Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2002. Том 43, № 3

УДК 519.3

К ТЕОРИИ ПОПЕРЕМЕННО–ТРЕУГОЛЬНОГО ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА

А. Н. Коновалов

Аннотация: Построен новый класс адаптивных попеременно-треугольных методов, оптимизация которого в отличие от известных в настоящее время подходов, не требует априорной спектральной информации. При этом сохраняется та же оценка скорости сходимости, что и при наличии априорной информации. Библиогр. 17.

В конечномерном гильбертовом пространстве H рассматривается задача об отыскании решения операторного уравнения

$$Ax = f, \quad A : H \to H, \tag{1}$$

где A — линейный, самосопряженный ($A = A^*$), положительно определенный оператор ($A > 0$). Для нахождения решения задачи (1) будем использовать неявный итерационный процесс

$$B\frac{x^{m+1} - x^m}{\tau} + Ax^m = f, \quad B : H \to H. \tag{2}$$

В (2) m — номер итерации, $\tau > 0$ — итерационный параметр, а B — некоторый обратимый оператор. По определению обращение оператора B в (2) должно быть существенно проще, чем непосредственное обращение исходного оператора A в (1). При построении B будем исходить из аддитивного разложения

$$A = A_1 + A_2, \quad A_1^* = A_2. \tag{3}$$

В силу (3) $(Ay, y) = 2(A_1y, y) = 2(A_2y, y)$. Поэтому в (3) $A_1 > 0$, $A_2 > 0$. Пусть в (2)

$$B = (E + \omega A_1)(E + \omega A_2), \ \omega > 0, \quad Ey = y, \ y \in H. \tag{4}$$

Поскольку $A = A^* > 0$, то вместе с (3) это дает $B = B^* > 0$. Соотношения (2)–(4) задают попеременно-треугольный итерационный метод (ПТМ) [1] решения задачи (1).

§ 1. Оптимизация ПТМ с использованием априорной информации

Если $x^m - x = z^m$ — вектор погрешности, то из (1), (2) получаем

$$B(\omega)z^{m+1} = B(\omega)z^m - \tau Az^m \tag{1.1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00508) и Межвузовской научно-технической программы «Фундаментальные исследования высшей школы в области естественных и гуманитарных наук». Университеты России (тема 991116).

или

$$v^{m+1} = v^m - \tau C v^m = (E - \tau C)v^m = S(\omega, \tau)v^m.$$

Здесь $v^m = A^{\frac{1}{2}} z^m$, $C = A^{\frac{1}{2}} B^{-1} A^{\frac{1}{2}}$ или $v^m = B^{\frac{1}{2}} z^m$, $C = B^{-\frac{1}{2}} A B^{-\frac{1}{2}}$. Поскольку

$$\|v^{m+1}\| = \|(E - \tau C)v^m\| \le \|S(\omega, \tau)\| \, \|v^m\|, \tag{1.2}$$

то оптимизацию ПТМ (2)–(4) можно связать с минимизацией какой-либо нормы оператора шага $S(\omega, \tau)$. В основе такого подхода лежат

Теорема 1.1 [2, с. 340]. *Если* $A = A^* > 0$, $B = B^* > 0$, *а* $C = A^{\frac{1}{2}} B^{-1} A^{\frac{1}{2}}$ *или* $C = B^{-\frac{1}{2}} A B^{-\frac{1}{2}}$, *то операторные неравенства*

$$\gamma_1 B \le A \le \gamma_2 B, \quad \gamma_1 E \le C \le \gamma_2 E, \quad 0 < \gamma_1 < \gamma_2, \tag{1.3}$$

эквивалентны.

Теорема 1.2 [2, с. 340]. *Если* $C = C^* > 0$, $\tau > 0$, *то условия*

$$\|S\| = \|E - \tau C\| \le \rho, \quad \frac{1-\rho}{\tau} E \le C \le \frac{1+\rho}{\tau} E \tag{1.4}$$

эквивалентны.

В качестве следствий заключаем, что в (1.4) можно положить $1 - \rho = \tau\gamma_1$, $1 + \rho = \tau\gamma_2$. Тогда

$$\rho = \frac{1-\eta}{1+\eta}, \quad \eta = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}, \quad \tau = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \tag{1.5}$$

а минимум ρ достигается при максимальном η. Поэтому если в (2)–(4)

$$\omega_0 : \max_{\omega > 0} \eta(\omega) = \max \frac{\gamma_1(\omega)}{\gamma_2(\omega)}, \quad \tau_0 = \frac{2}{\gamma_1(\omega_0) + \gamma_2(\omega_0)}, \tag{1.6}$$

то для ПТМ (2)–(4) справедлива

Теорема 1.3. *Для* ПТМ (2)–(4), (1.6) *имеет место оценка*

$$\|z^m\|_D \le \rho_0^m \|z^0\|_D, \quad \rho_0 = \frac{1 - \eta(\omega_0)}{1 + \eta(\omega_0)}, \quad D = A, B. \tag{1.7}$$

При этом ρ_0 в (1.7) является верхней границей для всех $\|S(\omega_0, \tau_0)\|$, согласованных с векторными нормами $\|\cdot\|_A$, $\|\cdot\|_B$.

Собственно в определении $\gamma_1(\omega)$, $\gamma_2(\omega)$ и заключается одна из основных задач при оптимизации двухслойных итерационных методов (2), когда $B = B(\omega)$ [2, 3]. Если обратиться к обобщенной спектральной задаче

$$A\varphi_i = \lambda_i B(\omega)\varphi_i, \tag{1.8}$$

то речь должна идти о получении оценок

$$\gamma_1(\omega) \le \lambda_{\min}(\omega) < \lambda_{\max}(\omega) \le \gamma_2(\omega). \tag{1.9}$$

Существенным элементом при таком подходе является *дополнительная априорная информация* об исходной задаче (1). Для ПТМ (2)–(4) эту информацию обычно связывают с заданием [1–4] или же с предварительным определением [3, с. 400–402] констант δ, Δ:

$$E \le \frac{1}{\delta} A, \quad A_1 A_2 \le \frac{\Delta}{4} A. \tag{1.10}$$

В (1.10) за δ можно принять $\delta \le \lambda_{\min}(A)$, где $\lambda_{\min}(A)$ — наименьшее собственное значение оператора A, а в качестве Δ взять [4, с. 396, 397] $\Delta \ge \lambda_{\max}(A)$.

Стандартный способ оптимизации стационарного ПТМ приводится, например, в [4, с. 396, 397] и заключается в следующем. Поскольку

$$B = (E + \omega A_1)(E + \omega A_2) = (E - \omega A_1)(E - \omega A_2) + 2\omega A = \widetilde{B} + 2\omega A, \qquad (1.11)$$

то

$$(By, y) = (\widetilde{B}y, y) + 2\omega(Ay, y) = \|y - \omega A_2 y\|^2 + 2\omega(Ay, y)$$

и поэтому для любого $y \in H$, $y \ne 0$, имеем

$$(By, y) \ge 2\omega(Ay, y), \quad (Ay, y) \le \frac{1}{2\omega}(By, y), \quad \gamma_2(\omega) = \frac{1}{2\omega}. \qquad (1.12)$$

Кроме того, в силу (1.10)

$$(By, y) < \left(\frac{1}{\delta} + \omega + \frac{\omega^2\Delta}{4}\right)(Ay, y). \qquad (1.13)$$

Следовательно,

$$(Ay, y) > \left(\frac{1}{\delta} + \omega + \frac{\omega^2\Delta}{4}\right)^{-1}(By, y), \quad \gamma_1(\omega) = \frac{\delta}{1 + \omega\delta + \omega^2\frac{\delta\Delta}{4}}. \qquad (1.14)$$

Дальнейшее просто. Учитывая (1.12), (1.14), в соответствии с (1.6) находим

$$\omega_* = \frac{2}{\sqrt{\delta\Delta}}, \quad \tau_* = \frac{2}{\gamma_1(\omega_*) + \gamma_2(\omega_*)} = 4\omega_*\frac{1 + \sqrt{\xi}}{1 + 3\sqrt{\xi}}, \qquad (1.15)$$

где

$$\gamma_1(\omega_*) = \frac{\delta}{2(1 + \sqrt{\xi})}, \quad \gamma_2(\omega_*) = \frac{\sqrt{\delta\Delta}}{4}, \quad \xi = \frac{\delta}{\Delta}.$$

Что же касается теоремы 1.3, то она допускает следующую формулировку.

Теорема 1.4. *Стационарный* ПТМ (2)–(4), (1.15) *сходится, и справедлива оценка*

$$\|z^m\|_A < \rho_*^m\|z^0\|_A, \quad \rho_* = \frac{1 - \eta_*}{1 + \eta_*} = \frac{1 - \sqrt{\xi}}{1 + 3\sqrt{\xi}}, \quad \eta_* = \frac{\gamma_1(\omega_*)}{\gamma_2(\omega_*)}. \qquad (1.16)$$

Если в (2)–(4) число итераций m задано, то следует положить

$$\tau_k = \frac{\tau_*}{1 + \rho_* t_k}, \quad t_k = \frac{\cos(2k - 1)}{2m}, \quad k = 1, \dots, m. \qquad (1.17)$$

Тогда для нестационарного ПТМ (2)–(4) с чебышевскими итерационными параметрами (1.15), (1.17) вместо (1.16) будем иметь

$$\|z^m\|_A \le q_m\|z^0\|_A, \quad q_m = \frac{2\rho_1^m}{1 + \rho_1^{2m}}, \quad \rho_1 = \frac{1 - \sqrt{\eta_*}}{1 + \sqrt{\eta_*}}. \qquad (1.18)$$

При численной реализации чебышевского ПТМ необходимо использовать какое-либо устойчивое упорядочивание итерационных параметров (1.17).

Дадим некоторые комментарии к изложенной выше теории оптимизации ПТМ (2)–(4). Прежде всего следует отметить, что используемая в (1.12) оценка снизу для оператора B неулучшаема. Действительно, равенство в (1.12) реализуется на векторах $y \in \ker\widetilde{B}$. Отсюда вытекает

Следствие 1.1. *Если для стационарного* ПТМ (2)–(4), (1.6) $z^0 \in \ker \widetilde{B}$, *то* $z^1 = 0$.

Доказательство практически очевидно. В самом деле, из (1.11) вытекает, что для $y \in \ker \widetilde{B}$ будем иметь $By = 2\omega Ay$ и, кроме того, $\gamma_1(\omega) = \gamma_2(\omega) = 1/2\omega$. Поэтому (1.6) дает $\tau = 2\omega$. Следовательно, в силу (1.1)

$$Bz^1 = Bz^0 - \tau Az^0 = (2\omega - \tau)Az^0 = 0. \tag{1.19}$$

Теперь остается учесть, что $B > 0$.

