*Сибирский математический журнал*
*Май—июнь, 2002. Том 43, № 3*

*УДК 517.956.3*

# ПРИНЦИП ЛИНЕАРИЗАЦИИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ЗАДАЧ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКЕ

**Н. А. Люлько**

**Аннотация:** При математическом моделировании химических процессов в псевдоожиженном слое катализатора возникают смешанные задачи на плоскости переменных $x$, $t$, в которых к гиперболическим системам добавляется эволюционное интегральное уравнение. Исследуется вопрос о справедливости теоремы по первому приближению для рассматриваемых эволюционных задач. Библиогр. 11.

При математическом моделировании процессов тепло- и массопереноса в химическом реакторе возникают краевые задачи для нелинейных систем гиперболических уравнений [1,2].

В работе [3] были изучены качественные свойства решений следующей краевой задачи в полуполосе $\Pi = (0,1) \times (0,\infty)$:

$$U_t + K(x)U_x = \Phi(x,U), \quad (x,t) \in \Pi, \tag{1}$$

$$I_0 U(0,t) + I_1 U(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$U(x,0) = U_0(x). \tag{3}$$

Здесь $U(x,t) = (u_1(x,t),\dots,u_n(x,t))^T$ — вектор неизвестных функций, $\Phi(x,U) = (\Phi_1(x,U),\dots,\Phi_n(x,U))^T$ — известный вектор гладких функций, $K(x)$ — диагональная матрица с элементами $k_i(x) > 0$ $(i = 1,\dots,p)$, $k_i(x) < 0$ $(i = p+1,\dots,n)$, $k_i(x) \neq k_j(x)$ $(i \neq j)$. Предполагается, что $p(n-p) \neq 0$, а матрицы $I_0$, $I_1$ имеют следующий вид:

$$I_0 = \begin{pmatrix} E^{p,p} & A^{p,n-p} \\ O^{n-p,p} & O^{n-p,n-p} \end{pmatrix}, \quad I_1 = \begin{pmatrix} O^{p,p} & O^{p,n-p} \\ B^{n-p,p} & E^{n-p,n-p} \end{pmatrix}.$$

Здесь $E^{k,k}$ — единичная матрица размерности $k \times k$; $O^{m,k}$ — нулевая матрица размерности $m \times k$; $A^{m,n-m} = \alpha_{ij}$; $B^{n-m,m} = \beta_{ji}$ $(i = 1,\dots,m,\ j = m+1,\dots,n)$, где $\alpha_{ij}$, $\beta_{ji}$ — вещественные числа, $k$, $m$ — натуральные числа.

Смешанные задачи для гиперболических систем вида (1) рассматривались в работах многих авторов (см., например, библиографию в [4]). Так, вопрос о корректности постановок задачи (1)–(3) в случае, когда $\Phi$ — линейная функция по $U$, в пространстве непрерывных, непрерывно дифференцируемых и суммируемых функций рассматривался Б. Л. Рождественским и Н. Н. Яненко [5], В. Э. Аболиней и А. Д. Мышкисом [6], С. К. Годуновым [7].

Но во всех конкретных моделях, как правило, имеется одно или несколько стационарных решений, и поэтому для приложений естественным и важным является также вопрос об устойчивости стационарных решений возникающих гиперболических задач.

В работе [3] обоснован принцип линеаризации для задачи (1)–(3). Пусть $U_c$ — гладкое стационарное решение этой задачи. Без ограничения общности можно считать, что $U_c(x) \equiv 0$, $\Phi(x, 0) = 0$.

Определение 1. Нулевое решение рассматриваемой задачи называется *асимптотически устойчивым с показателем* $\gamma > 0$ *в пространстве* $C^1[0,1]$, если существует $\delta > 0$ такое, что для любой функции $U_0(x) \in C^1[0,1]$, удовлетворяющей условиям согласования нулевого и первого порядков, т. е.

$$I_0U_0(0) + I_1U_0(1) = 0 \quad \text{и} \quad I_0U_1(0) + I_1U_1(1) = 0, \tag{4}$$

где

$$U_1(x) = -K(x)\frac{dU_0(x)}{dx} + \Phi(x, U_0),$$

а также оценке $\|U_0(x)\|_{C^1[0,1]} \leq \delta$ существует при всех $t > 0$ единственное классическое решение $U(x,t)$ рассматриваемой задачи, причем

$$\|U(x,t)\|_{C^1[0,1]} \leq Ke^{-\gamma t}\|U_0(x)\|_{C^1[0,1]},$$

где $K$ не зависит от $t$, $U_0(x)$.

