Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2002. Том 43, № 3

УДК 510.53:512.52

ХОРОШИЕ ЛОКАЛЬНО–ГЛОБАЛЬНЫЕ ПОЛЯ. IV

Ю. Л. Ершов

Аннотация: Понятие хорошего локально-глобального поля, введенного и изученного в предыдущих работах, расширяется на поля, у которых семейство всех квазиклассических колец нормирования является почти булевым. Основной результат работы — теорема о разрешимости элементарной теории класса всех таких полей, удовлетворяющих условию максимальности. Библиогр. 10.

В настоящей работе расширяются некоторые результаты работы [1] на случай почти булевых семейств квазиклассических колец нормирования. Знакомство с серией работ [1–3] не обязательно, но в доказательствах будут существенно использоваться результаты из книги [4] и статьи [5]. Все не определяемые ниже понятия определены в [4].

Кольцо нормирования R поля F называется *квазиклассическим* (см. [1]), если поле F имеет характеристику 0, группа нормирования Γ_R является Z-группой и если поле вычетов F_R

a) имеет характеристику $p > 0$, то F_R — простое поле характеристики p (т. е. $|F_R| = p$) и норма $v_R(p)$ элемента $p \in Q \leq F$ является наименьшим положительным элементом группы Γ_R;

b) имеет характеристику 0, то F_R является псевдоконечным полем.

Поле F характеристики 0 назовем *хорошим локально-глобальным полем*, если

a) семейство $W_{qc}(F)$ всех квазиклассических колец нормирования поля F является почти булевым;

b) семейство $W_{qc}(F)$ удовлетворяет локально-глобальному принципу $LG_A(W_{qc}(F) \models LG_A)$;

c) семейство $W_{qc}(F)$ имеет почти непрерывные локальные элементарные свойства.

Через H_{qc} $(= H_{qc}(F))$ обозначим кольцо голоморфности $R(W_{qc}(F))$ семейства $W_{qc}(F)$, через $\mathbb{F}_{qc} \rightleftharpoons \langle F, H_{qc}, \sqsubseteq_{H_{qc}} \rangle$ — соответствующее кратно нормированное поле. Семейство всех таких кратно нормированных полей $\mathbb{F}_{qc}$ (когда F — хорошее локально-глобальное поле) обозначим через $NLGF^*$. Через $mNLGF^*$ обозначим подкласс класса $NLGF^*$, состоящий из кратно нормированных полей $\mathbb{F}_{qc}$ таких, что $W_{qc}(F)$ удовлетворяет условию максимальности M.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема, которая расширяет основную теорему работы [2] на класс $mNLGF^*$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–0600), Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержки ведущих научных школ (грант № 00–15–96184) и программы «Университеты России — фундаментальные исследования».

Теорема. *Класс $mNLGF^*$ имеет разрешимую теорию.*

Из определения и рассмотрений, проведенных в книге [4], без труда следует, что элементарные теории $Th(NLGF^*)$ и $T_* \rightleftharpoons Th(mNLGF^*)$ классов $NLGF^*$ и $mNLGF^*$ являются вычислимо перечислимыми (= рекурсивно перечислимыми). Поэтому для доказательства разрешимости теории T_* достаточно установить вычислимую перечислимость семейства предложений (языка сигнатуры $\sigma_R \rightleftharpoons \sigma_f \cup \langle R^1 \rangle$ (кратно) нормированных полей), выполнимых на кратно нормированных полях из $mNLGF^*$. Основным средством доказательства этого факта будет теорема 4.6.3 из [4], которая дает критерий элементарной эквивалентности для кратно нормированных полей из класса $mNLGF^* (\subseteq \mathfrak{V}^*_{NB})$.

Теорема 4.6.3 из [4] сводит вопрос об элементарной эквивалентности кратно нормированных полей из $\mathfrak{V}^*_{NB}$ к вопросу об элементарной эквивалентности некоторых обогащенных решеток, формульно определимых в них. Решать вопрос об элементарной эквивалентности таких обогащенных решеток оказывается значительно проще. Начнем с некоторых общих теоретико-модельных рассмотрений (и напоминаний).

Дистрибутивную решетку с относительными дополнениями и наименьшим элементом (нулем) для краткости будем называть *E-решеткой.*

С каждой E-решеткой $\mathbb{E} = \langle E, \vee, \wedge, \perp \rangle$ можно связать (см. [6, гл. 2]) ее *элементарную характеристику* $\chi(E) = \langle \varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \rangle; \varepsilon_i \leq \omega$, $i < 5$, так, что $\mathbb{E} \equiv \mathbb{E}^1 \iff \chi(\mathbb{E}) = \chi(\mathbb{E}^1)$ и существует эффективная операция $\oplus$ на характеристиках такая, что $\chi(\mathbb{E} + \mathbb{E}') = \chi(\mathbb{E}) \oplus \chi(\mathbb{E}')$.

Пусть B — булева алгебра; *B-оснащением E-решетки* будем называть всякую систему вида $\langle E, \vee, \wedge, \perp; T_b | b \in b \rangle$ такую, что

1) $\mathbb{E} \rightleftharpoons \langle E, \vee, \wedge, \perp \rangle$ — E-решетка;

2) для любого $b \in B$ $\quad T_b \subseteq E$ является идеалом E-решетки $\mathbb{E}$; $T_0 = \{\perp\}$, $T_1 = E$; здесь 0 и 1 обозначают наименьший и наибольший элементы булевой алгебры B;

3) для любых $b_0, b_1 \in B$

$$T_{b_0 \wedge b_1} = T_{b_0} \cap T_{b_1},\ T_{b_0 \vee b_1} = T_{b_0} \vee T_{b_1} (\rightleftharpoons \{e_0 \vee e_1 | e_0 \in T_{b_0}, e_1 \in T_{b_1}\}).$$

Замечание. Если $\langle E, \vee, \wedge, \perp;\ T_b | b \in B \rangle$ — B-оснащенная E-решетка, то для любого $b \in B$ идеал T_b является *локально главным*, т. е. для любого $e \in E$ пересечение $T_b \cap \hat{e}$ идеала T_b с главным идеалом $\hat{e}$, порожденным в E элементом e, является главным, т. е. имеет вид $\hat{e}_0$ для подходящего $e_0 \in E$.

Действительно, так как $T_b \cap T_{c(b)} = \{\perp\}$ и $T_b \vee T_{c(b)} = E$ (здесь $c(b)$ — дополнение к b в булевой алгебре B), то элемент e однозначно представим в виде $e = e_0 \vee e_1$, $e_0 \in T_b$, $e_1 \in T_{c(b)}$; элемент e_0 и является нужным.

Предложение 1. *Две B-оснащенных E-решетки $\langle \mathbb{E}; T_b : b \in B \rangle$ и $\langle \mathbb{E}'; T'_b : b \in B \rangle$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда для любого $b \in B$ идеалы T_b и T'_b, рассматриваемые как E-решетки, элементарно эквивалентны.*

Набросок доказательства. Утверждение легко сводится к случаю конечной булевой алгебры B. Пусть B конечна и $a_0, \dots, a_n$ — это все атомы булевой алгебры B. Тогда из условий 2 и 3 определения легко следует, что для любого $b \in B$

$$T_b = \sum_{a_i \leq b} T_{a_i}, \quad T'_b = \sum_{a_i \leq b} T'_{a_i};$$

в частности,

$$E = \sum_{i \leq n} T_{a_i}, \quad E' = \sum_{i \leq n} T'_{a_i}.$$

Отсюда и из замечаний, сделанных ранее, вытекает, что

$$\langle \mathbb{E}; T_b | b \in B\rangle \equiv \left\langle \mathbb{E}'; T'_b : b \in B \right\rangle$$

в случае, когда $T_{a_i} \equiv T'_{a_i}$ для всех $i \leq n$.