Подобным свойством: зависимостью скорости сходимости от начального приближения, обычно обладают градиентные итерационные методы (итерационные методы вариационного типа). О них речь пойдет ниже, а пока отметим следующее. Априорная информация при оптимизации ПТМ как в стационарном варианте (1.15), так и в нестационарном чебышевском варианте (1.15), (1.17) связана с $\lambda_{\min}(A)$, $\lambda_{\max}(A)$ и используется в оценке (1.13) оператора B сверху. Но сама по себе задача определения $\delta \le \lambda_{\min}(A)$, $\lambda_{\max}(A) \le \Delta$ гораздо сложнее исходной задачи (1). Реально речь вообще может идти лишь о приближенном нахождении δ, Δ. Не будет преувеличением также сказать, что чем выше (теоретическая) скорость сходимости итерационного процесса, тем более чувствителен этот процесс к точности задания (определения) априорной информации. Только что сказанное в полной мере относится и к точности оценки оператора B сверху, в которой эта априорная информация используется.

Действительно, при получении (1.15) используется «хорошая» оценка (1.13)

$$(By, y) \le \left(\frac{1}{\delta} + \omega + \frac{\omega^2\Delta}{4}\right)(Ay, y) = \frac{1}{\gamma_1(\omega)}(Ay, y),$$

которая вместе с (1.6) приводит к (1.15), (1.16). Однако заметим, что

$$\frac{1}{2}(Ay, y) = (A_2y, y) \le \|A_2y\|\,\|y\| \le \nu\|A_2y\|^2 + \frac{1}{\nu}\|y\|^2,$$

где ν — любое положительное число. Поэтому наряду с (1.13) столь же очевидна справедливость и таких «плохих» оценок:

$$(By, y) \le \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} + \frac{\omega\sqrt{\Delta}}{2}\right)^2(Ay, y) = \frac{1}{\tilde{\gamma}_1(\omega)}(Ay, y), \tag{1.20}$$

$$(By, y) \le \left(\frac{1}{\delta} + \omega\frac{1 + 4\nu^2\delta\Delta}{2\nu\delta} + \frac{\omega^2\Delta}{4}\right)(Ay, y) = \frac{1}{\hat{\gamma}_1(\omega)}(Ay, y). \tag{1.21}$$

Как было отмечено, оценка для оператора B снизу (1.12) неулучшаема. Поэтому при наличии оценок (1.20), (1.21) совершенно естественно определять оптимальные $\widetilde{\omega}$, $\widehat{\omega}$ в соответствии с (1.6). Но тогда, как нетрудно убедиться,

$$\begin{aligned} &\widetilde{\omega} : \max_{\omega>0}\frac{\tilde{\gamma}_1(\omega)}{\gamma_2(\omega)} = \max_{\omega>0}\tilde{\eta}(\omega), \quad \widetilde{\omega} = \frac{2}{\sqrt{\delta\Delta}} = \omega_*, \\ &\widehat{\omega} : \max\frac{\hat{\gamma}_1(\omega)}{\gamma_2(\omega)} = \max_{\omega>0}\hat{\eta}(\omega), \quad \widehat{\omega} = \frac{2}{\sqrt{\delta\Delta}} = \omega_*. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Однако при этом $\gamma_1(\omega_*) > \tilde{\gamma}_1(\omega) \ge \hat{\gamma}_1(\omega_*, \nu)$, следовательно,

$$\eta_* = \eta(\omega_*) > \tilde{\eta}_* = \tilde{\eta}(\omega_*) \ge \hat{\eta}_*(\nu) = \hat{\eta}(\omega_*, \nu).$$

Равенства $\tilde{\gamma}_1(\omega_*) = \hat{\gamma}_1(\omega_*, \nu)$, $\tilde{\eta}_* = \hat{\eta}_*(\nu)$ достигаются при $\nu = 1/2\sqrt{\delta\Delta}$. Поэтому если в (1.1) $\omega = \omega_*$ и в соответствии с (1.6)

$$\tau_* = \frac{2}{\gamma_1(\omega_*) + \gamma_2(\omega_*)}, \quad \tilde{\tau}_* = \frac{2}{\tilde{\gamma}_1(\omega_*) + \gamma_2(\omega_*)}, \quad \hat{\tau}_* = \frac{2}{\hat{\gamma}_1(\omega_*, \nu) + \gamma_2(\omega_*)}, \quad (1.23)$$

то для ρ из (1.4) будем иметь

$$\rho_* = \frac{1-\sqrt{\xi}}{1+3\sqrt{\xi}} < \tilde{\rho}_* = \frac{1-\tilde{\eta}_*}{1+\tilde{\eta}_*} = \frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}} \leq \hat{\rho}_*(\nu) = \frac{1-\hat{\eta}_*(\nu)}{1+\hat{\eta}_*(\nu)}. \quad (1.24)$$

Обратимся к (1.1). Пусть $\varepsilon > 0$, а $m(\varepsilon)$ — число итераций в (1.1), достаточное для выполнения неравенства $\|z^m\|_D \leq \varepsilon \|z^0\|_D$. Зафиксируем в (1.1) $\omega_* = 2/\sqrt{\delta\Delta}$. Тогда в силу (1.7), (1.24)

$$m_1 = m(\omega_*, \varepsilon) < m_2 = \widetilde{m}(\omega_*, \varepsilon) \leq m_3 = \widehat{m}(\omega_*, \nu, \varepsilon).$$

Если исходная задача (1.1) плохо обусловлена ($\xi \ll 1$), то

$$\rho_* \simeq 1 - 4\sqrt{\xi}, \quad \tilde{\rho}_* \simeq 1 - 2\sqrt{\xi}, \quad \hat{\rho}_*(\nu = 0,5) \simeq 1 - \frac{8\sqrt{\xi}}{\delta\Delta} \quad (1.25)$$

и ввиду (1.25) m_i могут очень сильно различаться.

Подведем некоторые итоги. Переходу от исходной задачи (1) к эквивалентной задаче

$$A^{\frac{1}{2}} B^{-1}(\omega) A^{\frac{1}{2}} u = A^{\frac{1}{2}} B^{-1}(\omega) f \longleftrightarrow C(\omega) u = \tilde{f}, \quad u = A^{\frac{1}{2}} x \quad (1.26)$$

соответствует переход от (1.1) к эквивалентному итерационному процессу

$$v^{m+1} = v^m - \tau C(\omega) v^m, \quad C(\omega) = A^{\frac{1}{2}} B^{-1}(\omega) A^{\frac{1}{2}}, \quad v^m = A^{\frac{1}{2}} z^m. \quad (1.27)$$

Если, как обычно, через $\nu(A)$ обозначить спектральное число обусловленности исходной задачи (1):

$$\nu(A) = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)} \leq \frac{\Delta}{\delta} = \frac{1}{\xi}, \quad (1.28)$$

то для числа обусловленности эквивалентной задачи (1.26) будем иметь

$$\nu(C(\omega)) = \frac{\lambda_{\max} C(\omega)}{\lambda_{\min} C(\omega)} = \frac{\lambda_{\max} B^{-1}(\omega) A}{\lambda_{\min} B^{-1}(\omega) A}. \quad (1.29)$$

Сделанный в (1.6) выбор ω_0 минимизирует верхнюю оценку числа обусловленности задачи (1.26), ибо в соответствии с (1.8), (1.9), (1.29)

$$\nu(C(\omega)) \leq \frac{\gamma_2(\omega)}{\gamma_1(\omega)} = \frac{1}{\eta(\omega)}. \quad (1.30)$$

При этом $\gamma_1(\omega)$, $\gamma_2(\omega)$ в (1.6), (1.30) следует считать заданными. Качество предобуславливателя $B(\omega)$ из (4) определяется сравнением (1.30) с (1.28). Оценки (1.12), (1.14) вместе с критерием выбора ω из (1.6) задают «оптимальную» верхнюю оценку числа обусловленности задачи (1.26):

$$\nu(C(\omega_*)) \leq \frac{\gamma_2(\omega_*)}{\gamma_1(\omega_*)} = \frac{1+\sqrt{\xi}}{2\sqrt{\xi}}. \quad (1.31)$$

Как уже говорилось, оценка $\lambda_{\max}C(\omega) \le \gamma_2(\omega) = 1/2\omega$ неулучшаема. Этого нельзя сказать даже о «хорошей» оценке (1.14): $\gamma_1(\omega) < \lambda_{\min}C(\omega)$, ибо по определению констант δ и Δ из (1.10):

$$\|y\|^2 \le \frac{1}{\delta}(Ay, y), \quad \|A_2\|^2 \le \frac{\Delta}{4}(Ay, y),$$

равенства в этих соотношениях реализуются на *разных* элементах $y \in H$. Как мы убедились, при заданном в (1.12) $\gamma_2(\omega)$ оптимальное в смысле критерия (1.6) ω_* *инвариантно* по отношению к оценкам (1.14), (1.20), (1.21) сверху оператора B. Однако сама оценка (1.30) спектрального числа обусловленности задачи (1.26) тем реалистичнее, чем точнее оценка $\gamma_1(\omega) < \lambda_{\min}C(\omega)$. Наиболее точной из вышеприведенных является «хорошая» оценка (1.14). Тогда в соответствии с (1.30)

$$\nu(C(\omega)) \le \frac{\gamma_2(\omega)}{\gamma_1(\omega)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega\delta} + \frac{\omega\Delta}{4}\right)$$

и эффективность критерия (1.6) при выборе оптимального ω_* для переобуславливателя $B(\omega)$ из (4) достаточно убедительно демонстрируют неравенства

$$\begin{gathered}\nu(A) < \frac{1}{\xi}, \quad \nu(C(\omega_* = 2/\sqrt{\delta\Delta})) < \frac{1+\sqrt{\xi}}{2\sqrt{\xi}}, \\ \nu(C(\omega = 2/\Delta)) < \frac{1+2\xi}{2\xi}, \quad \nu(C(\omega = 2/\delta)) < \frac{1+2\xi}{2\xi}.\end{gathered} \tag{1.32}$$

Сделанный в (1.6) выбор итерационного параметра τ_0 минимизирует норму оператора шага $S = E - \tau C(\omega)$, согласованную с векторной нормой $\|\cdot\|_D$. При этом $\gamma_1(\omega)$, $\gamma_2(\omega)$ либо $\tilde{\gamma}_1(\omega)$, $\gamma_2(\omega)$, либо, наконец, $\hat{\gamma}_1(\omega)$, $\gamma_2(\omega)$ снова следует считать заданными. Как известно, условие $\tau\lambda_{\max}C(\omega) \le 2$ является необходимым и достаточным для сходимости стационарного ПТМ (1)–(4). Поскольку $\gamma_{\max}C(\omega) \le \gamma_2(\omega)$, то при $\gamma_1(\omega) > 0$, $\tilde{\gamma}_1(\omega) > 0$, $\hat{\gamma}_1(\omega) > 0$ выбор τ в соответствии с (1.6) приводит к сходящимся итерационным процессам. Однако скорость сходимости последних, как и реалистичность оценки числа обусловленности задачи (1.26), существенно зависит от точности оценки $0 < \gamma_1(\omega) < \lambda_{\min}C(\omega)$. Иллюстрацией этого утверждения могут служить соотношения (1.25). Только что сказанное в полной мере относится и к нестационарному ПТМ

$$B(\omega_*)\frac{x^{k+1} - x^k}{\tau_{k+1}} + Ax^k = f \tag{1.33}$$

с устойчивым чебышевским набором итерационных параметров (1.17). И в этом случае точность оценки (1.18) также существенно зависит от точности оценки $0 < \gamma_1(\omega) < \lambda_{\min}C(\omega)$.