Рассмотрим наряду с системой (1) линеаризованную систему, которая получается, если разложить правые части системы (1) по формуле Тейлора в окрестности нулевого решения и отбросить слагаемые, содержащие $U$ в степени, большей чем первая:

$$U_t + K(x)U_x = A(x)U, \tag{5}$$

где матрица $A(x)$ имеет вид

$$A(x) = \left( \frac{\partial \Phi_i(x,U)}{\partial u_j}\bigg|_{U=0} \right), \quad i,j = 1,\dots,n.$$

Поставим в соответствие линейной гиперболической задаче (5), (2), (3) краевую задачу для системы линейных дифференциальных уравнений с комплексным параметром $\lambda$ относительно неизвестной вектор-функции $\widehat{U}(x,\lambda)$:

$$\lambda\widehat{U} + K(x)\widehat{U}_x = A(x)\widehat{U}, \quad I_0\widehat{U}(0,\lambda) + I_1\widehat{U}(1,\lambda) = 0. \tag{6}$$

В работе [3] для задачи (1)–(3) доказана теорема об устойчивости по первому приближению. Предположим, что собственные числа задачи (6) лежат строго внутри левой полуплоскости, т. е. $\operatorname{Re}\lambda \leq -\gamma_0$ ($\gamma_0 > 0$). При этом предположении справедлива

**Теорема 1.** *Пусть* $K(x) \in C^2[0,1]$ *и для любого* $i$ $(1 \leq i \leq n)$ *функции*

$$\frac{\partial^{q+|s|}\Phi_i(x,U)}{\partial x^q \partial U^s},$$

*где* $|s| = 0,1,2,3$, $q = 0,1,2$, $q + |s| \leq 3$, *непрерывны на множестве*

$$\Omega_r = \{(x, u_1, \dots, u_n) : 0 \leq x \leq 1, \ \max_{1\leq i\leq n} |u_i| \leq r\}, \quad r > 0.$$

*Тогда нулевое решение задачи (1)–(3) асимптотически устойчиво с показателем* $\gamma$ *в пространстве* $C^1[0,1]$ $(0 < \gamma < \gamma_0)$.

При математическом описании процессов в псевдоожиженном слое катализатора [8] возникают модели, в которых к гиперболической системе добавляется эволюционное интегральное уравнение, и мы получаем следующую нелинейную краевую задачу:

$$V_t + K(x)V_x = \Phi(x, U),$$
$$\frac{\partial u_{n+1}}{\partial t} = \int\limits_0^1 f_1(x, V)\,dx + f_2(x, u_{n+1}), \quad (x,t) \in \Pi, \tag{7}$$
$$I_0V(0,t) + I_1V(1,t) = 0, \tag{8}$$
$$U(x,0) = U_0(x). \tag{9}$$

Здесь $U(x,t) = (V(x,t), u_{n+1}(x,t))$ — $(n+1)$-мерный вектор-столбец неизвестных функций, где $V = (u_1, \ldots, u_n)^T$, $U_0(x) = (V_0(x), u_{0_{n+1}}(x))$. Матрицы $K(x)$, $I_0$, $I_1$ и вектор-функция $\Phi$ имеют прежний смысл, а функции $f_1(x, V)$, $f_2(x, u_{n+1})$ считаются известными.

Возникает естественный вопрос: справедлива ли теорема об устойчивости по первому приближению для эволюционных задач (7)–(9)?

Предположим также, что $U_c \equiv 0$ является стационарным решением рассматриваемой задачи (7)–(9) и достаточно гладкие функции $\Phi$, $f_1$, $f_2$ обращаются в тождественный нуль на этом решении. Тогда, линеаризируя дифференциальные уравнения (7) этой задачи на нулевом решении, получаем линейную задачу

$$V_t + K(x)V_x = B(x)U,\ B(x) = (b_{ij}(x)), \quad i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n+1,$$
$$\frac{\partial u_{n+1}}{\partial t} = \int\limits_0^1 \left(\sum_{i=1}^n c_i(x)u_i(x,t)\right) dx + d(x)u_{n+1}(x,t), \tag{10}$$

решение $U(x,t)$ которой удовлетворяет граничным условиям (8) и начальным данным (9). Здесь $c_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$, $d(x)$ — известные функции.

В дальнейшем наши исследования будут посвящены изучению поведения решения $U(x,t)$ этой линейной задачи при $t \to \infty$.

Для задачи (10), (8), (9), следуя работам [6, 3], при условии непрерывной дифференцируемости всех коэффициентов и начальных данных нетрудно доказать теорему существования в целом классического решения $U(x,t)$, для которого при $t > 0$ справедлива оценка

$$\|U(x,t)\|_{C^1[0,1]} \le Ke^{At}\|U_0(x)\|_{C^1[0,1]},$$

где константы $K$, $A$ не зависят от $t$, $U_0(x)$.

Необходимым условием существования гладкого решения $V(x,t)$ в полуполосе $\Pi$ является выполнение для начальных данных $V_0(x)$ условий согласования нулевого и первого порядков (4). Если же для функции $V_0(x)$ условия согласования нулевого порядка не выполнены, то у рассматриваемой задачи (10), (8), (9) будет существовать решение $U = (V, u_{n+1})$, которое по аналогии с гиперболической задачей [3] можно назвать кусочно-гладким решением (КГР). У этого решения функция $V(x,t)$ удовлетворяет системе интегральных уравнений, полученных из дифференциальных уравнений интегрированием вдоль соответствующих характеристик, а функция $u_{n+1}(x,t)$ удовлетворяет при $t > 0$ следующему интегральному уравнению:

$$u_{n+1}(x,t) = \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^1 \left(\sum_{i=1}^n c_i(x)u_i(x,t)\right) dx + d(x)u_{n+1}(x,t)\right) dt + u_{0_{n+1}}(x).$$

Точное определение такого решения $V(x,t)$ и доказательство его существования можно найти в [3, § 1], мы же ограничимся лишь констатацией его свойств, которые нам нужны для дальнейшего изложения.

