Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2002. Том 43, № 3

УДК 517.956

ИНВОЛЮТИВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, ИНВАРИАНТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ И ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ

О. В. Капцов

Аннотация: Введено понятие решения инвариантного относительно инволютивного распределения. Дано достаточное условие, гарантирующее существование решения системы дифференциальных уравнений, инвариантного относительно инволютивного распределения. Для случая эволюционной системы уравнений с частными производными описывается способ построения вспомогательных уравнений, которым удовлетворяют функции, задающие дифференциальные связи, совместные с исходной системой. На основе этой теоремы вводятся линейные и квазилинейные определяющие уравнения, позволяющие находить некоторые классы инволютивных распределений, неклассических симметрий и дифференциальных связей. Приведены примеры построения редукций и точных решений некоторых уравнений с частными производными, возникающих в ряде приложений. Библиогр. 23.

1. Введение

Современное исследование математической модели, основанной на дифференциальных уравнениях с частными производными, включает изучение ее групповых свойств. Сейчас имеется большое число работ, связанных с нахождением допускаемых групп преобразований и групповой классификацией дифференциальных уравнений, возникающих в механике сплошной среды, электродинамике, теории поля [1–4]. Продолжением этих исследований является программа ПОДМОДЕЛИ, разработанная Л. В. Овсянниковым [5]. Одна из главных целей этой программы состоит в том, чтобы описать системы уравнений (подмодели), полученные из первоначальной модели с помощью перечисления всех неподобных подгрупп допускаемой группы. Переход от основной модели к уравнениям с меньшим числом независимых переменных принято называть редукцией. Как было замечено некоторыми авторами [6, 7], редукцию можно осуществлять и на основе неклассических симметрий, т. е. групп преобразований, недопускаемых исходной моделью. Однако задача нахождения неклассических симметрий часто оказывается слишком сложной, так как она связана с решением нелинейных переопределенных систем уравнений с частными производными.

Более простыми способами получения неклассических симметрий оказываются метод B-определяющих уравнений [4] и подход, использующий линейные уравнения для нахождения дифференциальных связей [8]. В обоих случаях необходимо решать вспомогательные уравнения, обобщающие классические

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–01–00850), Министерства образования РФ (грант по естественным наукам E00–1.0–57) и интеграционной программы СО РАН (проект № 1).

определяющие уравнения. В данной работе предлагается синтез этих методов, базирующийся не только на известных понятиях, но и использующий новые структуры. Введено понятие решения, инвариантного относительно инволютивного распределения. Оказывается, что можно искать решения дифференциальных уравнений, исходя из инволютивных распределений, а не обязательно используя подалгебры алгебры Ли допускаемых операторов. Дано достаточное условие, гарантирующее существование решения системы дифференциальных уравнений, инвариантного относительно инволютивного распределения. Рассматривается проблема нахождения инволютивных распределений, позволяющих получать инвариантные решения эволюционных уравнений. Вводятся линейные и квазилинейные определяющие уравнения, позволяющие находить некоторые классы инволютивных распределений, неклассических симметрий и дифференциальных связей. Приведены примеры построения редукций и точных решений некоторых уравнений с частными производными, возникающих в ряде приложений.

2. О решениях, инвариантных относительно инволютивных распределений

В групповом анализе дифференциальных уравнений для построения инвариантных и частично инвариантных решений используются алгебры Ли допускаемых операторов [1]. В данном пункте вводятся решения систем уравнений с частными производными, инвариантные относительно инволютивных распределений, даются достаточные условия существования таких решений.

В дальнейшем все рассматриваемые отображения считаются гладкими, все рассмотрения носят локальный характер, как принято в групповом анализе дифференциальных уравнений. Локальная однопараметрическая группа преобразований, порожденная векторным полем X, обозначается через G^1_X.

Напомним, что решение $u = \varphi(x)$ системы уравнений с частными производными E называется *инвариантным относительно* G^1_X, если множество $S = \{(x,u) : u = \varphi(x)\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ является инвариантным многообразием для G^1_X.

Предложение. *Пусть $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ и $U_2 \subset \mathbb{R}^m$ — открытые множества, $u = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))$ — решение системы E, заданное на U_1, а X — векторное поле на $U_1 \times U_2$ вида*

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x,u)\partial_{x_i} + \sum_{j=1}^{m} \eta^j(x,u)\partial_{u^j}. \tag{2.1}$$

Следующие условия эквивалентны:

(1) *$u = \varphi$ инвариантно относительно G^1_X;*

(2) *X касается многообразия S;*

(3) *φ удовлетворяет системе*

$$\sum_{i=1}^{n} \xi^i(x,\varphi)\varphi^j_{x_i} = \eta^j(x,\varphi), \quad j = 1, \dots, m. \tag{2.2}$$

Доказательство. Эквивалентность свойств (1), (2) хорошо известна [1]. Равносильность (2) и (3) следует из определения касания векторного поля.