Итак, оптимальное ω_* из (1.6) инвариантно по отношению к оценке $0 < \gamma_1(\omega) < \lambda_{\min}C(\omega)$, оптимальное τ из (1.6) подобным свойством не обладает. В такой ситуации представляется совершенно естественным использовать итерационные методы, в которых принцип выбора итерационных параметров τ_k не зависит от способа предварительного определения оптимального параметра ω. Такие методы существуют — это градиентные итерационные методы (итерационные методы вариационного типа) [3–13].

§ 2. Вариационная оптимизация ПТМ

Пусть в ПТМ (2)–(4) каким-либо образом, возможно, и в соответствии с (1.6) выбран оптимальный параметр ω. В нестационарном ПТМ вариационного типа

$$B(\omega)\frac{x^{m+1}-x^m}{\tau_{m+1}} + Ax^m = f \tag{2.1}$$

итерационные параметры τ_{m+1} определяются следующим образом:

$$\tau_{m+1} : \min_{\tau_{m+1}>0} \Phi(z^{m+1}) = \min_{\tau_{m+1}>0} (Dz^{m+1}, z^{m+1}). \tag{2.2}$$

Обычно предполагается, что в (2.2) $D = D^* > 0$. В этом случае функционал $\Phi(z^m)$ из (2.2) задает в H норму

$$\Phi(z^m) = \|z^m\|_D^2 = (D^{\frac{1}{2}}z^m, D^{\frac{1}{2}}z^m) = (v^m, v^m) = \|v^m\|^2.$$

Критерий (2.2) вместе с

$$z^{m+1} = z^m - \tau_{m+1}B^{-1}Az^m \tag{2.3}$$

дает [3, с. 333, 334]

$$\tau_{m+1} = \frac{(Cv^m, v^m)}{(Cv^m, Cv^m)}, \quad C = D^{-\frac{1}{2}}(DB^{-1}A)D^{-\frac{1}{2}}, \quad v^m = D^{\frac{1}{2}}z^m \tag{2.4}$$

или

$$\tau_{m+1} = \frac{(Dz^m, w^m)}{(Dw^m, w^m)}, \quad Bw^m = r^m = Ax^m - f. \tag{2.5}$$

В связи с (2.5) сделаем одно общее замечание. Условие $D = D^* > 0$ само по себе не гарантирует реализуемости итерационного метода (2.1), (2.5), поскольку входящий в (2.5) вектор Dz^m реально может быть вычислен не при любом выборе D. В рассматриваемом нами случае $A = A^* > 0$, $B = B^* > 0$, поэтому условию $D = D^* > 0$ с реально вычисляемым вектором Dz^m удовлетворяют, например, итерационные методы вариационного типа (2.1), (2.5), для которых $D = A$: ПТМ скорейшего спуска, где

$$\tau_{m+1} = \frac{(r^m, w^m)}{(Aw^m, w^m)}, \quad m = 0, 1, \dots, \tag{2.6}$$

либо $D = AB^{-1}A$: ПТМ минимальных поправок, тогда

$$\tau_{m+1} = \frac{(Aw^m, w^m)}{(B^{-1}Aw^m, Aw^m)}, \quad m = 0, 1, \dots. \tag{2.7}$$

Теорема 2.1 [3, с. 335]. *При* $\omega > 0$ ПТМ *скорейшего спуска* (2.1), (2.6) *и* ПТМ *минимальных поправок* (2.1), (2.7) *сходятся. При этом*

$$\|z^m\|_D \le \rho^m(\omega)\|z^0\|_D, \quad \rho(\omega) = \frac{1-\eta}{1+\eta}, \quad \eta = \eta(\omega) = \frac{\lambda_{\min}C(\omega)}{\lambda_{\max}C(\omega)} \tag{2.8}$$

и оператор $C(\omega) = C^*(\omega) > 0$ *определен в* (2.4).

Как известно [3, 6, 8], оценка скорости сходимости в (2.8) неулучшаема. С другой стороны, нетрудно убедиться в том, что собственные числа оператора $C(\omega)$ из (2.4) как при $D = A$, так и при $D = AB^{-1}A$ совпадают с собственными числами обобщенной спектральной задачи (1.8). Поэтому изложенная в § 1 теория, связанная с нахождением $\gamma_1(\omega) < \lambda_{\min}C(\omega)$, $\lambda_{\max}C(\omega) \le \gamma_2(\omega)$, приводит к оценке $\rho(\omega)$ из (2.8) сверху. Действительно, так как

$$v^{m+1} = v^m - \tau_{m+1}C(\omega)v^m,$$

то при $\omega = \omega_*$ и $\tau \ne \tau_{m+1}$ в силу (2.2) будем иметь

$$\begin{aligned}\|z^{m+1}\|_D = \|v^{m+1}\| = \|(E - \tau_{m+1}C(\omega_*))v^m\| \le \|(E - \tau C(\omega_*))v^m\|\\ \le \|E - \tau C(\omega_*)\|\,\|v^m\| = \|S(\omega_*,\tau)\|\,\|v^m\| = \|S(\omega_*,\tau)\|\,\|z^m\|_D.\end{aligned} \qquad (2.9)$$

Но $\gamma_1(\omega_*) < \lambda_{\min}C(\omega_*)$, $\lambda_{\max}C(\omega_*) \le \gamma_2(\omega_*)$, следовательно,

$$\frac{1}{\nu(C(\omega_*))} = \eta(\omega_*) = \frac{\lambda_{\min}C(\omega_*)}{\lambda_{\max}C(\omega_*)} > \frac{\gamma_1(\omega_*)}{\gamma_2(\omega_*)} = \eta_* = \frac{2\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}}, \quad \xi = \frac{\delta}{\Delta}. \qquad (2.10)$$

Если положить в (2.9) $\tau = \tau_*$, где τ_* определено в (1.15), то в качестве следствия из (2.9) и теорем 1.1, 1.2 будем иметь

$$\|z^m\|_D < \rho_*^m\|z^0\|_D, \quad \rho_* = \frac{1-\eta_*}{1+\eta_*} = \frac{1-\sqrt{\xi}}{1+3\sqrt{\xi}} \simeq 1 - 4\sqrt{\xi}, \quad \xi = \frac{\delta}{\Delta}. \qquad (2.11)$$

Достаточно теперь учесть (2.10), чтобы для $\rho(\omega_*)$ из (2.8) получить $\rho(\omega_*) < \rho_*$.

Скорость убывания функционала (Az^{m+1}, z^{m+1}) в ПТМ скорейшего спуска (2.1), (2.6) и функционала $(AB^{-1}Az^{m+1}, z^{m+1})$ в ПТМ минимальных поправок (2.1), (2.7) одна и та же. Это связано с тем, что как погрешность $y_1^{m+1} = z^{m+1}$, так и поправка $y_2^{m+1} = w^{m+1}$ при стационарном ω удовлетворяют одному и тому же уравнению

$$B(\omega)y_\alpha^{m+1} = B(\omega)y_\alpha^m - \tau_{m+1}Ay_\alpha^m.$$

Если считать ω заданным, то с точки зрения вычислительных затрат следует отдать предпочтение ПТМ скорейшего спуска, поскольку в ПТМ минимальных поправок при вычислении τ_{m+1} в (2.7) следует дополнительно обращать оператор $B(\omega)$. Однако в отличие от (2.1), (2.6) при практическом использовании ПТМ минимальных поправок (2.1), (2.7) возможно непосредственное вычисление минимизируемого функционала (w^m, r^m). Это дает возможность в полной мере использовать асимптотическое свойство ПТМ (2.1), (2.7) [3, с 338–340], в том числе и для построения ускоряющих процедур.

Итак, при $\omega = \omega_*$ скорость сходимости ПТМ скорейшего спуска (2.1), (2.6) и ПТМ минимальных поправок (2.1), (2.7) не хуже, чем у стационарного ПТМ (2)–(4) с оптимальными ω_*, τ_* (1.15), но хуже, чем у нестационарного ПТМ с чебышевскими параметрами (1.15), (1.17). Последний «недостаток» легко устранить. Для этого достаточно вместо попеременно-треугольных методов вариационного типа (2.1), (2.6) и (2.1), (2.7) использовать попеременно-треугольные методы сопряженных градиентов (сопряженных направлений). Для определенности остановимся на двухслойном варианте [3, 7, 10, 11]:

$$r^0 = Ax^0 - f, \quad Bw^0 = r^0, \quad \psi_0 = w^0, \tau_1 = \frac{(Dz^0, w^0)}{(D\psi_0, \psi_0)}, \quad x^1 = x^0 - \tau_1 w^0. \qquad (2.12)$$

Далее, для $m > 1$

$$\begin{gathered} r^m = Ax^m - f, \quad Bw^m = r^m,\\ b_m = \frac{(Dw^m, z^m)}{(Dw^{m-1}, z^{m-1})}, \quad \psi_m = w^m + b_m\psi_{m-1},\\ \tau_{m+1} = \frac{(Dw^m, z^m)}{(D\psi_m, \psi_m)}, \quad x^{m+1} = x^m - \tau_{m+1}\psi_m. \end{gathered} \qquad (2.13)$$

Наряду с теоремой 2.1 основной для дальнейшего является также

Теорема 2.2 [3, с. 349; 7, 10]. *Если $\omega > 0$, то* ПТМ *сопряженных градиентов* (2.12), (2.13) *сходится как при $D = A$, так и при $D = AB^{-1}A$. При этом для любого m*

$$\|z^m\|_D \le q_m\|z^0\|_D,\ q_m = \frac{2\rho_1^m}{1+\rho_1^{2m}},\ \rho_1 = \frac{1-\sqrt{\eta}}{1+\sqrt{\eta}},\ \eta = \eta(\omega) = \frac{\lambda_{\min}C(\omega)}{\lambda_{\max}C(\omega)}. \quad (2.14)$$