Для каждого $t > 0$ функция $V(x,t) = (u_1(x,t), \dots, u_n(x,t))^T$ как кусочно-гладкое решение соответствующей гиперболической системы в (10) будет равномерно непрерывна вместе со своими производными $V_x(x,t)$, $V_t(x,t)$ на непересекающихся интервалах $\Omega_j(t)$ $(1 \le j \le n_t)$, объединение замыканий которых дает отрезок $[0,1]$. Количество $n_t$ интервалов конечно для каждого $t > 0$ и изменяется в зависимости от $t$, сами интервалы фиксированы, так как определяются через коэффициенты гиперболической системы. Компонента $u_{n+1}(x,t)$ КГР $U(x,t)$ является функцией, непрерывно дифференцируемой для $t > 0$.

Для такого кусочно-гладкого решения можно ввести следующие нормы:

$$\|V(x,t)\|_{R_\tau[0,1]} = \max_{1\le j\le n_\tau} \sup_{x\in\Omega_j(\tau)} |V(x,\tau)|, \quad |V(x,\tau)| = \max_{1\le j\le n} |u_j(x,\tau)|,$$

$$\|U(x,t)\|_{R_\tau[0,1]} = \max(\|V(x,t)\|_{R_\tau[0,1]}, \|u_{n+1}(x,\tau)\|_{C[0,1]}).$$

Если $K(x)$, $B(x)$, $U_0(x) \in C^1[0,1]$, то для задачи (10), (8), (9) при $t > 0$ существует единственное КГР $U(x,t)$, для которого верна оценка

$$\|U(x,t)\|_{R_t[0,1]} + \|U_x(x,t)\|_{R_t[0,1]} + \|U_t(x,t)\|_{R_t[0,1]} \le Ke^{At}\|U_0(x)\|_{C^1[0,1]} \qquad (11)$$

с константами $K$, $A$, не зависящими от $t$, $U_0(x)$.

При обосновании принципа линеаризации как для задачи (1)–(3), так и для задачи (7)–(9) основная трудность заключается в получении для кусочно-гладкого решения $U(x,t)$ линеаризованной на стационарном решении задачи оценки

$$\|U(x,t)\|_{R_t[0,1]} \le Ke^{-\gamma t}\|U_0(x)\|_{C[0,1]}, \quad t > 0, \qquad (12)$$

в случае, когда спектр соответствующего инфинитезимального оператора лежит в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \le -\gamma_0$ $(0 < \gamma < \gamma_0)$.

В работе [3] показано, что для задачи (1)–(3) спектр инфинитезимального оператора состоит только из собственных чисел, и доказана [3, теорема 4]

**Теорема 2.** *Если* $A(x)$, $K(x) \in C^2[0,1]$, $U_0(x) \in C^1[0,1]$ *и собственные числа задачи* (6) *лежат в полуплоскости* $\operatorname{Re}\lambda \le -\gamma_0$, *то для* КГР $U(x,t)$ *задачи* (5), (2), (3) *справедлива оценка* (12).

Целью настоящей работы является получение такой же оценки (12) для кусочно-гладкого решения $U(x,t)$ задачи (10), (8), (9), которую будем в дальнейшем называть задачей I.

## Получение оценки (12) для решения задачи I

Рассмотрим задачу I. Обозначим через $\hat{u}_i(x,\lambda)$ $(i = 1, \dots, n+1)$ преобразования Лапласа от решений $u_i(x,t)$ рассматриваемой линейной задачи, т. е.

$$\hat{u}_i(x,\lambda) = \int_0^\infty u_i(x,t)e^{-\lambda t}\,dt.$$

Наличие оценки (11) позволяет применить к системе (10), (8), (9) преобразование Лапласа, в результате чего получаем систему интегродифференциальных уравнений с комплексным параметром $\lambda$:

$$\lambda\widehat{V} + K(x)\widehat{V}_x = B(x)\widehat{U} + V_0(x), \qquad (13)$$

$$\lambda \hat{u}_{n+1} = \int\limits_0^1 \left( \sum_{i=1}^n c_i(x) \hat{u}_i(x,\lambda) \right) dx + d(x) \hat{u}_{n+1}(x,\lambda) + u_{0_{n+1}}(x), \tag{14}$$

$$I_0 \widehat{V}(0,\lambda) + I_1 \widehat{V}(1,\lambda) = 0. \tag{15}$$

В системе (13)–(15) неизвестной функцией является вектор-столбец $\widehat{U}(x,\lambda) = (\widehat{V}(x,\lambda), \hat{u}_{n+1}(x,\lambda))$, где $\widehat{V}(x,\lambda) = (\hat{u}_1(x,\lambda), \dots, \hat{u}_n(x,\lambda))^T$.