Рассмотрим теперь случай, когда на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$ задан набор из p векторных полей

$$X_s = \sum_{i=1}^{n} \xi_s^i(x)\partial_{x_i}.$$

Если этот набор линейно несвязен, т. е. ранг матрицы $|\xi_s^i(x)|$ равен p в каждой точке $x \in U$, и удовлетворяет условию инволютивности

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{p} c_{ij}^k(x)X_k \quad \forall\, 1 \leq i, j \leq p, \tag{2.3}$$

где c_{ij}^k — гладкие функции, то такой набор порождает инволютивное p-мерное распределение D_p [9]. Набор векторных полей, обладающих перечисленными выше свойствами, будем называть *инволютивным базисом* или просто *базисом*. Как известно [9], распределение D_p инволютивно тогда и только тогда, когда оно обладает хотя бы одним инволютивным базисом.

Определение. Решение $u = \varphi$ системы E называется *инвариантным относительно инволютивного распределения* D_p, если D_p касается многообразия $S = \{(x, u) : u = \varphi(x)\}$.

Очевидно, инвариантность решения относительно D_p равносильна инвариантности относительно операторов произвольного инволютивного базиса D_p.

Рассмотрим теперь систему эволюционных уравнений

$$u_t^i = F^i(t, x, u, u_\alpha), \quad i = 1, \dots, m, \tag{2.4}$$

здесь t, $x = (x_1, \dots, x_n)$ — независимые переменные, $u^1, \dots, u^m$ — искомые функции, $u = (u^1, \dots, u^m)$, а через u_α обозначены различные частные производные по переменным $x_1, \dots, x_n$. Полные производные по t, x_i обозначаются символами D_t и D_{x_i}.

Пусть $J^k(U, \mathbb{R}^m)$ — пространство k-струй на $U \subset \mathbb{R}^n$. Напомним [4], что многообразие $H \subset J^k(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^m)$, заданное уравнениями

$$h^j(t, x, u, u_\beta) = 0, \quad j = 1, \dots, s, \tag{2.5}$$

называется *инвариантным относительно системы* (2.4), если на множестве $[E] \cap [H]$ выполняются равенства $D_t h^j = 0$. Здесь $[E]$ и $[H]$ означают дифференциальные следствия систем (2.4) и (2.5) по переменным $x_1, \dots, x_n$. Инволютивное распределение, порожденное векторными полями $X_1, \dots, X_r$, обозначается символом $\langle X_1, \dots, X_r \rangle$.

Лемма 1. *Предположим, что векторные поля*

$$X_k = \sum_{i=1}^{n} \xi_k^i(t, x, u)\partial_{x_i} + \sum_{j=1}^{m} \eta_k^j(t, x, u)\partial_{u^j}, \quad k = 1, \dots, n, \tag{2.6}$$

порождают инволютивное распределение и $\det(\xi_k^i) \neq 0$. *Если многообразие, заданное уравнениями*

$$h_k^j = \sum_{i=1}^{n} \xi_k^i u_{x_i}^j - \eta_k^j = 0, \quad 1 \leq j \leq m,\ 1 \leq k \leq n, \tag{2.7}$$

инвариантно относительно (2.4), *то существуют решения системы* (2.4), *инвариантные относительно данного инволютивного распределения.*

Доказательство. Запишем набор полей $X_1, \dots, X_n$ в векторной форме следующим образом: $X = \xi\partial_x + \eta\partial_u$. Действуя матрицей ξ^{-1} на X, получаем инволютивный набор $Z = \partial_x + \tilde{\eta}\partial_u$, где $\tilde{\eta} = \xi^{-1}\eta$. Распределение $\langle Z_1, \dots, Z_n\rangle$ является инволютивным, поскольку оно выражается через инволютивное распределение (доказательство имеется, например, в [10], где вместо инволютивного распределения используется термин «полная система»).

Решения, инвариантные относительно $\langle X_1, \dots, X_n\rangle$, должны удовлетворять уравнениям (2.7), а решения инвариантные относительно $\langle Z_1, \dots, Z_n\rangle$ — уравнениям

$$u^j_{x_k} = \tilde{\eta}^j_k(t, x, u). \tag{2.8}$$

Очевидно, уравнения (2.7) и (2.8) имеют одно и то же множество решений. Из инволютивности распределения Z следует, что скобка Пуассона $[Z_i, Z_k]$ равна нулю [10]. Следовательно, верны равенства

$$Z_i\bigl(\tilde{\eta}^j_k\bigr) = Z_k\bigl(\tilde{\eta}^j_i\bigr),$$

которые означают выполнение условий совместимости для системы (2.8).

Используя (2.8) и подставляя производные по x_k от функций u^j в правую часть (2.4), получаем систему

$$u^j_t = G^j(t, x, u), \quad j = 1, \dots, m. \tag{2.9}$$

Согласно теореме Фробениуса система (2.8), (2.9) будет совместна, если соотношения

$$D_{x_k}G^j = D_t\tilde{\eta}^j_k, \quad j = 1, \dots, m,\ k = 1, \dots, n, \tag{2.10}$$

выполнены в силу (2.8) и (2.9). Выполнение этих условий следует из инвариантности уравнений (2.7) относительно (2.4). Действительно, инвариантность означает, что должны выполняться равенства

$$D_t\bigl(u^j_{x_k} - \tilde{\eta}^j_k\bigr) = D_{x_k}F^j - D_t\tilde{\eta}^j_k = 0. \tag{2.11}$$

Подставляя производные по x_k в (2.11), видим, что (2.11) совпадает с (2.10).