В обратную сторону утверждение очевидно. $\square$

Теперь установим нужное для дальнейшего следствие теоремы 4.3.6 из [4]. Пусть T_0 — теория всех абсолютно неразветвленных гензелевых нормированных полей $\mathbb{F} = \langle F, R\rangle$; если Γ — линейно упорядоченная абелева группа, то через T_Γ обозначим теорию класса $\{\mathbb{F} \mid \mathbb{F} = \langle F, R\rangle \models T_0,\ \Gamma_R \equiv \Gamma\}$.

Предложение 2. *Для любого предложения Φ сигнатуры σ_R найдется предложение Ψ сигнатуры теории полей σ_f такое, что Φ и Ψ_R эквивалентны относительно теории T_Γ.*

ЗдесьΨ_R — предложение сигнатуры σ_R, определенное в разд. 4.3 книги [4] (с основным свойством: $\mathbb{F} = \langle F, R\rangle \models \Psi_R \iff F_R \models \Psi$ для любого нормированного поля $\mathbb{F}$).

Рассмотрим множество $S \rightleftharpoons \{\Psi \mid \Psi$ — предложение сигнатуры σ_f такое, что $T_\Gamma \cup \{\Psi_R\} \vdash \Phi\}$. Заметим, что из теоремы о дедукции (и определения S) следует, что $\Psi_0 \vee \Psi_1 \in S$, если Ψ_0 и $\Psi_1 \in S$.

Установим, что найдется $\Psi \in S$ такое, что $T_\Gamma \cup \{\Phi\} \vdash \Psi_R$ (тогда это предложение Ψ и будет искомым). Предположим противное; тогда для любого $\Psi \in S$ множество предложений $T_\Gamma \cup \{\Phi, \neg\Psi_R\}$ совместно; следовательно, и множество $T_\Gamma \cup \{\Phi\} \cup \{\neg\Psi_R \mid R \in S\}$ совместно. Пусть $\mathbb{F} \models T_\Gamma \cup \{\Phi\} \cup \{\neg\Psi_R \mid \Psi \in S\}$; полагаем $S_0 \rightleftharpoons \{\Psi \mid \Psi$ — предложение сигнатуры σ_f такое, что $F_R \models \Psi\}$. Из теоремы 4.3.6 следует, что теория, определенная системой аксиом $T_\Gamma \cup \{\Psi_R \mid \Psi \in S_0\}$, является теорией нормированного поля $\mathbb{F}$. Так как $\mathbb{F} \models \Phi$, существует $\Psi \in S_0$ такое, что $T_\Gamma \cup \{\Psi_R\} \vdash \Phi$. Но тогда $\Psi \in S$, $\mathbb{F} \models \neg\Psi_R$, что противоречит принадлежности Ψ множеству S_0.

Предложение доказано. $\square$

Замечание. Если Γ имеет разрешимую теорию, то нахождение предложения Ψ по предложению Φ в предложении 2 может быть осуществлено эффективно (с алгоритмической (но не сложностной) точки зрения).

Пусть $\mathbb{F} = \langle F, H, \sqsubseteq\rangle \in mNLGF^*$; обозначим (изменяя обозначение $L^*(H)$ из [4]) через $\mathbb{E}(H) = \langle E(H), \wedge, \vee, \perp\rangle$ E-решетку, полученную из предупорядоченного множества $\langle H^\times (\rightleftharpoons H \setminus \{0\}), \sqsubseteq_H\rangle$ факторизацией по отношению эквивалентности $\equiv_H$. Пусть $\operatorname{Abs} F$ — алгебраическое замыкание поля $\mathbb{Q}$ в F и A — целое замыкание кольца $\mathbb{Z}$ в $\operatorname{Abs} F$. Для любой формулы $\Phi = \Phi(x_0, \dots, x_{n-1})$ сигнатуры σ_f и набора элементов $\bar{a} = a_0, \dots, a_{n-1} \in A^\times (= A \setminus \{0\})$ полагаем

$$T^F_{\Phi;\bar{a}} \rightleftharpoons \left\{[d]_H \mid d \in H^\times, \forall R \in W^F_d (F_R \models \Phi(\bar{a} + \mathfrak{m}(R))\right\};$$

для любой формулы $\Psi = \Psi(x_0, \dots, x_{n-1})$ сигнатуры σ_l и набора элементов $\bar{a} \in A^\times$ полагаем

$$T^F_{\Psi;\bar{a}} \rightleftharpoons \left\{[d]_H \mid d \in H^\times, \forall R \in W^F_d (\Gamma_R \models \Psi(v_R(\bar{a}))\right\}.$$

Нетрудно видеть, что $T^F_{\Phi;\bar{a}}$ $\left(T^F_{\Psi;\bar{a}}\right)$ является идеалом E-решетки $\mathbb{E}(H)$ и выполняются следующие соотношения для $\Phi_0, \Phi_1 \in L_{\sigma_f} (L_{\sigma_l})$, $\bar{a} \in A^\times$:

$$T^F_{\Phi_0;\bar{a}} \cap T^F_{\Phi_1;\bar{a}} = T^F_{\Phi_0 \wedge \Phi_1;\bar{a}}; \quad T^F_{\Phi_0;\bar{a}} \vee T^F_{\Phi_1;\bar{a}} = T^F_{\Phi_0 \vee \Phi_1;\bar{a}};$$

$$T^F_{\Phi_0;\bar a} \cap T^F_{\neg\Phi_0;\bar a} = \{\bot\} = \{[1]_H\}; T^F_{\Phi_0\vee\neg\Phi_0;\bar a} = E(H).$$

Таким образом, систему $\mathbb{E}(F) \rightleftharpoons \langle \mathbb{E}(H); T^F_{\Phi;\bar a} | \Phi \in L_{\sigma_f} \cup L_{\sigma_l}, \bar a \in A^\times\}$ можно рассматривать как B-оснащенную решетку, где B — алгебра Линденбаума — Тарского. Анализ доказательства теорем 4.6.3 (и 4.5.4) в [4] позволяет следующую переформулировку теоремы 4.6.4.

Теорема 1. *Пусть $\mathbb{F}, \mathbb{F}' \in \mathfrak{V}^*_{NB}$; эти кратно нормированные поля элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда существует изоморфизм λ полей $\operatorname{Abs} F$ и $\operatorname{Abs} F'$ такой, что системы*

$$\mathbb{E}(F) = \left\langle \mathbb{E}(H); T^F_{\Phi;\bar a} | \Phi \in L_{\sigma_f} \cup L_{\sigma_l}, \bar a \in A^\times \right\rangle$$

и

$$\mathbb{E}(F') = \left\langle \mathbb{E}(H'); T^{F'}_{\Phi;\lambda(\bar a)} | \Phi \in L_{\sigma_f} \cup L_{\sigma_l}, \bar a \in A^\times \right\rangle$$

элементарно эквивалентны. $\square$

В соответствии с предложением 1 теорему 1 можно переформулировать так.

