач:

$$Lw_k = 0 \text{ в } B_k \setminus B, \quad w_k|_{\partial B} = \Phi, \quad w_k|_{\partial B_k} = 0.$$

Учитывая принцип максимума, для любого k имеем

$$|w_k| \le \sup_{\partial(B_k \setminus B)} |w_k| = \sup_{\partial B} |\Phi|,$$

т. е. последовательность $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно ограничена на M и, следовательно, компактна в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций на любом компактном подмножестве в M. Пусть $w(x)$ — предельная функция. Покажем сначала, что $w|_{\partial B} = \Phi$.

Обозначим $U = \max_{\partial B} |\Phi|$ и рассмотрим в $B_1 \setminus B$ функции w^- и w^+, которые являются соответственно решениями следующих краевых задач:

$$Lw^- = 0 \text{ в } B_1 \setminus B, \quad w^-|_{\partial B} = \Phi, \quad w^-|_{\partial B_1} = -(U + 1)$$

и
$$Lw^+ = 0 \text{ в } B_1 \setminus B, \quad w^+|_{\partial B} = \Phi, \quad w^+|_{\partial B_k} = U + 1.$$
Тогда для всех k
$$w_k|_{\partial B} = w^-|_{\partial B} = w^+|_{\partial B}, \quad w^-|_{\partial B_1} \le w_k|_{\partial B_1} \le w^+|_{\partial B_1},$$
откуда согласно принципу сравнения на множестве $B_1 \setminus B$ для всех k имеем $w^- \le w_k \le w^+$. Переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем $w^- \le w \le w^+$. Так как $w^-|_{\partial B} = w^+|_{\partial B} = \Phi$, то и $w|_{\partial B} = \Phi$.

Далее покажем, что $w \in [0]$. Очевидно, что
$$-(U+1) \le \Phi \le (U+1), \quad -(U+1) \le w|_{\partial B} \le U+1$$
и для любого k
$$-(U+1) \le w_k|_{\partial B} \le U+1.$$

Рассмотрим на $M \setminus B$ функции $u_1 = -(U+1) \cdot v$ и $u_2 = (U+1) \cdot v$, где v — L-потенциал компакта B, $v \in [0]$. Функции u_1 и u_2 являются решениями уравнения (1) и удовлетворяют условиям
$$u_1|_{\partial B} = -(U+1), \quad -(U+1) \le u_1 \le 0, \quad u_1 \in [0],$$
$$u_2|_{\partial B} = (U+1), \quad 0 \le u_2 \le (U+1), \quad u_2 \in [0].$$
Тогда на $M \setminus B$ выполнено $u_1 \le u_2$ и с учетом принципа сравнения для всех k на множестве $B_k \setminus B$
$$u_1 \le w_k \le u_2.$$
Переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем $u_1 \le w \le u_2$. Учитывая, что $u_1 \sim u_2 \sim 0$, имеем $w \in [0]$.

Далее, пусть $u \in [f]$ — решение краевой задачи на M. Рассмотрим непрерывную на ∂B функцию $\Phi = u - \Psi$, где Ψ — произвольная непрерывная на ∂B функция. Как доказано выше, на $M \setminus B$ существует решение w уравнения (1) такое, что $w|_{\partial B} = \Phi$ и $w \in [0]$. Тогда функция $u - w$ будет искомым решением внешней краевой задачи на $M \setminus B$ с граничными условиями из класса $[f]$. Теорема 2 доказана.

Замечание. В условиях теоремы 2 внешняя краевая задача с граничными условиями из класса $[f]$ разрешима вне любого связного компактного подмножества $B' \subset M$ с гладкой границей $\partial B'$.

5. О разрешимости краевых задач для уравнения Шредингера при изменении коэффициента $c(x)$

В этом пункте наряду с уравнением (1) рассматривается уравнение
$$L_1 u \equiv \Delta u - c_1(x) u = 0, \tag{2}$$
где $0 \le c_1(x) \le c(x)$, $c_1(x)$ — гладкая на M функция.

В работе [3] показано, что если $c_1(x) \not\equiv 0$, то из справедливости двусторонней теоремы Лиувилля для уравнения (2) следует ее выполнение и для уравнения (1). Естественно возникает вопрос о том, как связаны разрешимость краевой задачи для уравнения (1) с граничными условиями из класса $[f]$ и разрешимость аналогичной краевой задачи для уравнения (2).

Будем говорить, что многообразие M является L-*точным*, если на нем существует решение u уравнения $Lu = 0$, удовлетворяющее условию $u \in [1]$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть на L-точном многообразии M для уравнений $Lu = 0$ и $\Delta u = 0$ на $M \setminus B$ разрешимы внешние краевые задачи с граничными условиями из класса $[f]$. Тогда на $M \setminus B$ разрешима внешняя краевая задача для уравнения $L_1 u = 0$ с граничными условиями из класса $[f]$.*

Доказательство. Пусть $f \geq 0$ на $M \setminus B$, и пусть $u_0 \in [f]$ — ограниченное решение краевой задачи для уравнения $Lu_0 = 0$ на M. Его существование следует из теоремы 1. По лемме 2 $u_0 \geq 0$ на M.