Замечание. Если инволютивное распределение порождено аналитическими векторными полями $X_1, \dots, X_p$, где $p < n$, а (2.4) является системой уравнений первого порядка с аналитическими правыми частями и ранг матрицы $\bigl(\xi^i_k\bigr)$ равен p, то существует решение системы (2.4), инвариантное относительно набора $X_1, \dots, X_p$. Доказательство проводится по схеме, описанной выше, только вместо теоремы Фробениуса нужно использовать теорему Рикье о существовании аналитических решений ортономной системы с аналитическими правыми частями [11].

В качестве примера использования распределения для построения решений рассмотрим уравнение

$$u_t = \Delta \ln u, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{2.12}$$

которое возникает в различных приложениях [12, 13] и обладает бесконечномерной алгеброй точечных симметрий [14]. Некоторые его точные решения можно найти в работах [12, 13, 15, 16].

Мы приведем решение этого уравнения, инвариантное относительно пары коммутирующих операторов

$$X_1 = \partial_x - (u^2 + (tu^2 + u - xu^2)\operatorname{tg} t)\partial_u, \quad X_2 = \partial_y - (u + (t-x)u^2)\partial_u.$$

Данным векторным полям соответствует многообразие

$$u_x + (tu^2 + u - xu^2)\operatorname{tg} t + u^2 = 0, \tag{2.13}$$

$$u_y + u + (t-x)u^2 = 0. \tag{2.14}$$

Несложно проверить, что это многообразие инвариантно относительно уравнения (2.12). Заметим, что векторные поля X_1, X_2 не принадлежат алгебре симметрий уравнения (2.12).

Общее решение уравнений (2.13), (2.14) имеет вид

$$u = \frac{1}{s(t)(\exp(x\operatorname{tg} t + y) + x - t)}. \tag{2.15}$$

Подставляя последнее выражение в (2.12), находим

$$s = c\cos t\exp(-t\operatorname{tg} t), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Видимо, решение (2.15) ранее не было известно. Можно построить и другие решения типа (2.15), но это будет сделано в отдельной работе.

3. Определяющие уравнения

Для использования векторных полей и распределений необходимо иметь метод их нахождения. Классический подход построения векторных полей, относительно которых инвариантны дифференциальные уравнения, был предложен С. Ли. Современное изложение с большим числом примеров и новых результатов дано Л. В. Овсянниковым [1].

Цель этого пункта состоит в описании нового способа построения распределений, позволяющего осуществлять редукции дифференциальных уравнений и находить решения.

Попытки расширения группового анализа дифференциальных уравнений предпринимались неоднократно. Наиболее существенным вкладом последних тридцати лет следует, по-видимому, считать высшие симметрии [2, 17]. Здесь же мы кратко остановимся на «неклассическом методе» [6, 18]. Суть этого подхода состоит в следующем.

Пусть задано дифференциальное уравнение E:

$$F(x_1, x_2, u, u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_1x_1}, \dots) = 0. \tag{3.1}$$

Далее к этому уравнению добавляется дифференциальная связь H:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{2} \xi^i u_{x_i} - \eta = 0, \tag{3.2}$$

здесь ξ^i, η — неизвестные пока функции, которые могут зависеть от x_i, x_2, u. Затем требуется, чтобы векторное поле

$$X = \sum_{i=1}^{2} \xi^i \partial_{x_i} + \eta\partial_u$$

касалось многообразия, заданного системой (3.1), (3.2), т. е. выполнялось условие

$$XF|_{E\cap H} = 0. \tag{3.3}$$

Как следует из работы [19], требование (3.3) представляет собой просто условие совместности системы (3.1), (3.2). Найти коэффициенты ξ^i, η векторного поля X, исходя из условия (3.3), крайне сложно. В конкретных примерах рассматриваются специальные виды коэффициентов.

В недавней работе [8] был предложен новый метод построения дифференциальных связей, совместных с уравнениями эволюционного типа. Этот метод применялся к уравнениям в частных производных с двумя независимыми переменными. Метод основан на решении вспомогательных линейных уравнений, обобщающих классические определяющие уравнения [1], которые служат для нахождения допускаемых инфинитезимальных операторов.

Для иллюстрации данного метода рассмотрим уравнение Гиббонса — Царева [20]

$$u_{tt} = u_x u_{tx} - u_t u_{xx} + 1. \tag{3.4}$$

Соответствующее определяющее уравнение согласно [8] имеет вид

$$D_t^2 h = u_x D_t D_x h - u_t D_x^2 h + b_1 u_{tx} D_x h + b_2 u_{xx} D_t h. \tag{3.5}$$

Это уравнение должно выполняться в силу (3.4). Константы b_1 и b_2 подлежат нахождению одновременно с функцией h.