Теорема 1′. *Пусть $\mathbb{F}, \mathbb{F}' \in \mathfrak{V}^*_{NB}$; $\mathbb{F} \equiv \mathbb{F}'$ тогда и только тогда, когда существует изоморфизм $\lambda : \operatorname{Abs} F \to \operatorname{Abs} F'$ такой, что для любых формул $\Phi \in L_{\sigma_f}$ и $\Psi \in L_{\sigma_l}$ и любого набора $\bar a \in A^\times$ E-решетки*

$$T^F_{\Phi;\bar a} \cap T^F_{\Psi;\bar a}$$

и

$$T^{F'}_{\Phi;\lambda(\bar a)} \cap T^{F'}_{\Psi;\lambda(\bar a)}$$

элементарно эквивалентны. $\square$

Пусть $\widetilde{\mathbb{Q}}$ — алгебраическое замыкание поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, а $\widetilde{\mathbb{Z}}$ — целое замыкание кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ в поле $\mathbb{Q}$; т. е. $\widetilde{\mathbb{Z}}$ — кольцо всех целых алгебраических чисел. Обозначим через $(\widetilde{\mathbb{Z}}^\times)^{<\omega}$ семейство всех конечных упорядоченных последовательностей элементов из $\widetilde{\mathbb{Z}}^\times$; тогда существует (фиксированное для дальнейшего) отображение

$$\alpha : (\widetilde{\mathbb{Z}}^\times)^{<\omega} \longrightarrow \widetilde{\mathbb{Z}}^\times,$$

которое удовлетворяет следующим условиям:

1) для любого $\bar a = a_0, \ldots, a_{n-1} \in (\widetilde{\mathbb{Z}}^\times)^{<\omega}$ $\quad \mathbb{Q}(\bar a) = \mathbb{Q}(\alpha(\bar a))$;

2) $\alpha(\Lambda) = 1(\Lambda$ — пустая последовательность); для $\bar a \in (\widetilde{\mathbb{Z}}^\times)^n$, $n > 0$, если существует $i < n$ такое, что $\mathbb{Q}(\bar a) = \mathbb{Q}(\bar a) = \mathbb{Q}(a_i)$, то $\alpha(\bar a) = a_i$ для наименьшего такого i;

3) отображение α вычислимо, если считать кратно нормированное поле $\langle\widetilde{\mathbb{Q}}, \widetilde{\mathbb{Z}}\rangle$ разрешимым (определение см. в [7]); так можно считать ввиду результата Ван ден Дриса [8] о разрешимости теории кольца $\widetilde{\mathbb{Z}}$.

Пусть $\bar a \in (\widetilde{\mathbb{Z}}^\times)^{<\omega}$, полагаем $h_{\bar a} \in \mathbb{Z}[x]$ — минимальный многочлен для $\alpha(\bar a)$ над $\mathbb{Q}$; $g_{\bar a,i} \in \mathbb{Q}[x]^\times$ — многочлены такие, что $\deg g_{\bar a,i} < \deg h_{\bar a}$ и $a_i = g_{\bar a,i}(\alpha(\bar a))$, $i < n$.

Расширим сигнатуру σ_f до сигнатуры σ_f^*, добавив к σ_f новые константы c_a, соответствующие элементам a из $\widetilde{\mathbb{Z}}^\times = \widetilde{\mathbb{Z}} \setminus \{0\}$.

Условимся о следующей семантике для формул из $L_{\sigma_f^*}$. Пусть F — поле характеристики 0, $B \subseteq \widetilde{\mathbb{Z}}^\times$; $\langle F, c^F_a | a \in B\rangle$ — B-обогащение F; это B-обогащение назовем *допустимым*, если существует вложение $\lambda : \mathrm{Abs}\, F \longrightarrow \widetilde{\mathbb{Q}}$ такое, что $c_a^F = \lambda^{-1}(a)$ для всех $a \in B$.

Пусть $B \subseteq \widetilde{\mathbb{Z}}^\times$ (B может быть пустым множеством), пусть

$$\Phi = \Phi(x_0, \ldots, x_{m-1}; c_{a_0}, \ldots, c_{a_{n-1}})$$

— формула сигнатуры σ_f^*; c_{a_i}, $i < n$, — все константы вида c_a, $a \in \widetilde{\mathbb{Z}}^\times$, которые *явно* входят в эту формулу Φ, положим $\bar{a} = a_0, \ldots, a_{n-1}$. *$B$-редукцией* формулы Φ назовем следующую формулу:

$$\Phi_B \rightleftharpoons \exists y \Big(h_{\bar{a}}(y) = 0 \wedge \Big(\bigwedge_{a_i \in B} c_{a_i} = g_{\bar{a},i}(y) \Big) \\ \wedge\, \Phi(\bar{x}; g_{\bar{a},0}(y), \ldots, g_{\bar{a},n-1}(y)) \quad (= \Phi(\bar{x}; \bar{g}(y))) \Big).$$

Заметим, что формула Φ_B содержит в точности константы c_{a_i} для $i < n$ такие, что $a_i \in B$.

Если $B \subseteq \widetilde{\mathbb{Z}}^\times$ и $\langle F, c_a^F | a \in B \rangle$ — B-допустимое обогащение F, то для любой формулы $\Phi(\bar{x})$ сигнатуры σ_f^*, любых $\bar{b} \in F$ полагаем

$$\langle F, c_a^F | a \in B \rangle \models \Phi(\bar{b}) \Longleftrightarrow \langle F, c_a^F | a \in B \rangle \models \Phi_B(\bar{b}).$$

Аналогичные соглашения будем применять и для формул сигнатуры $\sigma_R^* = \sigma_R \cup \langle c_a | a \in \widetilde{\mathbb{Z}}^\times \rangle$.

Справедливо следующее техническое, но очень важное

Предложение 3. *Пусть $\Phi = \Phi(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in L_{\sigma_f}$, $\Psi = \Psi(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in L_{\sigma_l}$; $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \widetilde{\mathbb{Z}}^\times$. Тогда по Φ, Ψ, $\bar{a}$ и любой пятерке χ, которая может быть элементарной характеристикой какой-нибудь E-решетки, можно эффективно выписать множество $\tau(\Phi, \Psi, \bar{a}, \chi)$ предложений сигнатуры $\sigma_R \cup \langle c_{a_i} | i < n \rangle$ такое, что для любого $\mathbb{F} \in mNLGF^*$ и любого $\{a_i | i < n\}$-допустимого обогащения $\langle \mathbb{F}, c_{a_i}^F | i < n \rangle$ справедлива эквивалентность следующих двух утверждений:*

1) $\langle \mathbb{F}, c_{a_i}^F | i < n \rangle \models \tau(\Phi, \Psi, \bar{a}, \chi)$;

2) $\chi(T_{\Phi;\bar{b}}^F \cap T_{\Psi;\bar{b}}^F) = \chi$, где $\bar{b} \rightleftharpoons b_0, \ldots, b_{n-1}; b_i \rightleftharpoons c_{a_i}^F$, $i < n$.