Наряду с системой (13)–(15) рассмотрим соответствующую ей систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестной вектор-функции $W(x,\lambda) = (w_1(x,\lambda), \dots, w_n(x,\lambda))^T$:

$$\lambda W + K(x) W_x = A(x) W, \quad I_0 W(0,\lambda) + I_1 W(1,\lambda) = 0. \tag{16}$$

Здесь матрица $A(x)$ составлена из первых $n$ строк и первых $n$ столбцов матрицы $B(x)$, т. е. $A(x) = (b_{ij}(x))$ $(i,j = 1,\dots,n)$.

Обозначим через $G(x,\xi,\lambda) = (g_{ij}(x,\xi,\lambda))$, $i,j = 1,\dots,n$, функцию Грина задачи (16). Эта матричная функция полностью определяется следующими свойствами:

1) при любом $\xi$ из отрезка [0,1] она является непрерывно дифференцируемой функцией от $x$ в каждом из интервалов $[0,\xi), (\xi,1]$ в отдельности и удовлетворяет внутри них однородному матричному уравнению

$$\lambda G + K(x) G_x = A(x) G;$$

2) в точке $x = \xi$ она имеет заданный разрыв

$$G(\xi+0,\xi,\lambda) - G(\xi-0,\xi,\lambda) = -K^{-1}(\xi);$$

3) при любом $\xi$ из отрезка [0,1] каждый ее столбец, рассматриваемый как вектор-функция от $x$, удовлетворяет граничным условиям

$$I_0 G(0,\xi,\lambda) + I_1 G(1,\xi,\lambda) = 0.$$

Известно [9], что $G(x,\xi,\lambda)$ — мероморфная функция параметра $\lambda$, полюсами которой являются собственные числа задачи (16). При этом для любого $\lambda$, не являющегося собственным значением, непрерывно дифференцируемое решение $\widehat{V}(x,\lambda)$ задачи (13)–(15) представимо в виде

$$\widehat{V}(x,\lambda) = -\int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda) F(\xi,\lambda)\, d\xi, \tag{17}$$

где $i$-я компонента вектора-столбца $F(x,\lambda)$ имеет вид $b_{i,n+1}(x)\hat{u}_{n+1}(x,\lambda) + u_{0_i}(x)$ $(i = 1,\dots,n)$.

Подставляя это выражение в равенство (14), получим, что функция $\hat{u}_{n+1}(x,\lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$\lambda \hat{u}_{n+1} = u_{0_{n+1}}(x) + d(x)\hat{u}_{n+1} + \int\limits_0^1 \hat{u}_{n+1}(\xi,\lambda)\varphi(\xi,\lambda)\, d\xi + \psi(\lambda), \tag{18}$$

где

$$\varphi(\xi,\lambda) = -\int\limits_0^1 \left( \sum_{i=1}^n c_i(x) \left( \sum_{j=1}^n g_{ij}(x,\xi,\lambda) b_{j,n+1}(\xi) \right) \right) dx, \tag{19}$$

$$\psi(\lambda) = -\int\limits_0^1 \left\{ \sum_{i=1}^n c_i(x) \left( \int\limits_0^1 \sum_{j=1}^n g_{ij}(x,\xi,\lambda) u_{0j}(\xi)\, d\xi \right) \right\} dx$$

$$= \int\limits_0^1 \left( \sum_{i=1}^n c_i(x) \hat{z}_i(x,\lambda) \right) dx. \quad (20)$$

Здесь функция $\widehat{Z}(x,\lambda) = (\hat{z}_1(x,\lambda), \dots, \hat{z}_n(x,\lambda))^T$ — решение неоднородной задачи (16), а именно

$$\lambda \widehat{Z} + K(x)\widehat{Z}_x = A(x)\widehat{Z} + V_0(x), \quad I_0\widehat{Z}(0,\lambda) + I_1\widehat{Z}(1,\lambda) = 0,$$

которое согласно свойствам функции Грина представимо в виде

$$\widehat{Z}(x,\lambda) = -\int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda) V_0(\xi)\, d\xi.$$

Пусть $\lambda \neq d(x)$, $x \in [0,1]$. Тогда запишем уравнение (18) в следующем виде:

$$\hat{u}_{n+1} = \frac{u_{0_{n+1}}(x)}{\lambda - d(x)} + \frac{\psi(\lambda)}{\lambda - d(x)} + \frac{R(\lambda)}{\lambda - d(x)}, \quad (21)$$

где

$$R(\lambda) = \int\limits_0^1 \hat{u}_{n+1}(\xi,\lambda) \varphi(\xi,\lambda)\, d\xi.$$

Умножим обе части равенства (21) на функцию $\varphi(x,\lambda)$ и проинтегрируем полученное равенство по переменной $x$, где $x \in [0,1]$. Получим, что для значений $\lambda$, не являющихся корнями уравнения $\Delta(\lambda) = 0$, где

$$\Delta(\lambda) \equiv 1 - \int\limits_0^1 \frac{\varphi(x,\lambda)}{\lambda - d(x)}\, dx, \quad (22)$$

$R(\lambda)$ имеет вид

$$R(\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \int\limits_0^1 \left( \frac{\varphi(x,\lambda)(u_{0_{n+1}}(x) + \psi(\lambda))}{\lambda - d(x)} \right) dx. \quad (23)$$

Всюду в дальнейшем в этой работе будем считать, что для задачи I выполнено

**Предположение 1.** *Собственные числа $\lambda$ краевой задачи* (16) *лежат строго внутри левой полуплоскости, т. е.* $\operatorname{Re}\lambda \leq -\gamma_0$ ($\gamma_0 > 0$).