Положим в (2.12)–(2.14) $\omega = \omega_*$. Так как

$$\rho_1(\omega_*) = \frac{1-\sqrt{\eta(\omega_*)}}{1+\sqrt{\eta(\omega_*)}} < \rho_{1*} = \frac{1-\sqrt{\eta_*}}{1+\sqrt{\eta_*}},$$

то с учетом (1.18)

$$q_m(\eta(\omega_*)) - q_m(\eta_*) = 2\frac{(\rho_1^m(\omega_*) - \rho_{1*}^m)(1-\rho_1^m(\omega_*)\rho_{1*}^m)}{(1+\rho_{1*}^{2m})(1+\rho_1^{2m}(\omega_*))} < 0.$$

Поэтому для ПТМ сопряженных градиентов (2.12), (2.13) теория определения оптимального $\omega_* = 2/\sqrt{\delta\Delta}$ по априорной информации (1.10) также приводит к оценке сверху на этот раз для $q_m(\omega_*)$ из (2.14) и теперь

$$q_m(\eta(\omega_*)) = q_m(\omega_*) < q_m(\eta_*) \simeq 2(1 - 2\sqrt{2}\sqrt[4]{\xi})^m. \quad (2.15)$$

§ 3. Адаптивная оптимизация ПТМ

Изложенные выше способы оптимизации ПТМ связаны с априорной спектральной информацией (1.10):

$$\delta E \le A \le \Delta E, \quad \delta \le \lambda_{\min}A, \quad \lambda_{\max}A \le \Delta.$$

Эта информация вместе с заданными в (1.12), (1.14) $\gamma_1(\omega)$, $\gamma_2(\omega)$ такими, что

$$\gamma_1(\omega)B(\omega) \le A \le \gamma_2(\omega)B(\omega),$$

позволяет найти оптимальное $\omega_* = 2/\sqrt{\delta\Delta}$, которое минимизирует одну из возможных оценок сверху спектрального числа обусловленности $\nu(C(\omega))$ оператора $C(\omega)$ в задаче

$$v^{m+1} = v^m - \tau_{m+1}C(\omega)v^m,\ \ v^m = D^{\frac12}z^m,\ \ C(\omega) = D^{-\frac12}(DB^{-1}(\omega)A)D^{-\frac12}. \quad (3.1)$$

В дальнейшем, если не оговорено противное, положим $D = A$, так что в (3.1)

$$C(\omega) = A^{\frac12}B^{-1}(\omega)A^{\frac12}, \quad \tau_{m+1} = \frac{(r^m, w^m)}{(Aw^m, w^m)}. \quad (3.2)$$

При этом

$$\nu(C(\omega_*)) = \frac{\lambda_{\max}C(\omega_*)}{\lambda_{\min}C(\omega_*)} < \frac{\gamma_2(\omega_*)}{\gamma_1(\omega_*)} = \frac{1}{\eta_*} = \frac{1+\sqrt{\xi}}{2\sqrt{\xi}}, \quad \xi = \frac{\delta}{\Delta}. \quad (3.3)$$

Изучаемые далее способы определения оптимальных $\widehat{\omega}_m$, как и в (3.3), свяжем с минимизацией оценки сверху спектрального числа обусловленности оператора $C(\widehat{\omega}_m)$. Будет показано, что существуют такие $\widehat{\omega}_m$, для которых

$$\nu(C(\widehat{\omega}_m)) < \frac{1+\sqrt{\xi}}{2\sqrt{\xi}}, \quad (3.4)$$

однако для фактического вычисления $\widehat{\omega}_m$ априорной информации (1.10) не требуется.

Пусть

$$C(\omega_m)\psi_{im} = \lambda_{im}\psi_{im}. \tag{3.5}$$

Если это не вызывает недоразумений, то в дальнейшем для упрощения записи часть индексов может быть опущена. Очевидно, что собственные числа спектральной задачи (3.5) совпадают с собственными числами обобщенной спектральной задачи

$$A\varphi_i = \lambda_i B(\omega_m)\varphi_i \tag{3.6}$$

и, кроме того, $\psi_i = A^{\frac{1}{2}}\varphi_i$. Известно [3, с. 337], что если в ПТМ скорейшего спуска (2.1), (2.6) при стационарном ω выбрать такое начальное приближение x^0, для которого $v^0 = A^{\frac{1}{2}}z^0 = \psi_i$, то $v^1 = 0$, т. е. $x^1 = x$, где $Ax = f$.

Покажем, что аналогичное свойство справедливо и для ПТМ (2.1), (2.6) при нестационарном $\omega_m > 0$. Обратимся, как и в (1.19), к тождеству

$$B(\omega_m) = \widetilde{B}(\omega_m) + 2\omega_m A, \quad \widetilde{B}(\omega_m) = (E - \omega_m A_1)(E - \omega_m A_2) = \widetilde{B}^*(\omega_m),$$

из которого вытекает, что

$$B(\omega_m)z^{m+1} = \widetilde{B}(\omega_m)z^m + (2\omega_m - \tau_{m+1})Az^m. \tag{3.7}$$

Если в (3.7) $z^0 \in \ker \widetilde{B}(\omega_0)$, то выбор $\tau_1 = 2\omega_0$ приводит к $B(\omega_0)z^1 = 0$, что равносильно $z^1 = 0$, $x^1 = x$.

Сходимость за одну итерацию: $x^1 = x$ в ПТМ (2.1), (2.6) при стационарном $\omega = \omega_m$ и нестационарном ω_m, с формальной точки зрения реализуется в двух различных случаях: либо $v^0 = \psi_i$, либо $z^0 \in \ker \widetilde{B}(\omega_0)$ и $\tau_1 = 2\omega_0$. На самом деле эти случаи совпадают. Действительно, если $v^0 = \psi_i$, то в силу (2.6) $\tau_1 = 1/\lambda_i$, где λ_i — собственное число обобщенной спектральной задачи (3.6) при $\omega = \omega_0$. Если в этой задаче воспользоваться тождеством (1.11), то

$$A\varphi_i = \lambda_i B(\omega_0)\varphi_i = \lambda_i \widetilde{B}(\omega_0)\varphi_i + 2\omega_0\lambda_i A\varphi_i.$$

Значит, если $2\omega_0\lambda_i = 1$, то $\varphi_i \in \ker \widetilde{B}(\frac{1}{2\lambda_i})$, а условие $2\omega_0 = \tau_1$ приводится к виду $\tau_1 = 1/\lambda_i$. И, наконец, следует принять во внимание, что $v^0 = A^{\frac{1}{2}}z^0$, $\psi_i = A^{\frac{1}{2}}\varphi_i$.

Итак, для попеременно-треугольного метода скорейшего спуска при нестационарном ω имеем

$$B(\omega_m)\frac{x^{m+1} - x^m}{\tau_{m+1}} + Ax^m = f. \tag{3.8}$$

Соотношение (3.8), как и в случае стационарного ω, можно переписать следующим образом:

$$v^{m+1} = (E - \tau_{m+1}C(\omega_m))v^m, \quad C(\omega_m) = A^{\frac{1}{2}}B^{-1}(\omega_m)A^{\frac{1}{2}}, \quad v^m = A^{\frac{1}{2}}z^m.$$

В соответствии с (2.8) скорость сходимости ПТМ (3.8) при τ_{m+1} из (3.2) определяется спектральным числом обусловленности

$$\nu(C(\omega_m)) = \frac{\lambda_{\max}C(\omega_m)}{\lambda_{\min}C(\omega_m)} = \frac{\lambda_{\max}(B^{-1}(\omega_m)A}{\lambda_{\min}B^{-1}(\omega_m)A}.$$

Теперь опять заметим, что оценка (1.12) $B(\omega_m) \geq 2\omega_m A$ неулучшаема, ибо на элементах ядра оператора $\widetilde{B}(\omega_m)$ имеем $B(\omega_m) = 2\omega_m A$. Поэтому $\lambda_{\max}C(\omega_m) \leq 1/2\omega_m$, как и в случае стационарного ω. Кроме того, по определению

$$\lambda_{\min}C(\omega_m) = \lambda_{\min}(B^{-1}(\omega_m)A) = \min_{y^m \neq 0} \frac{(Ay^m, y^m)}{(B(\omega_m)y^m, y^m)}.$$

Здесь и далее $y^m \in H_m \subset H$. О принципах выбора H_m речь пойдет ниже, а пока можно считать, что $y^m \in H$. Итак, мы приходим к основной оценке для $\nu(C(\omega_m))$:

$$\nu(C(\omega_m)) \le \max_{y^m \neq 0} N(\omega_m, y^m) = \max_{y^m \neq 0} \frac{(B(\omega_m)y^m, y^m)}{2\omega_m(Ay^m, y^m)}. \tag{3.9}$$

Лемма 1. *Если* $y \in H$, $y \neq 0$ *и* $\widehat{\omega}$: $\min\limits_{\omega>0} N(\omega, y)$, *то*

$$\widehat{\omega} = \frac{\|y\|}{\|A_2 y\|}. \tag{3.10}$$

Доказательство практически очевидно. Пусть $a = \|y\|^2$, $b = (Ay, y)$, $c = \|A_2 y\|^2$. Тогда

$$N(\omega, y) = \frac{a + b\omega + c\omega^2}{2\omega b} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2b}\left(\frac{a}{\omega} + c\omega\right)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{ac}}{2b}\left(\frac{a}{\omega\sqrt{ac}} + \frac{c\omega}{\sqrt{ac}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\beta}\left(\frac{\alpha}{\omega} + \frac{\omega}{\alpha}\right), \tag{3.11}$$

где положено

$$\beta(y) = \frac{b}{2\sqrt{ac}} = \frac{(Ay, y)}{2\|y\|\,\|A_2 y\|}, \quad \alpha(y) = \sqrt{\frac{a}{c}} = \frac{\|y\|}{\|A_2 y\|}. \tag{3.12}$$

Теперь остается учесть, что $(\alpha/\omega + \omega/\alpha) \ge 2$.