Это предложение следует из формульности (в $\bar{a}$) предикатов $T_{\Phi;\bar{a}}^F$ и $T_{\Psi;\bar{a}}^F$ [4, разд. 4.6] и (эффективной) элементарности класса E-решеток, имеющих заданную элементарную характеристику χ (см. [6, гл. 2, § 4]).

Пусть $\mathbb{F} \in mNLGF^*$; $\lambda : \mathrm{Abs}\, F \longrightarrow \widetilde{\mathbb{Q}}$ — некоторое (фиксированное) вложение; оно определяет допустимое $\lambda(A^\times)$-обогащение $\mathbb{F}$, где $A = \lambda^{-1}(\widetilde{\mathbb{Z}})$ — целое замыкание $\mathbb{Z}$ в $\mathrm{Abs}\, F$. Для $\Psi \in L_{\sigma_f}$, $\Psi \in L_{\sigma_l}$, $\bar{a} \in A^\times$ пусть $\chi_F(\Phi, \Psi, \bar{a})$ обозначает элементарную характеристику E-решетки $T_{\Phi;\bar{a}}^F \cap T_{\Psi;\bar{a}}^F$. Определим множество $T(\mathbb{F})$ предложений сигнатуры $\sigma_R \cup \langle c_a | a \in A^\times \rangle$ следующим образом. Пусть

$$P(F) \rightleftharpoons \Big\{ \varphi_{\bar{a}} \rightleftharpoons \exists x \Big(h_{\bar{a}}(x) = 0 \wedge \Big(\bigwedge_{i<n} c_{a_i} = g_{\bar{a},i}(x) \Big) \Big) \mid \bar{a} = a_0, \ldots, a_{n-1} \in \lambda(A^\times) \Big\}$$

и $N(F) \rightleftharpoons \{\forall x (h(x) \neq 0) \mid h \in \mathbb{Z}[x]$ — унитарный многочлен такой, что $F \models \forall x (h(x) \neq 0)\}$; полагаем

$$T(\mathbb{F}) \rightleftharpoons T_* \cup P(F) \cup N(F) \cup \bigcup \{ \tau(\Phi, \Psi, \lambda(\bar{a}), \chi_{\mathbb{F}}(\Phi, \Psi, \bar{a})) \mid \Phi \in L_{\sigma_f}, \Psi \in L_{\sigma_l},\ \bar{a} \in A^\times \}.$$

Предложение 4. *Пусть $\mathbb{F}' = \langle F', H', \sqsubseteq' \rangle$ — кратно нормированное поле. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *существует $\lambda(A^\times)$-обогащение $\langle \mathbb{F}', c^{F'}_{\lambda(a)} | a \in A^\times \rangle$, в котором истинны все предложения из $T(\mathbb{F})$;*

2) *$\mathbb{F}'$ элементарно эквивалентно $\mathbb{F}$.*

Доказательство. 1)⇒2). Пусть $\big\langle \mathbb{F}', c^{F'}_{\lambda(\bar{a})} | a \in A^\times \big\rangle$ — $\lambda(A^\times)$-обогащение, в котором истинны все предложения из $T(\mathbb{F})$. Из того, что в этом обогащении выполнены все предложения из $P(F)$, нетрудно видеть, что оно является $\lambda(A^\times)$-допустимым, т. е. существует вложение $\lambda' : \operatorname{Abs} F \longrightarrow \widetilde{\mathbb{Q}}$ такое, что $\lambda'\big(c^{F'}_{\lambda(a)}\big) = \lambda(a)$ для всех $a \in A^\times$.

Так как $\lambda(A^\times) \subseteq \lambda'(\operatorname{Abs} F')$, то и $\lambda(\operatorname{Abs} F) \subseteq \lambda'(\operatorname{Abs} F')$, а следовательно, можно (однозначно) определить вложение $\bar{\lambda} : \operatorname{Abs} F \longrightarrow \operatorname{Abs} F'$ такое, что $\lambda'\bar{\lambda}(a) = \lambda(a)$ для любого $a \in \operatorname{Abs} F$. Из этого факта и того, что $F' \models N(F)$, следует, что $\bar{\lambda}$ является изоморфизмом $\operatorname{Abs} F$ и $\operatorname{Abs} F'$.

Покажем, что для любых $\Phi \in L_{\sigma_f}, \Psi \in L_{\sigma_l}, \bar{a} \in A^\times$ справедливо

$$T^F_{\Phi;\bar{a}} \cap T^F_{\Psi;\bar{a}} \equiv T^{F'}_{\Phi;\bar{\lambda}(\bar{a})} \cap T^{F'}_{\Psi;\bar{\lambda}(\bar{a})}.$$

Для этого достаточно (теорема 1$'$) установить, что

$$\chi\big(T^F_{\Phi;\bar{a}} \cap T^F_{\Psi;\bar{a}}\big) = \chi\big(T^{F'}_{\Phi;\bar{\lambda}(\bar{a})} \cap T^{F'}_{\Psi;\bar{\lambda}(\bar{a})}\big).$$

Но из того, что

$$\big\langle \mathbb{F}', c^{F'}_{\lambda(a)} | a \in A^\times \big\rangle \models \tau(\Phi, \Psi, \bar{a},\ \chi_F(\Phi, \Psi, \bar{a})),$$

по предложению 3 следует, что

$$\chi\big(T^{F'}_{\Phi;\bar{\lambda}(\bar{a})} \cap T^{F'}_{\Psi;\bar{\lambda}(\bar{a})}\big) = \chi_{\mathbb{F}}(\Phi, \Psi, \bar{a}) = \chi\big(T^F_{\Phi;\bar{a}} \cap T^F_{\Psi;\bar{a}}\big).$$

Импликация 1)⇒2) установлена.

Импликация 2)⇒1) очевидна. □

Из предложения 4 следует, что $T(\mathbb{F})$ является системой аксиом для допустимого $\lambda(A^\times)$-обогащения $\big\langle \mathbb{F}, c^F_{\lambda(a)}(= a) | a \in A^\times \big\rangle$ в сигнатуре $\sigma_R \cup \langle c_{\lambda(a)} | a \in A^\times \rangle$. Пусть Ψ — предложение сигнатуры σ_R такое, что $\mathbb{F} \models \Phi$; тогда $T(\mathbb{F}) \vdash \Phi$ и, следовательно, существуют конечное подмножество $P_0 \subseteq P(F)$, конечное подмножество $N_0 \subseteq N(F)$; $\Phi^0, \ldots, \Phi^{k-1} \in L_{\sigma_f}$; $\Psi_0, \ldots, \Psi_{k-1} \in L_{\sigma_l}$; наборы $\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{k-1} \in A^\times$ такие, что

$$T_* \cup P_0 \cup N_0 \cup \bigcup_{i<k} \tau(\Phi^i, \Psi_i, \bar{a}_i,\ \chi_{\mathbb{F}}(\Phi^i, \Psi^i, \bar{a}_i)) \vdash \Psi.$$

Не уменьшая общности, можно предполагать, что выполнены следующие условия 1–6.