Уравнение (3.5) обладает при $b_1 = -1$, $b_2 = 1$ решением, зависящим от вторых производных

$$h_1 = u_{xx} + k_1 u_x + k_2, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Решение уравнения (3.5) при $b_1 = -2$, $b_1 = 2$, зависящее от третьих производных, выглядит следующим образом:

$$h_2 = u_{xxx} + k_1 u_x + k_2, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Приравнивая h_2 к нулю, получаем дифференциальную связь

$$u_{xxx} + k_1 u_x + k_2 = 0. \tag{3.6}$$

Найдем некоторые решения системы (3.4), (3.6).

Пусть $k_1 = k_2 = 0$. Тогда уравнение имеет решение

$$u = s_2 x^2 + s_1 x + s_0,$$

где s_i — функция от t. Подставляя это выражение в (3.4), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$s_2'' - 2s_2 s_2' = 0, \tag{3.7}$$

$$s_1'' - 2s_1 s_2' = 0, \tag{3.8}$$

$$s_0'' + 2s_2 s_0' - 1 - s_1 s_1' = 0. \tag{3.9}$$

Интегрируя один раз уравнение (3.7), находим

$$s_2 = s_2^2 + m. \tag{3.10}$$

Если $m = -1$, то одним из решений (3.10) является функция $s_2 = -\operatorname{th}(t)$. Подставляя данную функцию в (3.8), приходим к уравнению

$$s_1'' + \frac{2}{\operatorname{ch}^2 t} s_1 = 0,$$

его общее решение имеет вид

$$s_1 = c_1 \operatorname{th}(t) + c_2(t \operatorname{th}(t) - 1).$$

Решение линейного уравнения (3.9) находится с помощью квадратур. Оно имеет громоздкий вид и здесь не приводится.

Предположим теперь, что в уравнении (3.6) $k_1 = -1$, $k_2 = 0$. Тогда из уравнения (3.6) получаем представление для u:

$$u = s_1(t) + s_2(t)e^x + s_3(t)e^{-x}.$$

Подставляя данное выражение в (3.4), приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$s_2'' + s_1's_2 = 0, \quad s_1'' + 2s_3s_2' + 2s_2s_3' - 1 = 0, \quad s_3'' + s_1's_3 = 0.$$

Если $s_3 = as_2$, то последняя система сведется к двум уравнениям

$$s_2'' + s_1's_2 = 0, \quad s_1'' + 4as_2s_2' - 1 = 0. \tag{3.11}$$

Интегрируя последнее уравнение, находим

$$s_1' = t + b - 2as_2^2, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Можно подставить это выражение в (3.11) и получить уравнение второго порядка

$$s_2'' + \big(t + b - 2as_2^2\big)s_2 = 0.$$

В результате преобразований $t_1 = t + b$, $w = \sqrt{a}s_2$ приводим уравнение для s_2 к уравнению Пенлеве II [21]

$$w'' = 2w^3 + t_1 w.$$

Определяющее уравнение типа (3.5) позволяет находить дифференциальные связи, совместные с исходным уравнением. В случае дифференциальных уравнений более чем с двумя независимыми переменными можно предложить системы определяющих уравнений, позволяющие искать инволютивные распределения.

Рассмотрим систему инволюционных уравнений (2.4) и многообразие в $J^1(U, \mathbb{R}^m)$

$$h_j^i = u_{x_j}^i + g_j^i(t, x, u) = 0, \tag{3.12}$$

где $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Система (2.4) и ее дифференциальные следствия по $x_1, \ldots, x_n$ обозначаются через $[E]$. Уравнения (3.12) вместе с их дифференциальными следствиями обозначаются через $[H]$.

Теорема. *Предположим, что многообразие (3.12) инвариантно относительно системы (2.4), правые части которой являются многочленами от производных, с коэффициентами, зависящими от t, $x_1, \dots, x_n$, $u^1, \dots, u^m$. Тогда на множестве $[E]$ функции h^i_j удовлетворяют системе*

$$D_t h^i_j + m_{ij}(h) = 0, \quad 1 \le i \le m, \ 1 \le j \le n. \tag{3.13}$$

Здесь $m_{ij}(h)$ — некоторый оператор, представляющий собой многочлен от h^k_l, $D_{x_1} h^k_l, \dots, D_{x_n} h^k_l, \dots, D^\alpha h^k_l$ $(k = 1, \dots, m,\ l = 1, \dots, n)$. Операторы m_{ij} обращаются в нуль, когда все h^k_l равны нулю.

Доказательство. Сначала покажем, что полная производная по t от h^i_j представляется в виде

$$D_t h^i_j = m_{ij}(h) + \gamma_{ij}, \tag{3.14}$$

где m_{ij} — операторы, описанные в теореме, γ_{ij} — функции, которые могут зависеть только от t, x, u.

На множестве $[E]$ справедливы равенства

$$D_t h^i_j = D_{x_j} F^i + \frac{\partial g^i_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^{m} F^k \frac{\partial g^i_j}{\partial u^k}. \tag{3.15}$$

Пусть $\frac{\partial^{|s|} u^k}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_n^{s_n}}$ — производная максимального порядка в правой части (3.15) и $s_p \neq 0$ для некоторого p. Согласно (3.15) и предположению теоремы эта производная входит в (3.15) полиномиальным образом. Данная производная с помощью (3.12) записывается в виде

$$D^{s_1}_{x_1} \dots D^{s_p - 1}_{x_p} \dots D^{s_n}_{x_n} \bigl(h^k_p\bigr) - D^{s_1}_{x_1} \dots D^{s_p - 1}_{x_p} \dots D^{s_n}_{x_n} \bigl(g^k_p\bigr).$$

Заметим, что второе слагаемое не содержит производных порядка $|s|$ и является многочленом от производных. Таким образом, можно выразить все производные максимального порядка в правой части (3.15) с помощью полных производных от функций h^r_q $(r = 1, \dots, m,\ q = 1, \dots, n)$. После этого выражаются производные порядка $|s| - 1$ и т. д., вплоть до производных первого порядка.

