Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2002. Том 43, № 3

УДК 517.983

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И СИСТЕМЫ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ

В. Б. Коротков

Аннотация: С помощью специальных интегральных операторов устанавливаются некоторые позитивные свойства систем абсолютной сходимости для l_2. Библиогр. 6.

В статье с помощью специальных интегральных операторов устанавливаются некоторые позитивные свойства систем абсолютной сходимости для l_2.

Пусть (X,μ) — пространство с σ-конечной положительной неатомической мерой, $M = M(X,\mu)$ — пространство всех определенных на X μ-измеримых μ-п. в. конечных функций (с обычным отождествлением функций, отличающихся одна от другой лишь на множестве μ-меры 0), $L_2 = L_2(X,\mu)$ — пространство всех $f \in M$ с конечной нормой

$$\|f\| = \Bigl(\int\limits_X |f(t)|^2 \, d\mu(t)\Bigr)^{1/2}.$$

Пусть $f, g \in L_2$. Положим $(f,g) = \int\limits_X f(t)\overline{g(t)}\, d\mu(t)$. Линейный оператор $T : L_2 \to M$ называется *интегральным*, если найдется определенная на $X \times X$ $(\mu\times\mu)$-измеримая $(\mu\times\mu)$-п. в. конечная функция $K(s,t)$ такая, что для всех $f \in L_2$

$$Tf(s) = \int\limits_X K(s,t) f(t)\, d\mu(t)$$

для μ-п. в. $s \in X$; интеграл понимается в лебеговом смысле. Функция $K(s,t)$ называется *ядром интегрального оператора* T.

Интегральный оператор $T : L_2 \to M$ называется *карлемановским*, если его ядро $K(s,t)$ удовлетворяет следующему условию Т. Карлемана [1]:

$$\int\limits_X |K(s,t)|^2 \, d\mu(t) < \infty \quad \text{для } \mu\text{-п. в. } s \in X.$$

Последовательность $\{g_n\} \subset M$ называется *системой абсолютной сходимости* для l_2 [2], если для любой последовательности $\{a_n\} \in l_2$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n g_n(s)|$ сходится μ-п. в., причем множество сходимости этого ряда зависит от $\{a_n\}$. Пусть $\{e_n\}$ — какая-нибудь последовательность попарно не пересекающихся μ-измеримых множеств из X с конечными положительными мерами, χ_{e_n} — характеристическая функция множества e_n.

Теорема 1. *Последовательность* $\{g_n\} \subset M$ *является системой абсолютной сходимости для* l_2 *тогда и только тогда, когда функция*

$$\tau(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(s) \frac{\chi_{e_n}(t)}{\sqrt{\mu e_n}}$$

определяет равенством

$$\tau f(s) = \int_X \tau(s,t) f(t)\, d\mu(t), \quad f \in L_2,$$

интегральный оператор $\tau : L_2 \to M$.

Доказательство. Пусть $\{g_n\}$ — система абсолютной сходимости для l_2, и пусть f — произвольная функция из L_2. Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(|f|, \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}} \right) \right|^2 < \infty,$$

то для μ-п. в. $s \in X$

$$\int_X |\tau(s,t)||f(t)|\, d\mu(t) = \sum_{n=1}^{\infty} |g_n(s)| \int_X |f(t)| \frac{\chi_{e_n}(t)}{\sqrt{\mu e_n}}\, d\mu(t) < \infty.$$

Таким образом, $\tau : L_2 \to M$ — интегральный оператор.

Обратно, пусть $\tau : L_2 \to M$ — интегральный оператор и $\{a_n\}$ — произвольная последовательность из l_2. Рассмотрим функцию

$$f_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}}.$$

Поскольку для μ-п. в. $s \in X$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\, |g_n(s)| = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} |g_n(s)| \frac{\chi_{e_n}(t)}{\sqrt{\mu e_n}} |f_0(t)|\, d\mu(t) = \int_X |\tau(s,t)|\, |f_0(t)|\, d\mu(t) < \infty,$$

то $\{g_n\}$ — система абсолютной сходимости для l_2.

Следствие. *Последовательность* $\{h_n\} \subset M$ *является системой абсолютной сходимости для* l_2 *тогда и только тогда, когда существует положительная функция* $b \in M$ *такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_X |b(s) h_n(s)|\, d\mu(s) \right]^2 < \infty.$$

Доказательство. По теореме 1 оператор

$$Hf(s) = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} h_n(s) \frac{\chi_{e_n}(t)}{\sqrt{\mu e_n}} f(t)\, d\mu(t), \quad f \in L_2, \tag{1}$$

— интегральный оператор, действующий из L_2 в M, тогда и только тогда, когда $\{h_n\}$ — система абсолютной сходимости для l_2. Рассмотрим функцию

$$h(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(s) \frac{\chi_{e_n}(t)}{\sqrt{\mu e_n}}.$$

В силу [3; 4, с. 52] функция $h(s,t)$ порождает по формуле (1) интегральный оператор тогда и только тогда, когда существует положительная функция $b \in M$ такая, что

$$I = \int\limits_X \left[\int\limits_X |h(s,t)| b(s)\, d\mu(s) \right]^2 d\mu(t) < \infty.$$

Так как $\{\chi_{e_n}/\sqrt{\mu e_n}\}$ — ортонормированная последовательность, то

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int\limits_X |b(s) h_n(s)|\, d\mu(s) \right]^2.$$

Следствие близко по формулировке к критерию, данному Е. М. Никишиным [2, теорема 13].