1. $N_0 = \{\forall x (h(x) \neq 0)\}$, т. е. N_0 состоит из одной формулы.
2. $P_0 = \{\varphi_{\bar{a}}\}$, т. е. P_0 тоже состоит из одной формулы.
3. $\bar{a} = \bar{a}_0 = \cdots = \bar{a}_{k-1}$.
4. Если F_0 — наименьшее расширение Галуа поля $\mathbb{Q}$, содержащее $\mathbb{Q}(\bar{a})$ и поле разложения многочлена h, то $F \cap F_0 = \mathbb{Q}(\bar{a})$.
5. Если $S \rightleftharpoons \{\Gamma \mid \Gamma \leq G_0 \rightleftharpoons G(F_0/\mathbb{Q}(a))$, существует кольцо нормирования $R \in W(H)$ такое, что Γ является группой разложения кольца нормирования R в поле $F_0F\}$, то группа $G_0 \rightleftharpoons G(F_0F/F)$ инвариантно порождается семейством

подгрупп S (см. [9]), т. е. если $H \leq G_0$ подгруппа такая, что для любой $\Gamma \in S$ найдется $g_0 \in G_0$ такое, что $\Gamma^{g_0} \leq H$, то $H = G_0$.

Замечание. Это следует из условия максимальности для $\mathbb{F}$.

Для любой подгруппы $\Gamma \leq G_0$ можно эффективно указать формулу $\delta_\Gamma(x_0, \dots, x_{n-1})$ сигнатуры σ_R такую, что для любого гензелева нормированного поля $\mathbb{F}' = \langle F', R' \rangle$ такого, что $\mathbb{Q}(\bar{a}) \leq F'$, справедлива эквивалентность: $F' \models \delta_\Gamma(\bar{a}) \iff$ подгруппа $G(F'F_0/F') \leq G(F_0/Q(\bar{a}) = G_0$ сопряжена в G_0 с подгруппой Γ.

6. Система формул $\overline{\Phi}_i \rightleftharpoons \Phi^i_R \wedge \Psi^R_i$, $i < k$, сигнатуры σ_R является *разбиением*, т. е. формула $\bigvee\limits_{i<k} \overline{\Phi}_i$ тождественно истинна, а формулы , $\overline{\Phi}_i \wedge \overline{\Phi}_j$, $i < j < k$, тождественно ложны, и для любого $i < k$ существует подгруппа $\Gamma_i \leq G$ такая, что $T_* \vdash \varphi_{\bar{a}} \wedge \forall x(h(x) \neq 0) \wedge \overline{\Phi}_i(\bar{c}_{\bar{a}}) \to \delta_{\Gamma_i}(\bar{c}_{\bar{a}})$.

Замечание 1. Чтобы удовлетворить условие 6, нужно воспользоваться предложением 2.

Замечание 2. $\{\Gamma_i \mid \chi(\Phi^i, \bar{a}) \neq \langle \bar{0} \rangle,\ i < k\} \subseteq S$, и для любой $\Gamma \in S$ найдется $i < k$ такое, что $\chi(\Phi^i, \Psi_i, \bar{a}) \neq \langle \bar{0} \rangle$ и Γ сопряжена с Γ_i в G.

Проведенные рассмотрения показывают, что множество предложений Φ сигнатуры σ_R, выполнимых на классе $mNLGF^*$, будет вычислимо перечислимым, если можно будет эффективно решать следующую проблему:

$(*)$ по заданному унитарному многочлену $h \in \mathbb{Z}[x]$, набору элементов $\bar{a} = a_0, \dots, a_{n-1} \in \widetilde{\mathbb{Z}}^\times$, наборам формул $\Phi^i \in L_{\sigma_f}$, $\Psi_i \in L_{\sigma_l}$, $i < k$, и набору подгрупп $\Gamma_i \leq G_0 = G(F_0/\mathbb{Q}(\bar{a}))$, где F_0 определено выше, таким, что выполнено условие 6, семейство $\{\Gamma_i \mid \chi_i \neq \langle \bar{0} \rangle,\ i < k\}$ подгрупп группы $H \rightleftharpoons G(F_0/\mathbb{Q}(\bar{a}))$ инвариантно порождает H; наборам пятерок (допустимых элементарных характеристик) $\chi_0, \dots, \chi_{k-1}$ определить, существуют ли кратно нормированное поле $\mathbb{F} \in mNLGF^*$ и его $\{\bar{a}\}$-обогащение $\left\langle \mathbb{F}, c^F_{a_i} | i < n \right\rangle$ такие, что для $\bar{b} = b_0, \dots, b_{n-1}$, $b_i \rightleftharpoons c^F_i$, $i < n$, выполнено

$$\left\langle \mathbb{F}, c^F_{a_i} | i < n \right\rangle \models \varphi_{\bar{a}}, \quad \chi\big(T^F_{\Phi^i;\bar{b}} \cap T^F_{\Psi_i;\bar{b}}\big) = \chi_i, \quad i < k.$$

Замечание 3. Если $\left\langle \mathbb{F}, c^F_{a_i} | i < n \right\rangle$ — решение проблемы $(*)$, $b_i \rightleftharpoons c^F_{a_i}$, $i < n$, то $G' \rightleftharpoons G(F_0/\mathbb{Q}(\bar{b})) \backsimeq G_0$, $F \cap F_0 = \mathbb{Q}(\bar{b})$ и $F \models \forall x(h(x) \neq 0)$; это следует из условия инвариантной порождаемости группы G_0 семейством $\{\Gamma_i | \chi_i \neq \langle \bar{0} \rangle,\ i < k\}$.

Предложение 5. *Проблема $(*)$ разрешима тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

(1) *множество подгрупп $\{\Gamma_i \mid \chi_i \neq \langle \bar{0} \rangle, i < k\}$ инвариантно порождает группу $G_0 = G(F_0/Q(\bar{a}))$;*

(2) *если $\chi_i \neq \langle \bar{0} \rangle$, $i < k$, то существует простое число p такое, что $\langle \mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p \rangle \models (\varphi_{\bar{a}} \wedge \bar{\Phi}_i(\bar{c}_{\bar{a}}))_\phi$ $(+_p)$;*

(3) *если χ_i — характеристика E-решетки, не являющейся булевой, то множество простых p, для которых выполнено $(+_p)$, бесконечно.*

Здесь $(\varphi_{\bar{a}} \wedge \bar{\Phi}_i(\bar{c}_{\bar{a}}))_\phi$ обозначает ϕ-редукцию (определение B-редукции см. выше) предложения $\big(\varphi_{\bar{a}} \wedge \Phi^i_R(c_{a_0}, \dots, c_{a_{n-1}}) \wedge \Psi^R_i(c_{a_0}, \dots, c_{a_{n-1}})\big)$ сигнатуры $\sigma_R \cup \langle c_{a_i} | i < n \rangle$.

Установим необходимость условий (1)–(3). Пусть $\mathbb{F} \in mNLGF^*$ и $\{\bar{a}\}$-обогащение $\left\langle \mathbb{F}, c^F_{a_i} | i < n \right\rangle$ решают проблему $(*)$. Из справедливости $\left\langle \mathbb{F}, c^F_{a_i} | i < n \right\rangle \models \varphi_{\bar{a}}$ следует, что это $\{\bar{a}\}$-обогащение допустимо. Пусть $\lambda : \operatorname{Abs} F \longrightarrow \widetilde{\mathbb{Q}}$ — вложение такое, что $\lambda(b_i) = \lambda\big(c^F_{a_i}\big) = a_i$, $i < n$.