Остается показать, что функции γ_{ij} в (3.14) равны нулю. По условию теоремы многообразие (3.12) инвариантно относительно системы (2.4). Следовательно, на множестве $[E] \cap [H]$ выполняются равенства

$$m_{ij}(h) + \gamma_{ij} = D_t h^i_j = 0.$$

Поскольку m_{ij} обращаются в нуль на $[H]$, функции γ_{ij} равны нулю на $[E] \cap [H]$. Так как γ_{ij} не зависят от производных функций u^k, то γ_{ij} тождественно равны нулю.

Замечание. Как видно из доказательства теоремы, может иметь место неоднозначность в выборе операторов m_{ij}.

Рассмотрим, например, уравнение второго порядка с тремя независимыми переменными:

$$u_t = G \equiv F^1 u_{xx} + F^2 u_{yy} + F^3 u_x^2 + F^4 u_y^2 + F^5, \tag{3.16}$$

где F^i — некоторые функции, зависящие от u. Предположим, что многообразие

$$h_1 \equiv u_x + g_1(t, x, y, u) = 0, \quad h_2 \equiv u_y + g_2(t, x, y, u) = 0 \tag{3.17}$$

инвариантно относительно (3.16). Для того чтобы получить систему определяющих уравнений типа (3.13), выразим производные $D_t h_1$ и $D_t h_2$ через h_i, $D_x h_i$, $D_y h_i$, $D_x^2 h_i$, $D_x D_y h_i$, $D_y^2 h_i$ $(i = 1, 2)$. В силу уравнения (3.16) имеет место равенство

$$D_t h_1 = D_x G + \frac{\partial g_1}{\partial t} + \frac{\partial g_1}{\partial u} G.$$

Несложно проверить, что правая часть последнего равенства представляется в виде

$$m_{11}(h_1, h_2) = G_{u_{xx}} D_x^2 h_1 + G_{u_{yy}} D_y^2 h_1 + [G_{u_x} + D_x(G_{u_{xx}})] D_x h_1 + G_{u_y} D_y h_1 \\ + D_x(G_{u_{yy}}) D_y h_2 + \big[G_u - D_x^2(G_{u_{xx}}) - D_y^2(G_{u_{yy}}) + r_1\big] h_1 + s_1 h_2 + \gamma_1, \quad (3.18)$$

где r_1, s_1, γ_1 — функции, зависящие от h_1, h_2, G. Поскольку (3.17) — инвариантное многообразие, функция γ_1 равна 0. Следовательно, первое определяющее уравнение имеет вид $D_t h_1 = m_{11}(h_1, h_2)$. Чтобы получить второе определяющее уравнение $D_t h_2 = m_{12}(h_1, h_2)$, необходимо в (3.11) заменить h_1 на h_2, x на y, r_1 на r_2, s_1 на s_2.

Следующая лемма утверждает, что решения уравнений типа (3.13) при выполнении некоторых условий позволяют строить дифференциальные связи, совместные с системой эволюционных уравнений (2.4). Важно отметить, что вид операторов m_{ij} не имеет значения, лишь бы выполнялись условия $m_{ij}(0) = 0$.

Лемма 2. *Пусть функции*

$$h_j^i = \sum_{s=1}^{n} \xi_j^s(t, x, u) u_{x_s}^i - g_j^i(t, x, u)$$

удовлетворяют системе типа (3.13) *на* $[E]$, *где* $m_{ij}(0) = 0$. *Если векторные поля*

$$X_j = \sum_{s=1}^{n} \xi_j^s \partial_{x_s} + \sum_{i=1}^{m} g_j^i \partial_{u_i}, \quad j = 1, \dots, n,$$

порождают инволютивное распределение и $\det(\xi_j^s) \neq 0$, *то существует решение системы, состоящей из уравнений* (2.4) *и уравнений*

$$h_j^i = 0, \quad i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, n. \quad (3.19)$$

Доказательство. Поскольку h_j^i удовлетворяют уравнениям (3.13), то в силу условия $m_{ij}(0) = 0$ многообразие (3.19) инвариантно относительно системы (2.4). Для завершения доказательства остается сослаться на лемму 1.

Нахождение решений общих нелинейных уравнений (3.13) может представлять очень сложную задачу. С целью ее упрощения удалим все нелинейные слагаемые относительно функций h_l^k из операторов m_{ij}, подобно тому, как это сделано в [8] для случая эволюционного уравнения с одной пространственной переменной. В результате получим некоторые линейные уравнения

$$D_t h_j^i + l_{ij}(h) = 0.$$

Следуя идеям работы [8], умножим коэффициенты операторов l_{ij} на неопределенные константы. Полученные уравнения будем записывать в виде

$$D_t h_j^i + L_{ij}(h) = 0 \quad (3.20)$$

и тоже называть линейными определяющими уравнениями (ЛОУ).