Теорема 2. *Пусть $\{h_n\} \subset M$ — система абсолютной сходимости для l_2. Тогда найдется положительная функция $u \in M$ со счетным множеством значений такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|u h_n\| = 0$.*

Доказательство. В силу теоремы 1 определяемый равенством (1) оператор $H : L_2 \to M$ интегральный. Из [5; 4, с. 46] следует существование счетнозначной положительной функции $u \in M$ такой, что оператор

$$\widetilde{H} f(s) = u(s) H f(s), \quad f \in L_2,$$

вполне непрерывен как оператор из L_2 в L_2. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \|u h_n\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \widetilde{H} \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}} \right\| = 0.$$

Следствие. *Пусть $\mu X < \infty$, $\{h_n\} \subset M$ — система абсолютной сходимости для l_2. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется множество $e_\varepsilon \subset X$ такое, что $\mu(X \setminus e_\varepsilon) < \varepsilon$ и*

$$\lim_{n\to\infty} \|\chi_{e_\varepsilon} h_n\| = 0.$$

Теорема 3. *Пусть $\{h_n\} \subset L_2$ — ортонормированная система абсолютной сходимости для l_2. Тогда $h_n = u_n + v_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, где $\{u_n\} \subset L_2$ — система абсолютной сходимости для l_2, удовлетворяющая условию*

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\| = 0,$$

а $\{v_n\} \subset L_2$ — система абсолютной сходимости для l_2 такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |v_n(s)|^2 < \infty \quad \mu\text{-п. в.}$$

Доказательство. По теореме 1 определяемый равенством (1) оператор H — линейный непрерывный интегральный оператор, действующий из L_2 в L_2. Применив к H теорему Шахермайера — Вайса из [6], получим, что $H = H_1 + H_2$, где $H_1 : L_2 \to L_2$ — вполне непрерывный оператор, $H_2 : L_2 \to L_2$ — карлемановский интегральный оператор. Тогда

$$h_n = H \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}} = H_1 \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}} + H_2 \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Положим
$$u_n = H_1 \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}}, \quad v_n = H_2 \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots .$$

Пусть $h_2(s,t)$ — ядро карлемановского интегрального оператора H_2. Тогда для μ-п. в. $s \in X$
$$\sum_{n=1}^{\infty} |v_n(s)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| H_2 \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}}(s) \right|^2 \leq \int\limits_X |h_2(s,t)|^2 \, d\mu(t) < \infty.$$

Следовательно, $\{v_n\}$ — система абсолютной сходимости для l_2. Тогда $\{u_n\}$ — система абсолютной сходимости для l_2 и, кроме того,
$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\| = \lim_{n\to\infty} \left\| H_1 \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}} \right\| = 0.$$

Теорема 4. *Пусть $\{z_n\} \subset M$ — система абсолютной сходимости для l_2. Тогда для $(\mu \times \mu)$-п. в. $(s,t) \in X \times X$*
$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n(s)\overline{z_n(t)}| < \infty.$$

Положим
$$Z^+(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n(s)\overline{z_n(t)}|, \quad Z(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(s)\overline{z_n(t)}.$$

Пусть $\mu X < \infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется множество $X_\varepsilon \subset X$ такое, что $\mu(X \setminus X_\varepsilon) < \varepsilon$, функция $Z^+_\varepsilon(s,t) = Z^+(s,t)\chi_{X_\varepsilon}(t)$ порождает равенством
$$Z^+_\varepsilon f(s) = \int\limits_X Z^+_\varepsilon(s,t) f(t) \, d\mu(t), \quad f \in L_2,$$
интегральный оператор $Z^+_\varepsilon : L_2 \to M$ и функция $Z_\varepsilon(s,t) = Z(s,t)\chi_{X_\varepsilon}(t)$ порождает равенством
$$Z_\varepsilon f(s) = \int\limits_X Z_\varepsilon(s,t) f(t) \, d\mu(t), \quad f \in L_2,$$
интегральный оператор $Z_\varepsilon : L_2 \to M$.