Лемма 2. *Если* $y \in H$ *и* $y \neq 0$, *то*

$$\min_{\omega>0} N(\omega, y) = N(\widehat{\omega}, y) = \frac{1+\beta}{2\beta} = g(\beta). \tag{3.13}$$

Лемма 3. *Если* $y \in H$ *и* $y \neq 0$, *то для* $\beta(y)$ *из* (3.12) *справедливы неравенства*

$$\sqrt{\xi} \le \beta(y) \le 1, \quad \xi = \frac{\delta}{\Delta}. \tag{3.14}$$

Действительно, достаточно учесть определение констант δ и Δ в (1.10), чтобы получить

$$\beta(y) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(Ay, y)}{(y, y)}} \cdot \sqrt{\frac{(Ay, y)}{(A_1 A_2 y, y)}} \ge \frac{1}{2}\sqrt{\delta}\frac{2}{\sqrt{\Delta}} = \sqrt{\xi}.$$

С другой стороны, поскольку $(Ay, y) = 2(A_2 y, y)$, то применение неравенства Коши — Буняковского дает

$$\beta(y) = \frac{(Ay, y)}{2\|y\|\,\|A_2 y\|} = \frac{2(A_2 y, y)}{2\|y\|\,\|A_2 y\|} \le \frac{\|y\|\,\|A_2 y\|}{\|y\|\,\|A_2 y\|} = 1.$$

Лемма 4. *Если* $y^m \in H$ *и* $y^m \neq 0$, *то*

$$\max_{y^m \neq 0} \min_{\omega_m > 0} N(\omega_m, y^m) = \frac{1 + \sqrt{\xi}}{2\sqrt{\xi}}, \quad \xi = \frac{\delta}{\Delta}. \tag{3.15}$$

В самом деле, из (3.14) заключаем, что областью определения функции $g(\beta)$ из (3.13) является интервал: $\beta \in [\sqrt{\xi}, 1]$. Поэтому (3.15) вытекает из $g'_\beta < 0$ и леммы 2.

Из (3.9) и (3.15) следует, что справедлива

Лемма 5. *Если* $y^m \in H$, $y^m \neq 0$, *то*

$$\nu\left(C\left(\widehat{\omega}_m = \frac{\|y^m\|}{\|A_2 y^m\|}\right)\right) \leq \frac{1+\sqrt{\xi}}{2\sqrt{\xi}}, \quad \xi = \frac{\delta}{\Delta}. \tag{3.16}$$

При получении оценки сверху (3.16) спектрального числа обусловленности $\nu(C(\widehat{\omega}_m))$ не требуется априорной информации (1.10). Однако нужно указать способ определения (вычисления) последовательности y^m. Конкретный выбор y^m означает, что оценка функционала $N(\omega_m, y^m)$ проводится на элементах y^m. Тем самым задание y^m при $D = A$ порождает ПТМ скорейшего спуска:

$$\begin{gathered} r^m = Ax^m - f, \quad y^m \text{ заданы}, \quad \widehat{\omega}_m = \frac{\|y^m\|}{\|A_2 y^m\|}, \quad B(\widehat{\omega}_m) w^m = r^m, \\ \tau_{m+1} = \frac{(r^m, w^m)}{(Aw^m, w^m)}, \quad x^{m+1} = x^m - \tau_{m+1} w^m. \end{gathered} \tag{3.17}$$

Прежде чем говорить о скорости сходимости ПТМ (3.17) и других подобных методов, еще раз отметим следующее. Если известна априорная информация (1.10): $\delta a \leq b$ и $4c \leq \Delta b$, то вместо (3.15) будем иметь

$$\min_{\omega>0} \max_{y\neq 0} N(\omega, y) = \frac{1+\sqrt{\xi}}{2\sqrt{\xi}}, \quad \xi = \frac{\delta}{\Delta}, \quad \omega_* = \frac{2}{\sqrt{\delta\Delta}}. \tag{3.18}$$

Действительно (сравни с (3.11)),

$$N(\omega, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2b}\left(\frac{a}{\omega} + c\omega\right) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4\sqrt{\xi}}\left(\frac{\omega_*}{\omega} + \frac{\omega}{\omega_*}\right), \quad \omega_* = \frac{2}{\sqrt{\delta\Delta}}, \tag{3.19}$$

и остается заметить, что $(\omega_*/\omega + \omega/\omega_*) \geq 2$. Из (3.19) вытекает, что

$$\nu(C(\omega = \omega_* = 2/\sqrt{\delta\Delta})) \leq \frac{1+\sqrt{\xi}}{2\sqrt{\xi}}, \quad \xi = \frac{\delta}{\Delta}. \tag{3.20}$$

Оценка (3.20) остается справедливой и в тех случаях, когда априори известна лишь часть информации (1.10). Пусть, например, задана константа δ из операторного неравенства $\delta E \leq A$. Тогда

$$N(\omega, y) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4\sqrt{\xi}}\left(\frac{\omega_1}{\omega} + \frac{\omega}{\omega_1}\right), \quad \omega_1 = \frac{\|y\|_A}{\sqrt{\delta}\|A_2 y\|}. \tag{3.21}$$

Если же известна лишь константа Δ из операторного неравенства $4A_1A_2 \leq \Delta A$, то

$$N(\omega, y) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4\sqrt{\xi}}\left(\frac{\omega_2}{\omega} + \frac{\omega}{\omega_2}\right), \quad \omega_2 = \frac{2\|y\|}{\sqrt{\Delta}\|y\|_A}. \tag{3.22}$$

В обоих случаях оценка (3.20) сохраняется:

$$\nu(C(\widehat{\omega}_m = \omega_{1m})) \leq \frac{1+\sqrt{\xi}}{2\sqrt{\xi}}, \quad \nu(C(\widehat{\omega}_m = \omega_{2m})) \leq \frac{1+\sqrt{\xi}}{2\sqrt{\xi}}. \tag{3.23}$$

Тем самым мы приходим к адаптивному ПТМ скорейшего спуска (2.4), (2.6), в котором определение ω_m происходит в соответствии с имеющейся априорной информацией:

$$r^m = Ax^m - f, \quad y^m \text{ заданы},$$

$$\omega_m = \begin{cases} 2/\sqrt{\delta\Delta}, & \text{если известны } \delta \text{ и } \Delta; \\ \|y^m\|_A/\sqrt{\delta}\|A_2 y^m\|, & \text{если известно } \delta; \\ 2\|y^m\|/\sqrt{\Delta}\|y^m\|_A, & \text{если известно } \Delta; \\ \|y^m\|/\|A_2 y^m\|, & \text{если априорной информации нет.} \end{cases} \tag{3.24}$$

$$B(\omega_m)w^m = r^m, \quad \tau_{m+1} = \frac{(r^m, w^m)}{(Aw^m, w^m)}, \quad x^{m+1} = x^m - \tau_{m+1} w^m.$$

Отметим, что при $D = A$ и ω_m из (3.24) задание y^m вместе с (2.12), (2.13) определяет один из вариантов адаптивного ПТМ сопряженных градиентов.

§ 4. Сходимость адаптивного ПТМ скорейшего спуска

Предварительно дадим некоторые комментарии относительно сделанного в (3.10) выбора $\widehat{\omega}(y)$. Как нетрудно убедиться, справедливо тождество

$$(By, y) = \|y\|^2 + \omega(Ay, y) + \omega^2\|A_2 y\|^2 = a + \omega b + \omega^2 c$$
$$= (\sqrt{a} - \omega\sqrt{c})^2 + \omega b + 2\omega\sqrt{ac} = (\sqrt{a} - \omega\sqrt{c})^2 + \omega b\frac{1 + \beta(y)}{\beta(y)}. \tag{4.1}$$

Здесь $\beta(y)$ определено в (3.12) и в соответствии с леммой 3 из (4.1) вытекает, что

$$(By, y) \geq (\|y\| - \omega\|A_2 y\|)^2 + 2\omega(Ay, y),$$
$$(By, y) \leq (\|y\| - \omega\|A_2 y\|)^2 + \omega(Ay, y)\frac{1 + \sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}}. \tag{4.2}$$

Поэтому при $\omega(y) = \widehat{\omega}(y) = \|y\|/\|A_2 y\|$ из (4.2) получаем

$$\gamma_1(y)(B(\widehat{\omega})y, y) \leq (Ay, y) \leq \gamma_2(y)(B(\widehat{\omega})y, y),$$
$$\gamma_1(y) = \frac{\sqrt{\xi}}{(1 + \sqrt{\xi})\widehat{\omega}(y)}, \quad \gamma_2(y) = \frac{1}{2\widehat{\omega}(y)}. \tag{4.3}$$

С другой стороны, при заданной априорной информации (1.10) теория оптимизации ПТМ из § 1, связанная с нахождением $\min\max N(\omega, y)$, приводит к (1.15):

$$\gamma_1(\omega_*)(B(\omega_*)y, y) \leq (Ay, y) \leq \gamma_2(\omega_*)(B(\omega_*)y, y). \tag{4.4}$$

Как легко проверить, (4.4) можно представить и в виде

$$\frac{\sqrt{\xi}}{(1 + \sqrt{\xi})\omega_*}(B(\omega_*)y, y) \leq (Ay, y) \leq \frac{1}{2\omega_*}(B(\omega_*)y, y). \tag{4.5}$$

Из (4.3)–(4.5) следует, что

$$\gamma_1(y)\widehat{\omega}(y) = \gamma_1(\omega_*)\omega_*, \quad \gamma_2(y)\widehat{\omega}(y) = \gamma_2(\omega_*)\omega_*.$$

Поэтому для $C(\omega_*)$ из (3.2)

$$\lambda_{\min}(C(\omega_*)) \geq \gamma_1(\omega_*) = \gamma_1(y)\frac{\widehat{\omega}(y)}{\omega_*}, \quad \lambda_{\max}(C(\omega_*)) \leq \gamma_2(\omega_*) = \gamma_2(y)\frac{\widehat{\omega}(y)}{\omega_*} \tag{4.6}$$

и, кроме того,

$$\nu(C(\omega_*)) = \frac{\lambda_{\max}(C(\omega_*))}{\lambda_{\min}(C(\omega_*))} \leq \frac{\gamma_2(\omega_*)}{\gamma_1(\omega_*)} = \frac{1 + \sqrt{\xi}}{2\sqrt{\xi}} = \frac{\gamma_2(y)}{\gamma_1(y)}. \tag{4.7}$$

Оценки (4.3) и (4.4) имеют принципиально различный характер. Так как $\gamma_\alpha(\omega_*)$ не зависят от y, оценка (4.4) справедлива для всех элементов $y \in H$, $y \neq 0$. В то же время оценка (4.3) имеет место для конкретного элемента $y \in H$, $y \neq 0$, поскольку в (4.3) $\gamma_\alpha = \gamma_\alpha(y)$. Тем не менее для оценки $\nu(C(\omega_*))$ можно использовать не $\gamma_\alpha(\omega_*)$, а $\gamma_\alpha(y)$. Именно этот факт и послужил основным наводящим соображением при получении оценок сверху (3.16), (3.21), (3.22) для $\nu(C(\widehat{\omega}))$.