Например, для (3.16) ЛОУ имеет вид

$$\begin{aligned} D_t h_1 = L_{11}(h_1, h_2) \equiv a_1 G_{u_{xx}} D_x^2 h_1 + a_2 G_{u_{yy}} D_y^2 h_1 \\ + [a_3 G_{u_x} + a_4 D_x(G_{u_{xx}})] D_x h_1 + a_5 G_{u_y} D_y h_1 + a_6 D_x(G_{u_{yy}}) D_y h_2 \\ + \big[a_7 G_u + a_8 D_x^2(G_{u_{xx}}) + a_9 D_y^2(G_{u_{yy}})\big] h_1, \quad (3.21) \\ D_t h_2 = L_{12}(h_1, h_2), \end{aligned}$$

где $L_{12}(h_1, h_2)$ получается из $L_{11}(h_1, h_2)$ заменой h_1 на h_2, x на y, a_i на b_i.

Хотя приведенные выше рассуждения относились к системам эволюционных уравнений, их можно попытаться распространить и на более общую ситуацию.

Пусть задана система

$$n_i(u) = F^i(t, x, u, u_\alpha), \quad i = 1, \dots, m,$$

здесь n_i — линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, а правые части аналогичны правым частям для случая эволюционных систем (2.4). Тогда для нахождения функций h^i_j вместо системы (3.20) предлагается использовать уравнения

$$N_i\big(h^i_j\big) + L_{ij}(h) = 0, \quad (3.22)$$

где операторы N_i получаются из n_i заменой частных производных полными. Кроме уравнений (3.22) оказывается полезным ввести аналог B-определяющих уравнений [4]

$$N_i\big(h^i_j\big) + L_{ij}(h) + \sum_{\substack{1 \le l \le m \\ 1 \le k \le n}} b^{ki}_{lj} h^l_k = 0, \quad (3.23)$$

здесь $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, b^{ki}_{lj} — функции, которые могут зависеть от t, x, u.

Уравнения вида (3.23) будем называть квазилинейными определяющими уравнениями (КОУ).

Приведем пример использования КОУ для нахождения инволютивных распределений. Рассмотрим одну из нелинейно-дисперсионных моделей, описывающих распространение длинных двумерных волн [22]:

$$\eta_{tt} = gd\Delta\eta + \frac{d^2}{3}\Delta\eta_{tt} + \frac{3}{2} g\Delta\eta^2,$$

где $\eta(t, x, y)$ — отклонение жидкости от положения равновесия, d — глубина невозмущенной жидкости, g — ускорение свободного падения. С помощью преобразований переноса и растяжения это уравнение приводится к виду

$$u_{tt} - \Delta(u_{tt}) - u\Delta u - (\nabla u)^2 = 0. \quad (3.24)$$

Можно показать, что уравнение (3.24) допускает пятипараметрическую группу преобразований, порожденную операторами вращения, переносов и растяжения:

$$y\partial_x - x\partial_y,\ \partial_t,\ \partial_x,\ \partial_y,\ t\partial_t - 2u\partial_u. \quad (3.25)$$

Согласно изложенной выше методологии КОУ для (3.24) имеет вид

$$\begin{aligned} D_t^2 h_1 - D_t^2 D_x^2 h_1 - D_t^2 D_y^2 h_1 + a_1 u\big(D_x^2 h_1 + D_y^2 h_1\big) + a_2 u_x D_x h_1 + a_3 u_y D_y h_1 \\ + a_4 u_x D_y h_2 + (a_5 \Delta u + a_6 u_{xx} + a_7 u_{yy} + r_1) h_1 + q_1 h_2 = 0, \quad (3.26) \end{aligned}$$

$$D_t^2 h_2 - D_t^2 D_x^2 h_2 - D_t^2 D_y^2 h_2 + b_1 u\big(D_x^2 h_2 + D_y^2 h_2\big) + b_2 u_y D_y h_2 + b_3 u_x D_x h_2 \\ + b_4 u_y D_x h_1 + (b_5 \Delta u + b_6 u_{xx} + b_7 u_{yy} + r_2) h_2 + q_2 h_1 = 0, \quad (3.27)$$

здесь a_i, b_i — константы, r_j, q_j — функции, которые могут зависеть от t, x, y, u и подлежат нахождению одновременно с h_1, h_2. Схема решения уравнений (3.26), (3.27) совершенно аналогична стандартной, используемой в групповом анализе дифференциальных уравнений [1–4]. По этой причине все промежуточные выкладки опускаются и приводятся только окончательные результаты. Отметим, что в настоящее время имеется ряд компьютерных программ, служащих для решения классических определяющих уравнений. При решении уравнений (3.26), (3.27) также использовались компьютерные вычисления.