Тогда функция Грина $G(x,\xi,\lambda)$ аналитична при $\operatorname{Re}\lambda > -\gamma_0$, а следовательно, и функции $\varphi(x,\lambda)$, $\psi(\lambda)$ также обладают этим же свойством. С помощью методики работы [10] в [3, § 2] построена асимптотика функции $G(x,\xi,\lambda)$ при больших значениях параметра $\lambda$, т. е. $|\lambda| \to \infty$.

Если матрицы $K(x)$, $A(x)$ принадлежат $C^2[0,1]$, то при больших значениях $|\lambda|$ ее можно представить в виде [3, формула (56)]

$$G(x,\xi,\lambda) = G_{ac}(x,\xi,\lambda) + \frac{\Psi_2(x,\xi,\lambda)}{\lambda^2}, \quad \operatorname{Re}\lambda \geq -\gamma_0 + \varepsilon,\ \varepsilon > 0,$$

где $G_{ac} = G_0 + G_1/\lambda$ (в работе [3] функции $G_0$, $G_1$ выписаны явно через коэффициенты системы (16)). Мы не будем приводить здесь эти громоздкие формулы, сошлемся лишь на нужные нам свойства этих функций: $|\Psi_2(x,\xi,\lambda)| \le B$ для всех $x$, $\xi$, $\lambda$ и величина $B$ зависит от $\gamma_0$, $\varepsilon$ и коэффициентов матриц $K(x)$, $A(x)$, $I_0$, $I_1$. При каждом рассматриваемом $\lambda$ функции $G_i(x,\xi,\lambda)$ равномерно непрерывны вместе со своими производными по $x$, $\xi$ в областях $0 < x < \xi < 1$ и $0 < \xi < x < 1$, причем на любой прямой $\operatorname{Re}\lambda = \tau$, $\tau > -\gamma_0$, мы имеем оценку $|G_i(x,\xi,\lambda)| \le B$ для всех $x$, $\xi \in [0,1]$, где величина $B$ зависит от коэффициентов системы (16) и $\tau$. При $\operatorname{Re}\lambda \to +\infty$ справедливо, что $G_{ac}(x,\xi,\lambda) \to 0$.

Всюду далее в этой работе число $\gamma$ будет обозначать произвольное вещественное число, $0 < \gamma < \gamma_0$.

Если $V_0(x) \in C^1[0,1]$, то в [3] показано, что в любой полосе $-\gamma \le \operatorname{Re}\lambda \le \tau$ $(-\gamma < \tau)$ при $|\lambda| \to \infty$ справедлива асимптотика

$$\int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda)V_0(\xi)\,d\xi = O(1/\lambda).$$

Отсюда и из формул (19), (20) следует, что в этой же полосе выполнены следующие соотношения:

$$\varphi(\xi,\lambda) = O(1/\lambda), \quad \psi(\lambda) = O(1/\lambda)$$

при $|\lambda| \to \infty$, причем если $\operatorname{Re}\lambda \to +\infty$, то $\varphi(\xi,\lambda) \to 0$, $\psi(\lambda) \to 0$.

В силу оценки (11) преобразования Лапласа $\hat{u}_j(x,\lambda)$ — аналитические функции по $\lambda$ при $\operatorname{Re}\lambda > A$ (константа $A$ определяется из оценки (11)), и для решений $u_j(x,t)$ $(j = 1,\dots,n+1)$ задачи (10), (8), (9) справедливо следующее представление:

$$u_j(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \hat{u}_j(x,\lambda)e^{\lambda t}\,d\lambda, \quad \sigma > A,\ i^2 = -1,$$

где интеграл на бесконечности понимается в смысле главного значения.

Относительно коэффициентов задачи I сделаем еще два предположения, которые будем считать выполненными.

**Предположение 2.** *Множество значений функции $d(x)$ является отрезком $[a,b]$, где $b \le -\gamma_0$.*

**Предположение 3.** *Все корни уравнения $\Delta(\lambda) = 0$, где $\Delta(\lambda)$ определена формулой (22), лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \le -\gamma_0$.*

Заметим, что корни рассматриваемого уравнения всегда находятся в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < \varkappa$, так как $\varphi(x,\lambda) \to 0$ при $\operatorname{Re}\lambda \to +\infty$.

В силу предположений 1–3 из формул (17), (21) видно, что решения $\hat{u}_j(x,\lambda)$ задачи (13)–(15) являются аналитическими функциями параметра $\lambda$ при $\operatorname{Re}\lambda \ge -\gamma$, причем в любой полосе $-\gamma \le \operatorname{Re}\lambda \le \tau$ $(\tau > 0)$ справедливо, что $\hat{u}_j(x,\lambda) = O(1/\lambda)$ при $|\lambda| \to \infty$. Поэтому для решений $u_j(x,t)$ рассматриваемой эволюционной задачи I верно представление

$$u_j(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} \hat{u}_j(x,\lambda)e^{\lambda t}\,d\lambda, \quad j = 1,\dots,n+1. \tag{24}$$

Пользуясь этим представлением и свойствами функции Грина $G(x,\xi,\lambda)$, докажем следующее

**Утверждение 1.** *Пусть $K(x)$, $B(x) \in C^2[0,1]$, $U_0(x) \in C^1[0,1]$ и для задачи* I *выполнены предположения* 1–3. *Тогда для кусочно-гладкого решения $U(x,t)$ рассматриваемой задачи* I *верна оценка* (12).