Лемма 6. *Если* $\widehat{\omega}(y)$ *определено в* (3.10), *а константы* δ, Δ *в* (1.10), *то для любого* $y \in H$, $y \neq 0$
$$\frac{2}{\Delta} \leq \widehat{\omega}(y) \leq \frac{2}{\delta}. \tag{4.8}$$

Действительно, из неравенства Коши — Буняковского, (3) и (1.10) получаем
$$\delta\|y\|^2 \leq (Ay, y) = 2(A_2 y, y) \leq 2\|A_2 y\|\,\|y\|.$$

Неравенство $\widehat{\omega}(y) \leq 2/\delta$ в (4.8) вытекает теперь из (3.10). Неравенство $2/\Delta \leq \widehat{\omega}(y)$ в (4.8) является следствием (3), (1.10) и (3.10), поскольку
$$\widehat{\omega}^2(y) = \frac{\|y\|^2}{\|A_2 y\|^2} = \frac{(Ay, y)}{(A_1 A_2 y, y)} \cdot \frac{\|y\|^2}{(Ay, y)} \geq \frac{4\|y\|^2}{\Delta(Ay, y)} \geq \frac{4}{\Delta^2}.$$

Оценки (4.8) леммы 6 можно уточнить. Пусть μ_i — собственные числа, а p_i — собственные элементы спектральной задачи
$$Ap_i = \mu_i p_i, \quad \delta = \mu_{\min}(A) = \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_{n-1} < \mu_n = \mu_{\max}(A) = \Delta. \tag{4.9}$$

Если ввести обозначение $\widehat{\omega}_i = \widehat{\omega}(p_i)$, то
$$\widehat{\omega}_i^2 = \frac{\|p_i\|^2}{(Ap_i, p_i)} \cdot \frac{(Ap_i, p_i)}{(A_1 A_2 p_i, p_i)} \geq \frac{4}{\mu_1 \mu_n}.$$

Кроме того, $\mu_i\|p_i\|^2 = 2(A_2 p_i, p_i) \leq 2\|A_2 p_i\|\|p_i\|$. Поэтому вместо (4.8) будем иметь
$$\frac{2}{\sqrt{\mu_i \mu_n}} \leq \widehat{\omega}_i \leq \frac{2}{\mu_i}. \tag{4.10}$$

Это означает, что для ω_* справедлива

Лемма 7. *Если* $\nu(A)$ *— спектральное число обусловленности оператора* A, *а* μ_j *— наименьшее из* μ_i, *для которых выполнено условие* $\sqrt{\nu(A)} < \mu_i/\mu_1$, *то*
$$\widehat{\omega}(p_i) = \widehat{\omega}_i < \omega_* < \widehat{\omega}(p_1), \quad i \geq j. \tag{4.11}$$

При доказательстве справедливости (4.11) следует использовать (4.10) и учесть равносильность неравенств
$$\frac{2}{\mu_j} < \frac{2}{\sqrt{\mu_1 \mu_n}} = \omega_* \longleftrightarrow \sqrt{\nu(A)} < \sqrt{\mu_j}\mu_1.$$

Дальнейшую локализацию ω_* свяжем с функционалами (3.21), (3.22).

Лемма 8. *Если* $\omega_1(y)$, $\omega_2(y)$ *определены соответственно в* (3.21), (3.22), *то для любого* $y \in H$, $y \neq 0$,
$$\omega_2(y) \leq \omega_* \leq \omega_1(y). \tag{4.12}$$

Действительно, по определению
$$\omega_1(y) = \frac{\|y\|_A}{\sqrt{\delta}\|A_2 y\|} = \frac{1}{\sqrt{\delta}}\sqrt{\frac{(Ay, y)}{(A_1 A_2 y, y)}} \geq \frac{2}{\sqrt{\delta\Delta}} = \omega_*,$$
$$\omega_2(y) = \frac{2\|y\|}{\sqrt{\Delta}\|y\|_A} = \frac{2}{\sqrt{\Delta}}\sqrt{\frac{(y, y)}{(Ay, y)}} \leq \frac{2}{\sqrt{\delta\Delta}} = \omega_*.$$

В качестве следствия из (4.9) и (4.12) имеем

$$\frac{2}{\Delta} = \omega_2(p_n) < \dots < \omega_2(p_2) < \omega_2(p_1) = \frac{2}{\sqrt{\delta}\Delta} = \omega_* \le \omega_1(p_i). \tag{4.13}$$

В [2, гл. 8; 9, гл. 15] при оценке скорости сходимости итерационных методов вариационного типа применяется следующий прием. Исследуемый метод сравнивается с другим, «эталонным», скорость сходимости которого заведомо известна. Этот же прием использован в § 2 при получении оценки (2.11) (см. цепочку преобразований (2.9)). Для ПТМ скорейшего спуска (3.17) естественно было бы использовать в качестве эталонного нестационарный ПТМ

$$\begin{gathered} B(\widehat{\omega}_m)\frac{x^{m+1}-x^m}{\hat{\tau}_{m+1}} + Ax^m = f, \quad y^m \text{ заданы}, \\ \widehat{\omega}_m = \frac{\|y^m\|}{\|A_2y^m\|}, \quad \hat{\tau}_{m+1} = \tau_{m+1}(y^m) = \frac{2}{\gamma_1(y^m)+\gamma_2(y^m)}. \end{gathered} \tag{4.14}$$

Если в (4.14) использовать $\gamma_1(y^m), \gamma_2(y^m)$ из (4.3), то (сравни с (1.15))

$$\hat{\tau}_{m+1} = 4\widehat{\omega}_m\frac{1+\sqrt{\xi}}{1+3\sqrt{\xi}}. \tag{4.15}$$

Если же в соответствии с леммой 1 определить $\beta(y^m)$ и положить

$$\tilde{\gamma}_1(y^m) = \frac{\beta(y^m)}{(1+\beta(y^m))\widehat{\omega}_m}, \quad \tilde{\gamma}_2(y^m) = \frac{1}{2\widehat{\omega}_m}, \tag{4.16}$$

то тогда в (4.14)

$$\hat{\tau}_{m+1} = 4\widehat{\omega}_m\frac{1+\beta(y^m)}{1+3\beta(y^m)}. \tag{4.17}$$

В отличие от (4.14), (4.15) нестационарный эталонный ПТМ (4.14), (4.17) допускает численную реализацию и при отсутствии априорной информации (1.10).

Оба эталонных метода: (4.14), (4.15) и (4.14), (4.17), являются сходящимися. В самом деле, в (4.14) $A = A^* > 0$, $B(\widehat{\omega}_m) = B^*(\widehat{\omega}_m) > 0$. Поэтому условие $B(\widehat{\omega}_m) > 0.5\hat{\tau}_{m+1}A$ является необходимым и достаточным для сходимости ПТМ (4.14)–(4.17). Заметим, что это условие с помощью тождества (1.11) и формул (4.15), (4.17) для $\hat{\tau}_{m+1}$ преобразуется к неравенствам

$$\begin{aligned} &(\widetilde{B}(\widehat{\omega}_m)y^m, y^m) + \frac{4\widehat{\omega}_m\beta(y^m)}{1+3\beta(y^m)}(Ay^m, y^m) \\ &\qquad\qquad \ge (\widetilde{B}(\widehat{\omega}_m)y^m, y^m) + \frac{4\widehat{\omega}_m\sqrt{\xi}}{1+3\sqrt{\xi}}(Ay^m, y^m) > 0, \end{aligned}$$

справедливость которых очевидна.

Пусть $\gamma_\alpha(\omega_*), \tau_*$ определены в (1.15), а $\gamma_\alpha(y^m), \hat{\tau}_{m+1}$ — в (4.3), (4.15). Отношение $\gamma_1(y^m)/\gamma_2(y^m)$ является инвариантом и, как отмечено в (4.7), может быть использовано для оценки $\nu(C(\omega_*))$. Так как

$$\tau_*\gamma_\alpha(\omega_*) = \hat{\tau}_{m+1}\frac{\omega_*}{\widehat{\omega}_m}\gamma_\alpha(y^m)\frac{\widehat{\omega}_m}{\omega_*} = \hat{\tau}_{m+1}\gamma_\alpha(y^m),$$

то инварианты $\hat{\tau}_{m+1}\gamma_\alpha(y^m)$ можно использовать для вычисления ρ_*, указанного в теореме 1.2:

$$1-\rho_* = \tau_*\gamma_1(\omega_*), \quad 1+\rho_* = \tau_*\gamma_2(\omega_*), \quad \|S(\omega_*)\| = \|E-\tau_*C(\omega_*)\| \le \rho_*.$$

Однако на этом формальное сходство между $\gamma_\alpha(\omega_*)$ и $\gamma_\alpha(y^m)$ заканчивается. В самом деле,

$$\gamma_1(y) = \gamma_1(\omega_*)\frac{\omega_*}{\widehat{\omega}(y)}, \quad \gamma_2(y) = \gamma_2(\omega_*)\frac{\omega_*}{\widehat{\omega}(y)}. \tag{4.18}$$

Из (4.11), (4.18) вытекает, что равномерные оценки в (4.3): $\gamma_1(y) \le \lambda_{\min}(C(\widehat{\omega}))$, $\gamma_2(y) \ge \lambda_{\max}(C(\widehat{\omega}))$, реализуются, вообще говоря, на разных элементах $y \in H$. Именно в этом и заключается основная трудность при использовании теории из §1 для получения реалистичных оценок скорости сходимости эталонного ПТМ (4.14), (4.15). Поясним сказанное. Разумеется, с помощью леммы 6 не составляет труда получить нужные равномерные оценки для функционалов $\gamma_\alpha(y)$ из (4.3)

$$\gamma_1(y) \ge \frac{\delta(1+\sqrt{\xi})}{4\sqrt{\xi}}, \quad \gamma_2(y) \le \frac{\Delta}{4}.$$

Для эталонного ПТМ (4.14), (4.15) теория из § 1 в этом случае дает

$$\rho(\widehat{\omega}) > \rho(\omega = 0),\ \rho(\widehat{\omega}) > \rho(\omega = 2/\Delta),\ \rho(\widehat{\omega}) > \rho(\omega_*),\ \rho(\widehat{\omega}) > \rho(\omega = 2/\delta). \tag{4.19}$$

Сравнение (4.19) с (1.16), (1.25) и (1.32) делает дальнейшие комментарии излишними. Аналогичные трудности возникают и для эталонного ПТМ (4.14), (4.17). Поэтому исследование скорости сходимости ПТМ скорейшего спуска (3.17) свяжем с непосредственной оценкой скорости убывания минимизируемого в (3.17) функционала $\|z^{m+1}\|_A^2$. Основной при таком подходе является следующая