Доказательство. В силу следствия теоремы 1 найдется положительная функция $b \in M$ такая, что
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int\limits_X |b(\xi) z_n(\xi)| \, d\mu(\xi) \right]^2 < \infty.$$

Тогда
$$\int\limits_X \int\limits_X b(s) b(t) \sum_{n=1}^{\infty} |z_n(s)| \, |z_n(t)| \, d\mu(s) \, d\mu(t)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X b(s) |z_n(s)| \, d\mu(s) \int\limits_X b(t) |z_n(t)| \, d\mu(t)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int\limits_X |b(\xi) z_n(\xi)| \, d\mu(\xi) \right]^2 < \infty. \quad (2)$$

Из этого неравенства вытекает сходимость п. в. ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n(s)\overline{z_n(t)}|.$$

Из неравенства (2) следует, что

$$\int_X b(t) \int_X b(s) \sum_{n=1}^{\infty} |z_n(s)\overline{z_n(t)}|\, d\mu(s)\, d\mu(t) < \infty.$$

Значит, для μ-п. в. $t \in X$

$$\int_X b(s) \sum_{n=1}^{\infty} |z_n(s)\overline{z_n(t)}|\, d\mu(s) < \infty.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется множество $X_\varepsilon \subset X$ такое, что $\mu(X \setminus X_\varepsilon) < \varepsilon$ и

$$\chi_{X_\varepsilon}(t) \int_X b(s) \sum_{n=1}^{\infty} |z_n(s)\overline{z_n(t)}|\, d\mu(s) \in L_2.$$

Поэтому в силу [3; 4, с. 52] для любой функции $f \in L_2$ и для μ-п. в. $s \in X$

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} |z_n(s)\overline{z_n(t)}| \chi_{X_\varepsilon}(t) |f(t)|\, d\mu(t) < \infty. \tag{3}$$

Отсюда вытекает справедливость теоремы 4.

Следствие. *Пусть $\mu X < \infty$ и $\{z_n\} \subset L_2$ — ортонормированная система абсолютной сходимости для l_2 такая, что оператор*

$$Zf = \sum_{n=1}^{\infty} (f, z_n) z_n, \quad f \in L_2,$$

интегральный. Тогда ядро этого оператора $(\mu \times \mu)$ эквивалентно функции $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n(s)\overline{z_n(t)}$.

Доказательство. Пусть $\widetilde{Z}(s,t)$ — ядро интегрального оператора Z. Из (3) следует, что для μ-п. в. $s \in X$ и всех $f \in L_2$

$$\begin{aligned}\int_X \sum_{n=1}^{\infty} z_n(s)\overline{z_n(t)} \chi_{X_\varepsilon}(t) f(t)\, d\mu(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} z_n(s) \int_X \chi_{X_\varepsilon}(t) f(t) \overline{z_n(t)}\, d\mu(t) = (Z(\chi_{X_\varepsilon} f))(s) \\ &= \int_X \widetilde{Z}(s,t) \chi_{X_\varepsilon}(t) f(t)\, d\mu(t).\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что для $(\mu \times \mu)$-п. в. $(s,t) \in X \times X$

$$\widetilde{Z}(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(s)\overline{z_n(t)}.$$

Нам неизвестно, будут ли интегральными все операторы $L_\varphi f = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(f,\varphi_n)\varphi_n$, где $\varphi = \{\varphi_n\}$ — произвольная ортонормированная система абсолютной сходимости для l_2. Если это не так и существует ортонормированная система абсолютной сходимости для l_2 (обозначим ее через $\psi = \{\psi_n\}$) с неинтегральным оператором $L_\psi = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(f,\psi_n)\psi_n$, что равносильно в силу следствия теоремы 4 существованию функции $g_0 \in L_2$ и множества $e_0, \mu e_0 > 0$, таких, что для всех $s \in e_0$

$$\int\limits_X \left|\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(s)\overline{\psi_n(t)}\right| |g_0(t)|\, d\mu(t) = \infty,$$

то можно построить линейный непрерывный самосопряженный интегральный оператор S в L_2 такой, что оператор $\Phi(S)$ не будет интегральным для любой борелевской функции Φ, определенной на числовой оси, ограниченной на спектре S и удовлетворяющей условию $\Phi(S) \neq \alpha S$ для любого числа α.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Carleman T.* Sur les équations intégrales singulières a noyau réel et symétrique. Uppsala: A.-B. Lundequistska Bokhandelu, 1923.
2. *Никишин Е. М.* Резонансные теоремы и надлинейные операторы // Успехи мат. наук. 1970. Т. 25, № 6. С. 129–191.
3. *Коротков В. Б., Степанов В. Д.* Критерии порождаемости интегральных операторов измеримыми функциями // Сиб. мат. журн. 1982. Т. 23, № 2. С. 199–203.
4. *Коротков В. Б.* Интегральные операторы. Новосибирск: Наука, 1983.
5. *Коротков В. Б., Степанов В. Д.* О некоторых свойствах интегральных операторов свертки // Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики. Новосибирск: Наука, 1979. С. 64–68.
6. *Schachermayer W., Weis L.* Almost compactness and decomposability of integral operators // Proc. Amer. Math. Soc. 1981. V. 81, N 4. P. 595–599.

Статья поступила 28 сентября 2001 г.

Коротков Виталий Борисович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090