Доказательство. Сначала докажем неравенство

$$\|u_{n+1}(x,t)\|_{C[0,1]} \le Ke^{-\gamma t}\|U_0(x)\|_{C[0,1]}, \quad t > 0. \tag{25}$$

Здесь и в дальнейшем константы, не зависящие от $t$, $U_0(x)$, а зависящие только от коэффициентов задачи I, будем обозначать буквой $K$.

Рассмотрим функцию $\hat{u}_{n+1}(x,\lambda)$, задаваемую формулой (21), и применим к ней обратное преобразование Лапласа (24). Обозначим обратное преобразование Лапласа от каждого из трех слагаемых, входящих в правую часть формулы (21), соответственно через $S_i(x,t)$ $(i = 1,2,3)$. Оценим каждую из этих функций.

Из свойств преобразования Лапласа следует, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda - d(x)}\,d\lambda \equiv g(x,t) = e^{d(x)t}, \quad t > 0. \tag{26}$$

Поэтому согласно предположению 2 имеем нужную оценку для функции $S_1(x,t)$, так как

$$|S_1(x,t)| = |u_{0_{n+1}}(x)g(x,t)| \le e^{-\gamma t}\|u_{0_{n+1}}(x)\|_{C[0,1]}, \quad t > 0.$$

Рассмотрим функцию $S_2(x,t)$, принимая во внимание вид (20) для функции $\psi(\lambda)$:

$$\begin{aligned} S_2(x,t) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} \frac{e^{\lambda t}\psi(\lambda)}{\lambda - d(x)}\,d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda - d(x)}\left(\int\limits_0^1\left(\sum_{i=1}^n c_i(\xi)\hat{z}_i(\xi,\lambda)\right)d\xi\right)d\lambda \\ &= \int\limits_0^1\left(\sum_{i=1}^n c_i(\xi)\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty}\frac{e^{\lambda t}\hat{z}_i(\xi,\lambda)}{\lambda - d(x)}\,d\lambda\right]\right)d\xi \\ &= \int\limits_0^1\left[\sum_{i=1}^n c_i(\xi)\left(\int\limits_0^t z_i(\xi,t-\tau)g(x,\tau)\,d\tau\right)\right]d\xi. \end{aligned} \tag{27}$$

Эта формула получается следующим образом. Смена порядков интегрирования по $\xi$ и $\lambda$ в третьем равенстве формулы (27) обусловлена асимптотическим поведением функций $\hat{z}_i(x,\lambda)$ при $|\lambda| \to \infty$ $(\hat{z}_i(x,\lambda) = O(1/\lambda)$, $i = 1,\dots,n)$. Так как функции $z_i(x,t)$ являются обратными преобразованиями Лапласа от функций $\hat{z}_i(x,\lambda)$ $(i = 1,\dots,n)$, вектор-функция $Z(x,t) = (z_1(x,t),\dots,z_n(x,t))^T$ — кусочно-гладкое решение гиперболической задачи

$$Z_t + K(x)Z_x = A(x)Z, \quad I_0Z(0,t) + I_1Z(1,t) = 0, \quad Z(x,0) = V_0(x). \tag{28}$$

Известно, что обратное преобразование Лапласа от произведения двух функций [11] представляет собой свертку от обратных преобразований Лапласа этих функций. Отсюда и следует последнее равенство в формуле (27).

Согласно условиям утверждения 1 для задачи (28) верна теорема 2, т. е. для функции $Z(x,t)$справедлива оценка (12). Из этой оценки и вида (26) функции $g(x,t)$ имеем

$$|S_2(x,t)| \le K \int\limits_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \|V_0(x)\|_{C[0,1]} e^{d(x)\tau} d\tau \le K e^{-\gamma t} \|V_0(x)\|_{C[0,1]}, \qquad (29)$$

так как в силу предположения 2 и выбора числа $\gamma$ существует такое $\varepsilon > 0$, что для $x \in [0,1]$ выполняется $\gamma + d(x) \le -\varepsilon$.