Рассмотрим последовательность функций $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$, являющихся решением задачи

$$L_1 \phi_k = 0 \text{ в } B_k, \quad \phi_k|_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k}.$$

Учитывая принцип максимума, для всех k имеем

$$0 \leq \phi_k \leq \sup_{\partial B_k} \phi_k = \sup_{\partial B_k} u_0 \leq \sup_M u_0,$$

откуда следует равномерная ограниченность семейства функций $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ на M.

Кроме того, $L\phi_k = \Delta\phi_k - c(x)\phi_k \leq \Delta\phi_k - c_1(x)\phi_k = 0$, $Lu_0 = 0$ в B_k, $\phi_k|_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k}$. Тогда с учетом принципа сравнения в B_k выполнено $\phi_k \geq u_0 \geq 0$. Аналогично получаем $\phi_{k+1} \geq u_0$ в B_{k+1} и, следовательно, $\phi_{k+1} \geq \phi_k$ в B_k.

Из монотонности и равномерной ограниченности вытекают существование предельной функции $u^+ = \lim\limits_{k\to\infty} \phi_k$ и компактность семейства функций $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ на любом компактном подмножестве в $G \subset M$ в классе $C^2(G)$. Следовательно, $L_1 u^+ = 0$ и $0 \leq u_0 \leq u^+$ на M.

Покажем, что $u^+ \sim u_0$. В силу непрерывности функции u^+ на ∂B существует

$$A = \max_{\partial B} u^+.$$

Значит, для достаточно больших k выполнены соотношения

$$0 \leq u_0|_{\partial B} \leq \phi_k|_{\partial B} \leq A + 1.$$

Ввиду условия на $M \setminus B$ для $[f]$ разрешима внешняя краевая задача для гармонических функций, поэтому на $M \setminus B$ существует гармоническая функция $u \in [f]$ такая, что $u|_{\partial B} = A + 1$. Тогда $u \geq 0$ и $u \sim u_0$. Так как $Lu = -c(x)u \leq 0$, $Lu_0 = 0$, $u|_{\partial B} \geq u_0|_{\partial B}$, то согласно следствию 2 получаем

$$u \geq u_0 \quad \text{на } M \setminus B.$$

Более того, имеют место следующие неравенства:

$$u_0|_{\partial B} \leq \phi_k|_{\partial B} \leq u|_{\partial B}, \quad u_0|_{\partial B_k} = \phi_k|_{\partial B_k} \leq u|_{\partial B_k}, \tag{3}$$

$$L\phi_k \leq Lu_0 \quad \text{в } B_k \setminus B, \tag{4}$$

$$L_1 u = -c_1(x)u \leq L_1\phi_k \quad \text{в } B_k \setminus B. \tag{5}$$

Тогда из (3) и (4) следует $\phi_k \geq u_0$ в $B_k \setminus B$, а из (3) и (5) — $u \geq \phi_k$ в $B_k \setminus B$. Объединяя последние неравенства, в $B_k \setminus B$ получаем $u_0 \leq \phi_k \leq u$. Переходя к пределу при $k \to \infty$, на $M \setminus B$ имеем $u_0 \leq u^+ \leq u$. Так как $u_0 \sim u \sim f$, то $u^+ \sim f$ и, следовательно, $u^+ \in [f]$.

Таким образом, теорема доказана для случая $f \geq 0$. Заметим, что если $f \leq 0$, то утверждение теоремы также остается справедливым.

Пусть теперь f — произвольная ограниченная на M функция. Обозначим $m = \inf\limits_{M\setminus B} f(x)$. Пусть $m < 0$ (случай $m \geq 0$ рассмотрен выше). Рассмотрим функцию $f_m = f - m$. Очевидно, что $f_m \geq 0$ на $M \setminus B$. Покажем, что для класса $[f_m]$ на $M \setminus B$ разрешимы внешние краевые задачи для уравнений $Lu = 0$ и $\Delta u = 0$.

Согласно условию теоремы на $M \setminus B$ для любой непрерывной на ∂B функции $\Phi(x)$ существует решение u_0 уравнения $Lu_0 = 0$ такое, что $u_0|_{\partial B} = \Phi$, $u_0 \in [f]$. Рассмотрим функцию $u_m = u_0 - v_0 \cdot m$, где v_0 — решение уравнения (1) на $M \setminus B$, удовлетворяющее условиям $v_0|_{\partial B} = 0$, $v_0 \in [1]$. Существование такого решения следует из L-точности многообразия M. Очевидно, что на $M \setminus B$

$$Lu_m = 0, \quad u_m|_{\partial B} = u_0|_{\partial B} = \Phi, \quad u_m \sim f_m = f - m,$$

т. е. на $M \setminus B$ разрешима внешняя краевая задача для уравнения $Lu = 0$ в классе функций $[f_m]$.