Пусть $i < k$, $W_i \rightleftharpoons \{R \mid R \in W(H),\ \mathbb{H}_R(F) \models \overline{\Phi}_i(\bar b)\}$. Тогда для любого $h \in H^\times$ имеет место эквивалентность

$$W_h^F \subseteq W_i \Longleftrightarrow [h]_H \in T^F_{\Phi^i;\bar b} \cap T^F_{\Psi_i;\bar b}.$$

Так как $\chi\big(T^F_{\Phi^i;\bar b} \cap T^F_{\Psi_i;\bar b}\big) = \chi_i$, то $W_i = \phi \Longleftrightarrow \chi_i = \langle\bar 0\rangle$. Отсюда следует, что $\{\Gamma \mid \Gamma \le G_0 = G(F_0F/F)$, существует $R \in W(H)$ такой, что Γ — группа разложения R в $F_0F\} = \big\{\Gamma_i^{g_0} \mid g_0 \in G_0,\ \chi_i \ne \langle\bar 0\rangle\big\}$. Поскольку первое множество подгрупп инвариантно порождает G_0 (ибо $W(H)$ удовлетворяет условию максимальности), то и $\{\Gamma_i|\chi_i \ne \langle\bar 0\rangle\}$ инвариантно порождает G_0, т. е. выполнено условие (1).

Если $\chi_i \ne \langle\bar 0\rangle$, то $W_i \ne \phi$; пусть $R \in W_i$. Если $\mathbb{Q} \not\le R$, то $R \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}_p$ для подходящего p; и имеет место $\mathbb{H}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}) \preccurlyeq \mathbb{H}_{R\cap\mathbb{Q}(\bar b)}(\mathbb{Q}(\bar b)) \preccurlyeq \mathbb{H}_R(F)$, $\mathbb{H}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}) \preccurlyeq \langle\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p\rangle$, кроме того, $\mathbb{H}_R(F) \models \overline{\Phi}_i(\bar b)$, тогда

$$\big\langle\mathbb{H}_R(F),\ c_i^F(=b_i)|i<n\big\rangle \models \varphi_{\bar a} \wedge \overline{\Phi}_i(\bar c_{\bar a}), \quad \mathbb{H}_R(F) \models (\varphi_{\bar a} \wedge \overline{\Phi}_i(\bar c_{\bar a}))_\phi,$$
$$\mathbb{H}_{Z_p}(\mathbb{Q}) \models (\varphi_{\bar a} \wedge \overline{\Phi}_i(\bar c_{\bar a}))_\phi, \quad \langle\mathbb{Q}_p,\ \mathbb{Z}_p\rangle \models (\varphi_{\bar a} \wedge \overline{\Phi}_i(\bar c_{\bar a}))_\phi,$$

т. е. в этом случае выполнено условие (2).

Пусть $\mathbb{Q} \le R$. Как и выше, заметим, что $\mathbb{H}_R(F) \models (\varphi_{\bar a} \wedge \overline{\Phi}_i(\bar c_{\bar a}))_\phi$. Но R — квазиклассическое кольцо нормирования, следовательно, $\mathbb{H}_R(F)$ элементарно эквивалентно подходящему ультрапроизведению $\Pi\langle\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p\rangle/\Omega$ по подходящему неглавному ультрафильтру Ω на множестве всех простых чисел. Тогда по теореме Лося существует бесконечно много простых p таких, что $\langle\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p\rangle \models (\varphi_{\bar a} \wedge \bar\Phi_i(\bar c_{\bar a}))_\phi$.

Пусть χ_i — характеристика E-решетки, не являющейся булевой. Если найдется $R \in W_i$ такое, что $\mathbb{Q} \le R$, то, как выше, устанавливается условие (3). Если для бесконечно многих простых p найдется $R \in W_i$ такое, что $R \cap Q = \mathbb{Z}_p$, то условие (3) также справедливо. Остается заметить, что оставшийся случай: $\mathbb{Q} \not\le R$ для любого $R \in W_i$, и существует конечное число простых чисел $p_0, \dots, p_{s-1}$ такое, что для любого $R \in W_i$ $\quad R \cap \mathbb{Q} = Z_{p_j}$, для подходящего $j < s$ невозможен. Действительно, пусть $\pi \rightleftharpoons \prod\limits_{j<s} p_j \in \mathbb{Z}^\times$. Если выполнен рассматриваемый случай, то $T^F_{\Phi^i;\bar b} \cap T^F_{\Psi_i;\bar b} \subseteq \widehat{[\pi]}_H$. Идеал $T^F_{\Phi^i;\bar b} \cap T^F_{\Psi_i;\bar b}$ E-решетки $\mathbb{E}(H)$ локально главный, следовательно, $\chi_i = \chi\big(T^F_{\Phi^i;\bar b} \cap T^F_{\Psi_i;\bar b}\big)$ — элементарная характеристика булевой решетки, что приводит к противоречию.

Необходимость условий (1)–(3) установлена.

Пусть выполнены условия (1)–(3). Полагаем $F = \mathbb{Q}(\bar a)$, $H \rightleftharpoons R(W_{qc}(F))$; $W_i \rightleftharpoons \{R \in W_{qc}(F);\ \mathbb{H}_R(F) \models \bar\Phi_i(\bar a)\}$, $i < k$. Так как формулы $\bar\Phi, \dots, \bar\Phi_{k-1}$ образуют разбиение, то $W_0 \cup \dots \cup W_{k-1}$ — разбиение семейства $W_{qc}(F)$. Из условия (2) следует, что если $\chi_i \ne \langle\bar 0\rangle$, то $W_i \ne \phi$, а из условия (3) — что если χ_i — характеристика не булевой E-решетки, то W_i бесконечно (следовательно, почти булево, но не булево).

Установим теперь предложение, имеющее и самостоятельный интерес.

Предложение 6. *Пусть $\langle F, H, \sqsubseteq\rangle$ — счетное кратно нормированное поле, $W(H)$ — независимое почти булево семейство. Тогда существует расширение $\langle F, H, \sqsubseteq\rangle \le \langle F' = F(\eta_0, \dots, \eta_n, \dots), H', \sqsubseteq'\rangle$ такое, что $\eta_0, \dots, \eta_n, \dots$ алгебраически независимы над F; $H' \ge H$ — геометрическое расширение NB-колец; для* *любого $R' \in W(H')$ расширение $\mathbb{H}_{R' \cap F}(F) \leq \mathbb{H}_{R'}(F')$ является непосредственным; $W(H')$ как топологическое пространство не имеет изолированных точек.*

Для доказательства предложения отметим справедливость следующей леммы.

Лемма 1. *Если $\langle F, H, \sqsubseteq \rangle$, как в предложении, и характеристика F отлична от 2, то существует такое непосредственное расширение*

$$\langle F, H, \sqsubseteq \rangle \leq \langle F(\xi), H', \sqsubseteq' \rangle,$$

что ξ трансцендентно над F и для любого кольца нормирования $R' \in W(H')$ элемент ξ является квадратом в $H_{R'}(F')$.