Лемма 9 [14, с. 81; 15, с. 57, 213]. *Если $C = C^* > 0$ и $\nu = \nu(C)$ — спектральное число обусловленности оператора C, то для любого $y \in H$, $y \ne 0$,*

$$(Cy, y)(C^{-1}y, y) \le \frac{1}{4}(\nu^{\frac{1}{2}} + \nu^{-\frac{1}{2}})^2 (y, y)^2. \tag{4.20}$$

Начиная с [5] неравенство (4.20) обычно используется при оценках скорости сходимости итерационных методов вариационного типа. В этой связи о (4.20) иногда говорят как о неравенстве Л. В. Канторовича [16, с. 527, 528]. Приводимые в [5, 6] доказательства леммы основаны на следующих разложениях:

$$y = \sum_i a_i\psi_i, \quad C\psi_i = \lambda_i\psi_i, \quad (\psi_i, \psi_j) = \delta_{i,j},$$

$$(y, y) = \sum_i a_i^2, \quad (Cy, y) = \sum_i a_i^2\lambda_i, \quad (C^{-1}y, y) = \sum_i a_i^2\frac{1}{\lambda_i}.$$

Далее следует положить $\alpha = \sqrt{\lambda_{\min}(C)\lambda_{\max}(C)}$. Тогда

$$(Cy, y)(C^{-1}y, y) = \left(\frac{1}{\alpha}\sum_i a_i^2\lambda_i\right)\left(\alpha\sum_i a_i^2\frac{1}{\lambda_i}\right) \le \frac{1}{4}\left[\sum_i a_i^2\left(q_i + \frac{1}{q_i}\right)\right]^2.$$

Здесь $\alpha q_i = \lambda_i$ и поэтому $\nu^{-\frac{1}{2}} \le q_i \le \nu^{\frac{1}{2}}$. Теперь остается заметить, что если $f(q) = q + q^{-1}$, то $\max f(q) = f(\nu^{\frac{1}{2}}) = f(\nu^{-\frac{1}{2}})$.

Для полного описания ПТМ (3.17) и (3.24) следует задать последовательность y^m, которая определяет $\widehat{\omega}_m, B(\widehat{\omega}_m)$ и на элементах которой справедливы оценки (3.18)–(3.23). Если попытаться построить $y^m \to y_*$, $\widehat{\omega}(y_*) = \omega_*$, то в силу лемм 7, 8 это потребует большей, чем в (1.10), априорной информации. Построение $\omega_m \to \omega_*$ [3, с. 400–402] требует дополнительного обоснования асимптотического свойства для нестационарного ПТМ (3.8). Остановимся на следующем варианте.

Лемма 10. *Если в* (3.17) $y^m = w^m = B^{-1}(\widehat{\omega}_m)r^m$, *то*

$$\tau_{m+1} = \widehat{\omega}_m + 2\frac{\|w^m\|^2}{(Aw^m, w^m)}. \tag{4.21}$$

Доказательство очевидно, поскольку по определению τ_{m+1} имеем

$$\tau_{m+1} = \frac{(r^m, w^m)}{(Aw^m, w^m)} = \frac{(B(\widehat{\omega}_m)w^m, w^m)}{(Aw^m, w^m)} = \frac{2\|w^m\|^2 + \widehat{\omega}_m(Aw^m, w^m)}{(Aw^m, w^m)}.$$

Практическое значение леммы 10 для ПТМ скорейшего спуска (3.17) трудно переоценить. Действительно, оптимальные параметры $\widehat{\omega}_m$ и τ_{m+1} в (3.17) выбираются исходя из разных принципов. Параметр $\widehat{\omega}_m$ минимизирует спектральное число обусловленности оператора $C(\omega_m)$ или, что то же самое, спектральное число обусловленности задачи $C(\omega_m)v = A^{\frac{1}{2}}B^{-1}(\omega_m)f$, $v = A^{\frac{1}{2}}x$, которая эквивалентна исходной задаче (1). Параметр τ_{m+1} минимизирует функционал погрешности $J(x^{m+1})$, так как

$$\|z^{m+1}\|_A^2 = \|x^{m+1}\|_A^2 - 2(x^{m+1}, f) + \|f\|_{A^{-1}}^2 = J(x^{m+1}) + \|f\|_{A^{-1}}^2.$$

Но именно при $y^m = w^m$ эти формально независимые параметры связаны линейным соотношением (4.21). Другая (эквивалентная) форма записи тождества (4.21)

$$\tau_{m+1}(\widehat{\omega}_m, w^m) = 2\widehat{\omega}_m N(\widehat{\omega}_m, w^m) = \widehat{\omega}_m \frac{1 + \beta(w^m)}{\beta(w^m)}$$

использовалась в § 3 при получении оценок (3.16), (3.23). На основе леммы 10 могут быть также построены и различные алгоритмы, реализующие (3.17), (4.21). Зададим x^m, ω_m, где $\omega_0 = \|f\|/\|A_2 f\|$. Тогда

$$\begin{gathered} r^m = Ax^m - f, \quad B(\omega_m)w^m = r^m, \\ \widehat{\omega}_m = \frac{\|w^m\|}{\|A_2 w^m\|}, \quad \tau_{m+1} = \widehat{\omega}_m + \frac{\|w^m\|^2}{(A_2 w^m, w^m)}, \\ x^{m+1} = x^m - \tau_{m+1} w^m, \quad \omega_{m+1} = \widehat{\omega}_m. \end{gathered} \tag{4.22}$$

Одна из возможных модификаций (4.22) связана с изменением порядка определения параметров $\widehat{\omega}_m$, τ_{m+1}. Например, $x^m \to r^m \to w^m$. Затем

$$\tau_{m+1} = \frac{(r^m, w^m)}{(Aw^m, w^m)}, \quad \widehat{\omega}_m = \tau_{m+1} - \frac{2\|w^m\|^2}{(Aw^m, w^m)}. \tag{4.23}$$

Далее, как в (4.22). Сразу же отметим, что если на переходе $x^m \to x^{m+1}$ используется указанный в (4.22) порядок $\widehat{\omega}_m \to \tau_{m+1}$, то на переходе $x^{m+1} \to x^{m+2}$ целесообразно применять предписанный в (4.23) порядок $\tau_{m+2} \to \widehat{\omega}_{m+1}$. Возможна также модификация, связанная с последовательным использованием порядков $\tau \to \widehat{\omega}$ из (4.23) и $\widehat{\omega} \to \tau$ из (4.22) на переходе $x^m \to x^{m+1}$. В этом случае

$$\begin{gathered} r^m = Ax^m - f, \quad B(\omega_m)w_1^m = r^m, \quad \tau_{m+1,1} = \frac{(r^m, w_1^m)}{(Aw_1^m, w_1^m)}, \\ \omega_{m,1} = \tau_{m+1,1} - \frac{2\|w_1^m\|^2}{(Aw_1^m, w_1^m)}, \quad B(\omega_{m,1})w^m = r^m, \quad \widehat{\omega}_m \frac{\|w^m\|^2}{\|A_2 w^m\|}, \\ \tau_{m+1} = \widehat{\omega}_m + \frac{\|w^m\|^2}{(A_2 w^m, w^m)}, \quad x^{m+1} = x^m - \tau_{m+1} w^m, \quad \omega_{m+1} = \widehat{\omega}_m. \end{gathered} \tag{4.24}$$

Вычислительные затраты реализации (4.24) ПТМ скорейшего спуска (3.17), (4.21) существенно превышают соответствующие затраты реализаций (4.22), (4.23). Однако вычислительный процесс (4.24) допускает внутренний контроль, например, с помощью величины $\delta\omega_j = |\omega_{j,1} - \widehat{\omega}_j|$. Поэтому если $\delta\omega_j < \varepsilon_j$, то для $m > j+1$ от реализации (4.24) следует перейти к реализациям (4.22), (4.23).

Теорема 4.1. ПТМ *скорейшего спуска* (3.17) *в условиях леммы* 10 *является сходящимся, и*

$$\|z^{m+1}\|_A \le \frac{1-\sqrt{\xi}}{1+3\sqrt{\xi}}\|z^m\|_A, \quad \xi = \frac{\delta}{\Delta}. \tag{4.25}$$

Доказательство основано на оценке (3.16) и лемме 9. Действительно, в условиях леммы 10 из (3.17) получаем

$$v^{m+1} = v^m - \tau_{m+1}C(\widehat{\omega}_m)v^m, v^m = A^{\frac{1}{2}}z^m, \quad C(\widehat{\omega}_m) = A^{\frac{1}{2}}B^{-1}(\widehat{\omega}_m)A^{\frac{1}{2}}.$$

Поэтому

$$\|z^{m+1}\|_A^2 = \|v^{m+1}\|^2 = \rho_m^2\|v^m\|^2 = \rho_m^2\|z^m\|_A^2,$$

где

$$\rho_m^2 = 1 - \frac{(Cv^m, v^m)^2}{(v^m, v^m)(Cv^m, Cv^m)} = 1 - \frac{(y,y)^2}{(C^{-1}y,y)(Cy,y)}, \quad y = C^{\frac{1}{2}}v^m.$$

Использование леммы 9 дает

$$\rho_m \le \frac{\lambda_{\max}C(\widehat{\omega}_m) - \lambda_{\min}C(\widehat{\omega}^m)}{\lambda_{\max}C(\widehat{\omega}_m) + \lambda_{\min}C(\widehat{\omega}^m)} = \frac{\nu(C(\widehat{\omega}_m)) - 1}{\nu(C(\widehat{\omega}_m)) + 1},$$

и чтобы получить (4.25), достаточно теперь учесть (3.16).

Для адаптивного метода скорейшего спуска (3.24) следует уточнить формулировку леммы 10 в соответствии с тем, какая часть информации из (1.10) считается заданной. Из (3.24) следует, что

$$\tau_{m+1} = \omega_m + \frac{1}{2\beta_m}\left(\alpha_m + \frac{\omega_m^2}{\alpha_m}\right), \quad \alpha_m = \frac{\|y^m\|}{\|A_2y^m\|}, \quad \beta_m = \frac{\|y^m\|_A^2}{2\|y^m\|\|A_2y^m\|}.$$

Поэтому при заданном δ в силу (3.21) имеем

$$\widehat{\omega}_m = \frac{\|w^m\|_A}{\sqrt{\delta}\|A_2w^m\|}, \quad \tau_{m+1} = \widehat{\omega} + \frac{\|w^m\|^2}{\|w^m\|_A^2} + \frac{1}{\delta}, \tag{4.26}$$

а при заданном Δ согласно (3.22)

$$\widehat{\omega}_m = \frac{2\|w^m\|}{\sqrt{\Delta}\|w^m\|_A}, \quad \tau_{m+1} = \widehat{\omega} + \frac{\|w^m\|^2}{\|w^m\|_A^2} + \frac{4\|w^m\|^2\|A_2w^m\|^2}{\Delta(Aw^m, w_m)^2}. \tag{4.27}$$

Наконец, нужно привести (4.22)–(4.24) в соответствие с (4.26), (4.27). С учетом этих изменений наряду с теоремой 4.1 справедлива также

Теорема 4.2. *Адаптивный* ПТМ *скорейшего спуска* (3.24) *в условиях леммы* 10 *сходится, и имеет место оценка* (4.25).