Аналогичное утверждение справедливо и для уравнения $\Delta u = 0$, т. е. на $M \setminus B$ существует гармоническая функция w_m, для которой

$$w_m|_{\partial B} = w_0|_{\partial B} = \Phi, \quad w_m \sim f_m = f - m.$$

Так как $f_m \geq 0$ на $M \setminus B$, то на M есть решение u_1 уравнения $L_1 u_1 = 0$ такое, что $u_1 \in [f_m]$.

Покажем, что на M разрешима краевая задача для уравнения (2) в классе $[m]$. Из условия теоремы непосредственно следует, что на $M \setminus B$ для любой непрерывной на ∂B функции Φ существует решение u_0 уравнения $Lu_0 = 0$ такое, что $u_0|_{\partial B} = \Phi$, $u_0 \in [0]$, и существует гармоническая функция w_0 такая, что $w_0|_{\partial B} = \Phi$, $w_0 \in [0]$. Тогда для любой непрерывной на ∂B функции Φ функция $u^m = u_0 + v_0 \cdot m$ удовлетворяет условиям

$$Lu^m = 0, \quad u^m|_{\partial B} = u_0|_{\partial B} = \Phi, \quad u^m \sim m,$$

а функция $w^m = w_0 + z_0 \cdot m$ — условиям

$$\Delta w^m = 0, \quad w^m|_{\partial B} = w_0|_{\partial B} = \Phi, \quad w^m \sim m,$$

где $1 - z_0$ — емкостный потенциал компакта $B \subset M$. Таким образом, на $M \setminus B$ разрешимы внешние краевые задачи для уравнений $Lu = 0$ и $\Delta u = 0$ в классе функций $[m]$, где $m = \mathrm{const} < 0$, и, следовательно, на M существует решение u_2 уравнения (2), $u_2 \in [m]$.

Наконец, рассмотрим на M функцию $u_1 + u_2$. Очевидно, что на M выполнено

$$L_1(u_1 + u_2) = 0, \quad u_1 + u_2 \in [f],$$

где f — произвольная ограниченная на M функция.

Таким образом, на M для класса $[f]$ существует решение $u \in [f]$ уравнения (2) для любой гладкой функции $c_1(x)$ такой, что $0 \leq c_1(x) \leq c(x)$.

Докажем разрешимость внешней краевой задачи для уравнения (2). В условиях теоремы многообразие M является Δ-строгим и, значит, L_1-строгим. Тогда, учитывая теорему 2, получаем разрешимость на $M \setminus B$ внешней краевой задачи для уравнения (2) с граничными условиями из класса $[f]$. Теорема доказана полностью.

Замечание. В условиях теоремы 3 на M разрешима краевая задача для уравнения $L_1 u = 0$ с граничными условиями из класса $[f]$.

В заключение хочу выразить глубокую благодарность доктору физ.-мат. наук А. Г. Лосеву и доктору физ.-мат. наук, профессору В. Г. Ткачеву за полезные обсуждения и замечания по подготовке данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sario L., Nakai M., Wang C., Chung L. O.* Classification theory of Riemannian manifolds. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1977. (Lecture Notes Math.; 605).

2. *Yau S. T.* Nonlinear analysis in geometry // Enseign. Math. 1987. V. 33, N 2. P. 109–158.

3. *Григорьян А. А., Надирашвили Н. С.* Лиувиллевы теоремы и внешние краевые задачи // Изв. вузов. Математика. 1987. № 5. С. 25–33.

4. *Grigor′yan A.* Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds // Bull. Amer. Math. Soc. 1999. V. 36, N 2. P. 135–249.

5. *Лосев А. Г.* Некоторые лиувиллевы теоремы на римановых многообразиях специального вида // Изв. вузов. Математика. 1991. № 12. С. 15–24.

6. *Лосев А. Г.* О некоторых лиувиллевых теоремах на некомпактных римановых многообразиях // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 1. С. 84–90.

7. *Losev A. G.* Elliptic partial differential equations on the warped products of Riemannian manifolds // Appl. Anal. 1999. V. 71, N 1–4. P. 325–339.

8. *Лосев А. Г., Мазепа Е. А.* Об асимптотическом поведении решений некоторых уравнений эллиптического типа на некомпактных римановых многообразиях // Изв. вузов. Математика. 1999. Т. 445, № 6. С. 41–49.

9. *Лосев А. Г., Мазепа Е. А.* Ограниченные решения уравнения Шрёдингера на некомпактных римановых многообразиях специального вида // Докл. РАН. 1999. Т. 367, № 2. С. 166–167.

10. *Sullivan D.* The Dirichlet problem at infinity for a negatively curved manifold // J. Differential Geom. 1983. V. 18. P. 723–732.

11. *Anderson M. T.* The Dirichlet problem at infinity for manifolds with negative curvature // J. Differential Geom. 1983. V. 18. P. 701–722.

12. *Murata M.* Positive harmonic functions on rotationary symmetric Riemannian manifolds // Potential Theory (Nagoya, 1990). Berlin: de Gruyter, 1992. P. 251–259.

Статья поступила 6 февраля 2001 г.

Мазепа Елена Алексеевна
Волгоградский гос. университет, математический факультет,
ул. 2-я Продольная, 30, Волгоград 400062
lmazepa@mail.ru, lmazepa@rambler.ru