Для доказательства леммы нужно воспользоваться предложением 9 из [5] и сделать выбор $V_0 \rightleftharpoons W(H) \supseteq V_1 \supseteq \dots$ последовательности подсемейств $W(H)$ и элементов $c^0, c^1, \dots$ так, чтобы выполнялись условия предложения 9 и следующие условия: $V_0, V_1, \dots$ — базисные открытые подсемейства; $\bigcap\limits_{n \in W} V_n = \phi$; $V_1 \rightleftharpoons V^F_{2^{-1}}$ (тогда $W_0 \rightleftharpoons V_0 \setminus V_1 = W^F_2 = \{R | R \in W(H),\ 2 \in \mathfrak{m}(R)\}$); $c_0 \rightleftharpoons 1$, $\eta_0 \rightleftharpoons 2^3$; $c_n + \mathfrak{m}(R) \in F^2_R$ для любого $R \in W_n \rightleftharpoons V_n \setminus V_{n+1}$, $n > 0$. Возможность выполнения условий предложения 9 следует из леммы 4 в [5] («бесконечность полей вычетов в бесконечности» для почти булевых, но не булевых семейств). $\square$

В случае, когда F имеет характеристику 2, можно доказать утверждение, аналогичное лемме 1, с заключением о том, что ξ «локально» является кубом.

Возвращаемся к доказательству предложения 6. Пусть

$$\langle F_0, H_0, \sqsubseteq_0 \rangle \rightleftharpoons \langle F, H, \sqsubseteq \rangle,$$

пусть $\langle F, H, \sqsubseteq \rangle \leq \langle F(\xi_0), H', \sqsubseteq' \rangle$ — расширение, как в лемме 1; полагаем

$$F_1 \rightleftharpoons F(\eta_0 \rightleftharpoons \sqrt{\xi_0}), \quad H_1 \rightleftharpoons R(W'),$$

где W' — семейство всех колец нормирования R_1 поля F_1 таких, что $R_1 \cap F(\xi_0) \in W(H')$. Тогда для любого $R_1 \in W'$

$$R_1 \cap F \in W(H), \quad \mathbb{H}_{R_1 \cap F}(F) \leq \mathbb{H}_{R_1 \cap F(\xi_0)}(F(\xi_0)) = \mathbb{H}_{R_1}(F_1)$$

— непосредственное расширение и для любого $R \in W(H)$ существует точно два кольца нормирования R_1 и R'_1 в $W(H_1)$ таких, что $R = R_1 \cap F = R'_1 \cap F$.

Далее строим последовательность

$$\langle F_0, H_0, \sqsubseteq_0 \rangle \leq \langle F_1, H_1, \sqsubseteq_1 \rangle \leq \\ \dots \leq \langle F_n, H_n, \sqsubseteq_n \rangle \leq \langle F_{n+1}, H_{n+1}, \sqsubseteq_{n+1} \rangle \rangle \leq \dots, \quad n \in W,$$

проделывая на каждом переходе от $\langle F_n, H_n, \sqsubseteq_n \rangle$ к $\langle F_{n+1}, H_{n+1}, \sqsubseteq_{n+1} \rangle$ ту же процедуру, что при построении $\langle F_1, H_1, \sqsubseteq_1 \rangle$ по $\langle F_0, H_0, \sqsubseteq_0 \rangle$ ($F_{n+1} = F_n(\eta_n = \sqrt{\xi_n}), \dots$).

Если положить

$$F' \rightleftharpoons \bigcup_{n \in W} F_n, \quad H' \rightleftharpoons \bigcup_{n \in W} H_n,$$

то расширение $\langle F, H, \sqsubseteq \rangle \leq \langle F', H', \sqsubseteq' \rangle$ удовлетворяет заключению предложения. $\square$

Возвращаемся к доказательству предложения 5. Пусть $\langle F', H', \sqsubseteq' \rangle$ — кратно нормированное поле такое, что расширение $\langle F, H, \sqsubseteq \rangle \leq \langle F', H', \sqsubseteq' \rangle$ удовлетворяет заключению предложения 6. Пусть $\langle F'', H'', \sqsubseteq'' \rangle \geq \langle F', H', \sqsubseteq' \rangle$ — счетное e-замкнутое непосредственное расширение (по теореме 1 из [5] H'' является кольцом Безу). Обозначим через π отображение ограничения из $W(H'')$ на $W(H)$ ($\pi : R'' \mapsto R'' \cap F$, $R'' \in W(H'')$); полагаем $W_i'' \rightleftharpoons \pi^{-1}(W_i)$, $H_i'' \rightleftharpoons R(W_i'')$, $i < k$. Для любого $i < k$ семейство W_i'' является булевым или почти булевым семейством колец нормирования поля F'' (в зависимости от того, булево или почти булево семейство W_i), которое как топологическое пространство в топологии Зарисского не имеет изолированных точек. Тогда если $W_i'' \neq \phi$, то $\mathbb{E}(H_i'')$ является свободной булевой или свободной E-решеткой соответственно со счетным числом свободных порождающих. Тем самым для любого $i < k$ существуют идеалы I_i E-решетки $\mathbb{E}(H_i'')$ такие, что фактор-решетка $\mathbb{E}(H_i'')/I_i$ имеет характеристику χ_i (если $\chi_i = \langle \bar{0} \rangle$, то $I_i = \mathbb{E}(H_i'')$). По соответствию Галуа (теорема 2.5.1 в [4]) идеалам I_i соответствуют компактные подсемейства $W_i^0 \subseteq W_i''$ такие, что для $H_i^0 \rightleftharpoons R(W_i^0)$ имеем $\chi(\mathbb{E}(H_i^0)) = \chi_i$, $i < k$. Пусть $W^0 \rightleftharpoons \bigcup\limits_{i<k} W_i^0$; W^0 — компактное (следовательно, почти булево) подсемейство семейства $W(H'')$; полагаем $H_0 \rightleftharpoons R(W^0)$.

Находим счетное e-замкнутое непосредственное расширение $\langle F_1, H_1, \sqsubseteq_1 \rangle \geq \langle F'', H_0, \sqsubseteq_0 \rangle$. Тогда по теореме 2 из [5] (заметим, что у семейства $W^0 = W(H_0)$ поля вычетов регулярно замкнуты в бесконечности, в частности, обильны в бесконечности) семейство $W(H_1)$ удовлетворяет принципу LG_A. По следствию 2 теоремы 1 в [5] для $\langle F_1, H_1, \sqsubseteq_1 \rangle$ существует M-подъем $\langle F', H', \sqsubseteq' \rangle$; тогда $W(H')$ удовлетворяет условию (M), а также условию LG_A по теореме 3.4.1 из [4]. Кроме того, для любого кольца нормирования R' из $W(H')$ кольцо $R \rightleftharpoons R' \cap F$ принадлежит $W_{qc}(F)$, $\langle F', R' \rangle$ является непосредственным расширением $\langle F, R \rangle$. Следовательно, R' квазиклассическое, $W(H') \subseteq W_{qc}(F')$. Используя доказательство следствия 3.5.3 в [4], можно установить, что для любого кольца нормирования R' поля F' такого, что $R' \notin W(H')$, поле $H_{R'}(F')$ является алгебраически замкнутым, значит, R' не является квазиклассическим, и $W(H') = W_{qc}(F')$. Итак, $\mathbb{F}' = \langle F', H', \sqsubseteq' \rangle \in mNLGF^*$ и выполнены следующие условия: для любого $i < k$ семейство

$$W_i' \rightleftharpoons \{R' \mid R' \in W(H'),\ \mathbb{H}_{R'}(F') \models \overline{\Phi}_i(\bar{a})\}$$

гомеоморфно семейству W_i^0 и, следовательно,

$$\chi\big(\mathbb{E}\big(R(W_i')\big) = \chi\big(\mathbb{E}\big(H_i^0\big)\big) = \chi_i.$$

Из определения W_i' следует, что

$$\mathbb{E}\big(R\big(W_i'\big)\big) = T^{F'}_{\Phi;\bar{a}} \cap T^{F'}_{\Psi;\bar{a}}.$$

Итак, $\chi\big(T^{F'}_{\Phi^i;\bar{a}} \cap T^{F'}_{\Psi_i;\bar{a}}\big) = \chi_i$ для всех $i < k$ и $\mathbb{F}'$ является решением проблемы $(*)$.