§ 5. Параметризация $\tau_{m+1} = 2\omega_m$

При оптимизации итерационного метода переменных направлений (МПН):

$$B(\omega)\frac{x^{m+1}-x^m}{\tau} + Ax^m = f, \quad A = A^* > 0, \quad \tau > 0, \quad \omega > 0,$$
$$A = A_1 + A_2, \quad A_i = A_i^* > 0, \quad B(\omega) = (E + \omega A_1)(E + \omega A_2) \tag{5.1}$$

с априорной информацией $\delta_i E \le A_i \le \Delta_i E$, обычно используется параметризация $\tau = 2\omega$ [2, 3, 10, 12]. Известно также, что при соответствующем преобразовании исходной задачи (1) ПТМ (1)–(4) можно трактовать как МПН для преобразованной задачи [12, 17]. Именно в этой связи рассмотрим вопрос о скорости сходимости ПТМ (3.8) при $\tau_{m+1} = 2\omega_m$.

Как уже отмечалось, достаточное условие сходимости нестационарного ПТМ (3.8) можно записать в таком виде: $4\omega > \tau_{m+1}$. Поэтому параметризация $\tau_{m+1} = 2\omega_m$ определяет сходящийся ПТМ (3.8). С другой стороны, параметры $\widehat{\omega}_m, \tau_{m+1}$ в ПТМ скорейшего спуска (3.17) выбираются из разных принципов, поэтому любая параметризация, отличная от (4.21), является неким компромиссом между минимальностью $\|z^{m+1}\|_A^2$ и минимальностью $\nu(C(\widehat{\omega}_m))$. Какова цена компромисса $\tau_{m+1} = 2\widehat{\omega}_m$?

Если в (3.8) $\tau_{m+1} = 2\widehat{\omega}_m$, то в силу (1.11)

$$B(\widehat{\omega}_m)z^{m+1} = B(\widehat{\omega}_m)z^m - \tau_{m+1}Az^m = \widetilde{B}(\widehat{\omega}_m)z^m + (2\widehat{\omega}_m - \tau_{m+1})Az^m = \widetilde{B}(\widehat{\omega}_m)z^m.$$

Поэтому

$$v^{m+1} = S(\widehat{\omega}_m)v^m, \quad v^m = B^{\frac{1}{2}}z^m, \quad S(\widehat{\omega}_m) = B^{-\frac{1}{2}}\widetilde{B}(\widehat{\omega}_m)B^{-\frac{1}{2}}.$$

Поскольку $S(\widehat{\omega}_m) = S^*(\widehat{\omega}_m)$, то

$$\|z^{m+1}\|_{B(\widehat{\omega}_m)} = \|v^{m+1}\| \le \rho(S(\widehat{\omega}_m))\|v^m\| = \rho(S(\widehat{\omega}_m))\|z^m\|_{B(\widehat{\omega}_m)}, \tag{5.2}$$

где $\rho(S(\widehat{\omega}_m))$ — спектральный радиус оператора $S(\widehat{\omega}_m)$. Собственные числа операторов $B^{-1}(\widehat{\omega}_m)\widetilde{B}(\widehat{\omega}_m)$, $S(\widehat{\omega}_m)$ совпадают, следовательно,

$$\rho(S(\widehat{\omega}_m)) = \max_{y^m \ne 0} \frac{(\widetilde{B}(\widehat{\omega}_m)y^m, y^m)}{(B(\widehat{\omega}_m)y^m, y^m)} = \max_{y^m \ne 0} \frac{1-\beta(y^m)}{1+\beta(y^m)}, \tag{5.3}$$

где $\beta(y^m)$ определено в (3.12). Теперь из (5.2), (5.3) и леммы 3 вытекает, что

$$\|z^{m+1}\|_{B_m} \le \frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}}\|z^m\|_{B_m}, \quad \xi = \frac{\delta}{\Delta}. \tag{5.4}$$

Итак, если для нестационарного ПТМ (3.8) использовать реализацию (4.22), в которой (4.21) заменено на $\tau_{m+1} = 2\widehat{\omega}_m$, то вместо (4.25) будем иметь (5.4). Дополнительное предположение $\widehat{\omega}_{m+1} < \widehat{\omega}_m$ позволяет переписать (5.4) следующим образом:

$$\|z^{m+1}\|_{B_{m+1}} \le \frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}}\|z^m\|_{B_m},$$

а тогда остается заметить, что для малых ξ

$$\frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}} \simeq 1 - 2\sqrt{\xi}, \quad \frac{1-\sqrt{\xi}}{1+3\sqrt{\xi}} \simeq 1 - 4\sqrt{\xi}.$$

Влияние параметризации $\tau_{m+1} = 2\omega_m$ на скорость сходимости нестационарного ПТМ (3.8) можно оценить и без дополнительного предположения $\widehat{\omega}_{m+1} < \widehat{\omega}_m$. Рассмотрим нестационарный ПТМ (3.8)

$$\begin{gathered} r^m = Ax^m - f, \quad \widehat{\omega}_m \text{ заданы}, \quad B(\widehat{\omega}_m)w^m = r^m, \\ \tau_{m+1} : \min \|z^{m+1}\|^2_{B_m(\widehat{\omega}_m)}, \quad x^{m+1} = x^m - \tau_{m+1}w^m. \end{gathered} \tag{5.5}$$

Параметры $\widehat{\omega}$ в (5.5) определим из ПТМ скорейшего спуска (3.17) в реализации (4.22). Тогда из (5.5) имеем

$$\begin{gathered} v^{m+1} = v^m - \tau_{m+1}\widetilde{C}(\widehat{\omega}_m)v^m, \quad v^m = B^{\frac{1}{2}}(\widehat{\omega}_m)z^m, \quad v^{m+1} = B^{\frac{1}{2}}(\widehat{\omega}_m)z^{m+1}, \\ \|z^{m+1}\|^2_{B(\widehat{\omega}_m)} = \|v^{m+1}\|^2 = \tilde{\rho}^2_m\|v^m\|^2 = \tilde{\rho}^2_m\|z^m\|^2_{B(\widehat{\omega}_m)}, \\ \tilde{\rho}^2_m = 1 - \frac{(\widetilde{C}v^m, v^m)^2}{(v^m, v^m)(\widetilde{C}v^m, \widetilde{C}v^m)}, \quad \widetilde{C}(\widehat{\omega}_m) = B^{-\frac{1}{2}}(\widehat{\omega}_m)AB^{-\frac{1}{2}}(\widehat{\omega}_m). \end{gathered} \tag{5.6}$$

Собственные числа операторов $C(\widehat{\omega}_m) = A^{\frac{1}{2}}B^{-1}(\widehat{\omega}_m)A^{\frac{1}{2}}$ и $\widetilde{C}(\widehat{\omega}_m)$ совпадают, и $\nu(C(\widehat{\omega}_m))$. Поэтому в качестве следствия из (5.6), леммы 9 и (3.16) получаем

$$\|z^{m+1}\|_{B_m} \leq \frac{1-\sqrt{\xi}}{1+3\sqrt{\xi}}\|z^m\|_{B_m}, \quad \xi = \frac{\delta}{\Delta}. \tag{5.7}$$

Теперь остается сравнить (5.4) и (5.7).

Если же вместо (3.8) обратиться к ПТМ скорейшего спуска (3.17) в реализации (4.23), то одновременное выполнение условий (4.21) и $2\widehat{\omega} = \tau_{m+1}$ возможно только при $\beta(w^m) = 1$. Но тогда или $w^m \in \ker \widetilde{B}(\widehat{\omega}_m)$, или $A = \alpha E$. Оба случая практического интереса не представляют.

Замечание 1. При $D = A$ не составляет труда реализация ПТМ сопряженных градиентов (2.12), (2.13) в любом из вариантов (4.22)–(4.24). Достаточно представительные результаты численных экспериментов подтверждают существенное, практически в точном соответствии с оценками (2.14), (2.15), ускорение сходимости по сравнению с ПТМ скорейшего спуска (3.17), (4.21). Однако в теоретическом плане вопрос о справедливости оценок (2.14), (2.15) для ПТМ сопряженных градиентов (2.12), (2.13), (4.21) пока остается открытым.

Замечание 2. Представленные в § 3–5 результаты с соответствующими изменениями справедливы также и для МПН (5.1). Завершенная часть исследований (коммутативный случай) готовится к печати.

Пользуясь случаем, выражаю глубокую признательность А. А. Самарскому, а также сотрудникам кафедры вычислительной математики НГУ Ю. М. Лаевскому и А. М. Мацокину за многочисленные конструктивные обсуждения работы на всех этапах ее выполнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самарский А. А.* Об одном алгоритме численного решения систем дифференциальных и алгебраических уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1964. Т. 4, № 3. С. 580–584.
2. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
3. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
4. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы. М.: Наука, 1989.

5. *Канторович Л. В.* О методе наискорейшего спуска // Докл. АН СССР. 1947. Т. 56, № 3. С. 233–236.
6. *Канторович Л. В.* Функциональный анализ и прикладная математика // Успехи мат. наук. 1948. Т. 3, № 6. С. 89–185.
7. *Марчук Г. И., Кузнецов Ю. А.* Итерационные методы и квадратичные функционалы. Новосибирск: Наука, 1972.
8. *Бахвалов Н. С.* Численные методы. М.: Наука, 1973.
9. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
10. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980.
11. *Кузнецов Ю. А.* Метод сопряженных градиентов, его обобщения и применения // Вычисл. процессы и системы. М.: Наука, 1983. С. 267–301.
12. *Марчук Г. И.* Методы расщепления. М.: Наука, 1988.
13. *Коновалов А. Н.* Вариационная оптимизация итерационных методов расщепления // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 2. С. 312–325.
14. *Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.
15. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа.. М.; Л.: Изд-во иностр. лит., 1937. Т. 1.
16. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
17. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.

Статья поступила 10 декабря 2001 г.

Коновалов Анатолий Николаевич
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН
пр. Акад. М. А. Лаврентьева, 6, Новосибирск 630090
kan@sscc.ru