Исследуем функцию $S_3(x,t)$. Используя вид (23) функции $R(\lambda)$, представим $S_3(x,t)$ в виде суммы двух слагаемых $S_3^1(x,t)$ и $S_3^2(x,t)$, где

$$S_3^1(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda - d(x)} \left( \int\limits_0^1 \frac{\varphi(\xi,\lambda) u_{0_{n+1}}(\xi)}{\Delta(\lambda)(\lambda - d(\xi))} \, d\xi \right) d\lambda, \qquad (30)$$

$$S_3^2(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda - d(x)} \left( \int\limits_0^1 \frac{\psi(\lambda)\varphi(\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)(\lambda - d(\xi))} \, d\xi \right) d\lambda. \qquad (31)$$

Из свойств функции Грина и вида (19) функции $\varphi(x,\lambda)$ следует, что на прямой $\operatorname{Re}\lambda = -\gamma$ справедливо $|\varphi(\xi,\lambda)| \le K/\lambda$ при $|\lambda| \to \infty$ для всех $\xi \in [0,1]$. Отсюда и из предположения 3 на этой прямой имеем, что $|\Delta(\lambda)| \ge \delta > 0$. Так как

$$\left| \frac{1}{(\lambda - d(\xi))(\lambda - d(x))} \right| = O\left( \frac{1}{\lambda^2} \right) \quad \text{при } |\lambda| \to \infty,$$

то в правой части равенства (30) можно поменять пределы интегрирования по $\xi$ и $\lambda$ и оценить функцию $S_3^1(x,t)$ сверху величиной $K e^{-\gamma t} \|u_{0_{n+1}}(x)\|_{C[0,1]}$.

Оценим функцию $S_3^2(x,t)$. Поскольку на рассматриваемой прямой справедливо, что $\psi(\lambda) = O(1/\lambda)$ при $|\lambda| \to \infty$, в правой части равенства (31) можно поменять пределы интегрирования по $\xi$ и $\lambda$ и записать рассматриваемую функцию в следующем виде:

$$S_3^2(x,t) = \int\limits_0^1 \left( \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} \frac{e^{\lambda t}\psi(\lambda)\varphi(\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)(\lambda - d(\xi))(\lambda - d(x))} d\lambda \right) d\xi$$
$$= \int\limits_0^1 \left( \int\limits_0^t S_2(x, t-\tau) g_1(\xi,\tau) d\tau \right) d\xi.$$

При написании последнего равенства использовано свойство обратного преобразования Лапласа от произведения функций.

Здесь функция $S_2(x,t)$ определена выражением (27), а

$$g_1(\xi,t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} \frac{e^{\lambda t}\varphi(\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)(\lambda - d(\xi))} \, d\lambda.$$

Так как

$$\frac{1}{|\lambda - d(\xi)|} \le \frac{1}{||\lambda| - \max\limits_{0 \le \xi \le 1} |d(\xi)||},$$

отсюда и из свойств функций $\varphi(\xi,\lambda)$, $\Delta(\lambda)$ на прямой $\operatorname{Re}\lambda=-\gamma$ получаем, что

$$\left|\frac{\varphi(\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)(\lambda-d(\xi))}\right|\le\frac{K}{|\lambda|^2},\quad |\lambda|\to\infty.$$

Поэтому справедливо неравенство

$$|g_1(\xi,t)|\le Ke^{-\gamma t}\quad\text{для всех}\quad \xi\in[0,1],\ t>0. \tag{32}$$

В наших рассуждениях $\gamma$ — любое положительное число, $\gamma<\gamma_0$. Пусть $\gamma_2$ такое, что $\gamma<\gamma_2<\gamma_0$. В силу аналитичности по $\lambda$ и убывания к нулю подынтегральной функции при $|\lambda|\to\infty$ имеем

$$\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty}\frac{e^{\lambda t}\varphi(\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)(\lambda-d(\xi))}\,d\lambda=\int\limits_{-\gamma_2-i\infty}^{-\gamma_2+i\infty}\frac{e^{\lambda t}\varphi(\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)(\lambda-d(\xi))}\,d\lambda,$$

т. е. для функции $g_1(\xi,t)$ верна оценка (32) и при $\gamma=\gamma_2$. Отсюда и из оценки (29) для функции $S_3^2(x,t)$ получаем нужную оценку

$$\left|S_3^2(x,t)\right|\le\int\limits_0^t K\|V_0(x)\|_{C[0,1]}e^{-\gamma(t-\tau)}e^{-\gamma_2\tau}\,d\tau\le K\|V_0(x)\|_{C[0,1]}e^{-\gamma t}.$$

Итак, для функции $u_{n+1}(x,t)$ оценка (25) получена.

Покажем, что оценка

$$\|V(x,t)\|_{R_t[0,1]}<Ke^{-\gamma t}\|U_0(x)\|_{C[0,1]},\quad t>0, \tag{33}$$

верна и для кусочно-гладкого решения $V(x,t)=(u_1(x,t),\dots,u_n(x,t))^T$ задачи I.

Функция $V(x,t)$ удовлетворяет линейной гиперболической системе в (10), откуда ясно, что ее можно представить в виде суммы двух вектор-функций $Z(x,t)$ и $Y(x,t)$. Здесь $Z(x,t)$ — КГР однородной гиперболической задачи (28), для которого верна оценка (12). Функция же $Y(x,t)$ — решение неоднородной гиперболической задачи с нулевыми начальными данными

$$\begin{gathered}Y_t+K(x)Y_x=A(x)Y+B(x,t),\\ I_0Y(0,t)+I_1Y(1,t)=0,\quad Y(x,0)=0,\end{gathered} \tag{34}$$

где

$$B(x,t)=(b_{1,n+1}(x)u_{n+1},\dots,b_{n,n+1}(x)u_{n+1})^T,$$

функция $u_{n+1}(x,t)$ известна и для нее справедлива оценка (25).