Если искать функции h_1, h_2 в виде, соответствующем точечным симметриям $h_1 = \xi_1^1 u_t + \xi_2^1 u_x + \xi_3^1 u_y + \eta^1$, $h_2 = \xi_1^2 u_t + \xi_2^2 u_x + \xi_3^2 u_y + \eta^2$, где ξ^i, η^j — функции от t, x, y, u, то можно показать, что при условии $(\xi_1^1)^2 + (\xi_3^1)^2 + (\xi_1^2)^2 + (\xi_2^2)^2 \neq 0$ уравнения (3.26), (3.27) имеют решения, которые приводят только к допускаемым операторам (3.25). Новые решения возникают тогда, когда

$$h_1 = u_x + g_1(t,x,y,u), \quad h_2 = u_y + g_2(t,x,y,u).$$

Окончательный вид функций g_1, g_2 следующий:

$$g_1 = s_1 x + s_2 y + s_3, \quad g_2 = s_2 x + s_4 y + s_5.$$

При этом функции s_i $(i = 1,\dots,5)$ зависят только от t и удовлетворяют системе пяти дифференциальных уравнений второго порядка

$$s_1'' + 3s_1^2 + s_1 s_4 + 2s_2^2 = 0, \quad s_2'' + 3s_1 s_2 + 3s_2 s_4 = 0,$$

$$s_3''+3s_1s_3+2s_2s_5+s_3s_4 = 0, \quad s_4''+s_1s_4+2s_2^2+3s_4^2 = 0, \quad s_5''+s_1s_5+2s_2s_3+3s_4s_5 = 0.$$

Для полноты изложения приведем константы a_i, b_i $(i = 1,\dots,7)$ и функции r_j, q_j $(j = 1,2)$, входящие в (3.26) и (3.27) и соответствующие функциям g_1, g_2:

$$a_1 = b_1 = a_4 = b_4 = -1, \quad a_2 = b_2 = a_3 = b_3 = -3,$$

$$a_5 = a_6 = a_7 = b_5 = b_6 = b_7 = 0,$$

$$r_1 = 3s_1 + s_4, \quad r_2 = s_1 + 3s_4, \quad q_1 = 2s_1, q_2 = 2s_2.$$

Функции h_1, h_2 порождают дифференциальные связи

$$u_x + s_1 x + s_2 y + s_3 = 0, \quad u_y + s_2 x + s_4 y + s_5 = 0.$$

Эти связи позволяют найти следующее представление для решения уравнения (3.24):

$$u = \frac{-s_1 x^2}{2} - s_2 xy - \frac{s_4 y^2}{2} - s_3 x - s_5 y + s_6.$$

Подставляя данное представление в (3.24), получаем уравнение для s_6:

$$s_6'' = 3s_1^2 + 2s_1 s_4 - s_1 s_6 + 4s_2^2 + s_3^2 + 3s_4^2 - s_4 s_6 + s_5^2.$$

Система шести дифференциальных уравнений относительно шести функций s_i требует дополнительного исследования. Например, было бы интересно найти решения, выражающиеся через элементарные функции.

Теорема, доказанная ранее, допускает обобщение на случай многообразия, заданного уравнениями разрешенными относительно всех производных порядка $|w|$

$$\frac{\partial^{|w|}u^i}{\partial x_1^{w_1}\dots\partial x_n^{w_n}} = g_w^i(t,x,u,u_q), \quad 1 \le i \le m,$$

при условии, что функции g_w^i могут содержать только производные порядков, меньших $|w|$.

Рассмотрим эволюционное уравнение второго порядка

$$u_t = F(t,x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy}). \tag{3.28}$$

Предположим, что инвариантное многообразие задается уравнениями

$$\begin{gathered} h_1 = u_{xxx} + g_1 = 0, \quad h_2 = u_{xxy} + g_2 = 0, \\ h_3 = u_{xyy} + g_3 = 0, \quad h_4 = u_{yyy} + g_4 = 0, \end{gathered} \tag{3.29}$$

где функции g_i $(i = 1,\dots,4)$ зависят только от t, x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}. Тогда в качестве системы линейных определяющих уравнений можно взять

$$\begin{aligned} D_t h_1 = {} & F_{u_{xx}} D_x^2 h_1 + F_{u_{xy}} D_x D_y h_1 + F_{u_{yy}} D_y^2 h_1 + [N D_x(F_{u_{xx}}) + F_{u_x}] D_x h_1 \\ & + [F_{u_y} + N D_x(F_{u_{xy}})] D_y h_1 + N D_x(F_{u_{yy}}) D_y h_2 \\ & + \left[F_u + N D_x(F_{u_x}) + \frac{N(N-1)}{2} D_x^2(F_{u_{xx}})\right] h_1 \\ & + \left[\frac{N(N-1)}{2} D_x^2 F_{u_{xy}} + N D_x(F_{u_y})\right] h_2 + \frac{N(N-1)}{2} D_x^2(F_{u_{yy}}) h_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_t h_2 = {} & F_{u_{xx}} D_x^2 h_2 + F_{u_{xy}} D_x D_y h_2 + F_{u_{yy}} D_y^2 h_2 + D_y(F_{u_{xx}}) D_x h_1 \\ & + [F_{u_x} + (N-1) D_x(F_{u_{xx}}) + D_y(F_{u_{xy}})] D_x h_2 \\ & + [F_{u_y} + (N-1) D_x(F_{u_{xy}}) + D_y(F_{u_{yy}})] D_y h_2 + (N-1) D_x(F_{u_{yy}}) D_y h_3 \\ & + [(N-1) D_x D_y(F_{u_{xx}}) + D_y(F_{u_x})] h_1 + \big[D_x^2(F_{u_{xx}}) + (N-1) D_x D_y(F_{u_{xy}}) + F_u \\ & + D_y(F_{u_y}) + (N-1) D_x F_{u_x}\big] h_2 + \left[\frac{(N-1)(N-2)}{2} D_x^2 F_{u_{xy}} + (N-1) D_x D_y F_{u_{xy}} \right. \\ & \left. + (N-1) D_x F_{u_y}\right] h_3 + \frac{(N-1)(N-2)}{2} D_x^2(F_{u_{yy}}) h_4, \end{aligned}$$

$$D_t h_3 = m_{13}, \quad D_t h_4 = m_{14},$$

где $N = 3$. Правые части третьего и четвертого уравнений получаются из правых частей первого и второго уравнений заменой h_2 на h_3, h_1 на h_4, x на y.

Если правая часть (3.28) имеет вид

$$F = u\Delta u + \delta(\nabla u)^2, \quad \delta = \pm 1, \tag{3.30}$$

то решениями системы определяющих уравнений являются функции $h_1 = u_{xxx}$, $h_2 = u_{xxy}$, $h_3 = u_{xyy}$, $h_4 = u_{yyy}$. В этом случае общее решение системы (3.29) представляет собой многочлен второго порядка относительно x, y с коэффициентами, зависящими от t:

$$u = s_1 x^2 + s_2 xy + s_3 y^2 + s_4 x + s_5 y + s_6. \tag{3.31}$$

После подстановки данного представления в уравнение (3.28) с правой частью (3.30) получается система дифференциальных уравнений относительно s_i $(i = 1,\dots,6)$. Представление типа (3.31) ранее было выведено в работе [23] из других соображений.

Автор надеется, что в ближайшее время появятся новые приложения развиваемого подхода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
3. *Fushichych W., Nikitin A.* Symmetries of Maxwell's Equations. Dordrecht: Reidel, 1987.
4. *Андреев В. К., Капцов О. В., Пухначев В. В., Родионов А. А.* Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. Новосибирск: Наука, 1994.
5. *Овсянников Л. В.* Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, № 4. С. 30–55.
6. *Bluman G. W., Cole J. D.* The general similarity solution of the heat equation // J. Math. Mech. 1969. V. 18. P. 1025–1042.
7. *Ames W. F.* Nonlinear partial differential equations in engineering. New York: Acad. Press, 1972.
8. *Капцов О. В.* Линейные определяющие уравнения для дифференциальных связей // Мат. сб. 1998. Т. 189, № 12. С. 103–118.
9. *Елкин В. И.* Редукция нелинейных управляемых систем. Дифференциально-геометрический подход. М.: Наука, 1997.
10. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. М.: Наука, 1984. Т. 4.
11. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана. М.: ГИФМЛ, 1948.
12. *Аристов С. Н.* Периодические и локализованные точные решения уравнения $h_t = \Delta \ln h$ // Прикл. механика и техн. физика. 1999. Т. 40, № 1. С. 22–26.
13. *Пухначев В. В.* Многомерные точные решения уравнения нелинейной диффузии // Прикл. механика и техн. физика. 1995. С. 36, № 2. С. 23–31.
14. *Дородницын В. А., Князева И. В., Свирщевский С. Р.* Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 7. С. 1215–1223.
15. *Galaktionov V. A.* Invariant subspaces and new explicit solutions to evolution equations with quadratic nonlinearities // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 1995. V. 125, N 2. P. 225–246.
16. *Рудых Г. А., Семенов Э. И.* Существование и построение анизотропных решений многомерного уравнения нелинейной диффузии. II // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 1. С. 176–195.
17. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
18. *Arrigo D. J., Broadbridge P., Hill J. M.* Nonclassical symmetry solutions and the methods of Bluman — Cole and Clarkson — Kruskal // J. Math. Phys. 1993. V. 34, N 10. P. 4692–4703.
19. *Olver P. J.* Direct reduction and differential constraints // Proc. Roy. Soc. London Sect. A. 1994. V. 444. P. 509–523.
20. *Gibbons J., Tsarev S. P.* Conformal maps and reductions of the Benney equations // Phys. Lett. A. 1999. V. 258, N 4–6. P. 263–271.
21. *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988.
22. *Kim K. Y., Reid R. O., Whitaker R. E.* On an open radiational boundary condition for weakly dispersive tsunami waves // J. Comput. Phys. 1988. V. 76, N 2. P. 327–348.
23. *Galaktionov V. A., Posashkov S. A.* Examples of nonsymmetric extinction and blow-up for quasilinear heat equations // Differential Integral Equations. 1995. V. 8, N 1. P. 87–103.

Статья поступила 26 апреля 2001 г.

Капцов Олег Викторович
Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Красноярск 660036, Академгородок
`kaptsov@ksc.krasn.ru`