Пользуясь методом Дюамеля, КГР $Y(x,t)$ задачи (34) можно представить [3, теорема 3] в виде

$$Y(x,t)=\int\limits_0^t W(x,t-s,s)\,ds,$$

где функция $W(x,t,s)$ для каждого $s>0$ является решением гиперболической задачи

$$W_t+K(x)W_x=A(x)W,\quad I_0W(0,t,s)+I_1W(1,t,s)=0,\quad W(x,0,s)=B(x,s).$$

Для решения $W(x,t,s)$ этой задачи справедливы теорема 2 и оценка

$$\|W(x,t,s)\|_{R_t[0,1]}<Ke^{-\gamma t}\|B(x,s)\|_{C[0,1]},\quad t>0,$$

где $\gamma$ — любое число, $0 < \gamma < \gamma_0$.

Оценим решение $Y(x,t)$, используя это неравенство и оценку (25) для функции $u_{n+1}(x,t)$ с показателем $\gamma_2$ таким, что $\gamma < \gamma_2 < \gamma_0$. Для $t > 0$ имеем

$$|Y(x,t)| \leq K \int\limits_0^t e^{-\gamma(t-s)} \|B(x,s)\|_{C[0,1]}\, ds$$
$$\leq K_1 \|u_{0_{n+1}}(x)\|_{C[0,1]} \int\limits_0^t e^{-\gamma(t-s)} e^{-\gamma_2 s}\, ds \leq K_2 \|u_{0_{n+1}}(x)\|_{C[0,1]} e^{-\gamma t}.$$

Итак, для кусочно-гладкого решения $V(x,t)$ оценка (33) имеет место. Из оценок (25) и (33) следует неравенство (12). Утверждение 1 доказано.

Получение этой оценки является основным моментом при обосновании принципа линеаризации нелинейной задачи (7)–(9). Дальнейшее доказательство теоремы об устойчивости по первому приближению осуществляется стандартным приемом, изложенным для гиперболических систем в доказательствах теорем 5, 6, 1 работы [3].

Наряду с задачей (7)–(9) рассмотрим линеаризованную на нулевом стационарном решении задачу I, где

$$d(x) = \frac{\partial f_2(x, u_{n+1})}{\partial u_{n+1}}\bigg|_{u_{n+1}=0}, \quad B(x) = \left( \frac{\partial \Phi_i(x,U)}{\partial u_j}\bigg|_{U=0} \right),$$
$$i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n+1,$$
$$c_i(x) = \left( \frac{\partial f_1(x,V)}{\partial u_i}\bigg|_{V=0} \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Будем считать, что для этой задачи выполнены предположения 1–3, тогда справедливо

**Утверждение 2.** *Пусть $K(x) \in C^2[0,1]$, и $\Phi(x,U)$, $f_1(x,V)$, $f_2(x,u_{n+1})$ — трижды непрерывно дифференцируемые по своим переменным функции соответственно в областях*

$$\Omega_r = \{(x, u_1, \dots, u_{n+1}) : 0 \leq x \leq 1,\ \max_{1 \leq i \leq n+1} |u_i| \leq r\},$$
$$\Omega_{r_1} = \{(x, u_1, \dots, u_n) : 0 \leq x \leq 1,\ \max_{1 \leq i \leq n} |u_i| \leq r_1\},$$
$$\Omega_{r_2} = \{(x, u_{n+1}) : 0 \leq x \leq 1,\ |u_{n+1}| \leq r_2\}, \quad r, r_i > 0,\ i = 1, 2.$$

*Тогда нулевое решение задачи (7)–(9) асимптотически устойчиво с показателем $\gamma$ в пространстве $C^1[0,1]$ $(0 < \gamma < \gamma_0)$.*

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Зеленяк Т. И.* О стационарных решениях смешанных задач, возникающих при изучении некоторых химических процессов // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2, № 2. С. 205–213.
2. *Акрамов Т. А.* Дифференциальные уравнения и их приложения в моделировании физико-химических процессов. Уфа: Башкирск. ун-т, 2000.
3. *Елтышева Н. А.* О качественных свойствах решений некоторых гиперболических систем на плоскости // Мат. сб. 1988. Т. 135, № 2. С. 186–209.
4. *Rauch J. B., Massey III. F. J.* Differentiability of solutions to hyperbolic initial-boundary value problems // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. V. 189. P. 303–318.

**5.** *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.

**6.** *Аболиня В. Э., Мышкис А. Д.* Смешанная задача для почти линейной гиперболической системы на плоскости // Мат. сб. 1960. Т. 50, № 4. С. 423–442.

**7.** *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.

**8.** *Иванов Е. А.* Управление процессом в реакторе с псевдоожиженным слоем // Математическое моделирование химических реакторов. Новосибирск: Наука, 1984. С. 116–127.

**9.** *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

**10.** *Брушлинский К. В.* О росте решения смешанной задачи в случае неполноты собственных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1959. Т. 23, № 4. С. 893–912.

**11.** *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965.

*Статья поступила 6 февраля 2002 г.*

*Люлько Наталья Альбертовна*
*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090*
lulko@online.nsk.su