Предложение доказано. $\square$

Заметим теперь, что условия (1)–(3) проверяются эффективно. Относительно условий (1) это очевидно. Эффективность проверки условия (2) вытекает из разрешимости теории класса $\{\mathbb{Q}_p \mid p$ — простое число$\}$ всех полей p-адических чисел. Для эффективности проверки условия (3) установим, что можно эффективно по предложению Φ сигнатуры σ_R узнавать, является ли множество

$$\mathscr{P}_\Phi \rightleftharpoons \{p \mid \langle \mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p \rangle \models \Phi\}$$

бесконечным. По предложению 2 по Φ можно эффективно найти предложение Ψ сигнатуры σ_f такое, что для любого гензелева абсолютно неразветвленного поля $\mathbb{F}$ такого, что Γ_R — Z-группа (т. е. Γ_R элементарно эквивалентна $\mathbb{Z}$), имеют место эквивалентности

$$\mathbb{F} \models \Phi \Longleftrightarrow \mathbb{F} \models \Psi_R \Longleftrightarrow F_R \models \Psi.$$

Тогда вопрос о бесконечности множества $\mathscr{P}_\Phi$ сводится к вопросу о бесконечности множества $\mathbb{Q}_\Psi \rightleftharpoons \{p \mid F_p \models \Psi\}$ $(= \mathscr{P}_\Phi)$, здесь F_p — конечное поле из p элементов. Возможность эффективной проверки бесконечности множества $\mathbb{Q}_\psi$ вытекает из рассмотрений, проведенных в доказательстве теоремы 26.9 из [4]: по предложению Ψ эффективно находится целое $l > 0$, конечное расширение Галуа L поля $\mathbb{Q}$ и семейство Con циклических подгрупп из $G(L/\mathbb{Q})$, замкнутое относительно сопряженности, такие, что выполнена эквивалентность (4) из этого доказательства. Из этой эквивалентности и теоремы Чеботарева о плотности вытекает, что множество $\mathbb{Q}_\Psi$ бесконечно тогда и только тогда, когда соответствующее множество Con непустое.

Из всех этих рассмотрений следует, что множество всех предложений сигнатуры σ_R, выполнимых на классе $mNLGF^*$, является вычислимо перечислимым. Этого, как отмечено в начале доказательства теоремы, достаточно для утверждения разрешимости элементарной теории $T_* = Th(mNLGF^*)$.

Теорема доказана. $\square$

Рассмотрим кратно нормированное поле $\langle \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \sqsubseteq_\mathbb{Z}\rangle$; как в доказательстве теоремы, можно найти счетное непосредственное расширение $\langle \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \sqsubseteq_\mathbb{Z}\rangle \le \mathbb{F} = \langle F, H, \sqsubseteq\rangle$ такое, что $\mathbb{F} \in mNLGF^*$, т. е. $W(H) \models LG_A \wedge M$. Заметим, что если $\langle \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \sqsubseteq_\mathbb{Z}\rangle \le \mathbb{F}'$ — другое такое расширение, то по теореме 4.6.3 из [4] $\mathbb{F}$ и $\mathbb{F}'$ элементарно эквивалентны. Назовем такое $\mathbb{F}$ *W-расширением* кратно нормированного поля $\langle \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \sqsubseteq_\mathbb{Z}\rangle$.

Замечание. Такое W-расширение $\mathbb{F}$ «почти» является удивительным расширением поля $\mathbb{Q}$ (отсутствует только порядок) (см. [10]).

Теорема 2. *Теория T_W любого W-расширения* (т. е. *теория всех W-расширений*) *разрешима.*

Так как рассматриваемая теория T_W является полной, то для доказательства разрешимости T_W достаточно указать вычислимо перечислимую систему аксиом для T_W.

Установим сначала утверждение, имеющее и самостоятельный интерес.

Предложение 7. *Пусть F — поле алгебраических чисел* (*конечное расширение* $\mathbb{Q}$); *$F_0 \ge F$ — конечное расширение Галуа поля $\mathbb{Q}$. Пусть $W \subseteq W_{qc}(F)$ таково, что $W_{qc}(F) \setminus W$ конечно; тогда найдутся кольца нормирования $R_0, \dots, R_{k-1} \in W$ такие, что если F' — алгебраическое расширение F и для любого $i < k$ существует $R_i' \in W_{qc}(F')$ такое, что $R_i' \cap F = R_i$, то $F' \cap F_0 = F$.*

Пусть $G \rightleftharpoons G(F_0/\mathbb{Q})$, $H \rightleftharpoons G(F_0/F) \le G$; из теоремы Чеботарева о плотности следует, что для любого $\sigma \in H$ существует бесконечно много простых p таких, что подгруппа $\langle\sigma\rangle \le G$ является группой разложения кольца нормирования $\mathbb{Z}_p < \mathbb{Q}$ в F_0. Так как $\langle\sigma\rangle \le H$, то существует кольцо нормирования R поля F, доминирующее $\mathbb{Z}$ и такое, что $\langle\sigma\rangle$ является группой разложения R в F_0. Заметим, что тогда $R \in W_{qc}(F)$. Так как $W_{qc}(F) \setminus W$ конечно, то можно найти p и R такие, что $R \in W$; обозначим одно из таких колец через R_σ. Установим, что конечное семейство колец $\{R_\sigma \mid \sigma \in H\}$ удовлетворяет заключению предложения.

Пусть F' — алгебраическое расширение F такое, что для любого $\sigma \in H$ кольцо нормирования R_σ имеет расширение до кольца нормирования R'_σ поля F' такого, что $\langle F, R_\sigma\rangle \le \langle F', R'_\sigma\rangle$ — непосредственное расширение. Переходя от поля F' к полю $F' \cap F_0$, можно считать, что $F' \le F_0$, и достаточно доказать, что в этом случае $F' = F$. Пусть $H' \rightleftharpoons G(F_0/F') \le H$. Пусть $\sigma' \in H'$ таково, что $\langle\sigma'\rangle$ — группа разложения кольца R'_σ в F_0; тогда $\langle\sigma'\rangle$ будет и группой разложения кольца R_σ в F_0 и, следовательно, $\langle\sigma'\rangle$ сопряжена с σ в H. Итак, для любого $\sigma \in H$ существует $\sigma' \in H'$ $(\le H)$, сопряженный с σ в H. Тогда по лемме Мазурова (см. [10]) $H = H'$ и $F' = F$.

Предложение доказано. $\square$

Следствие. *Для любого поля алгебраических чисел F если семейство W колец нормирования поля F такое, что $W_{qc}(F)\backslash W$, конечно, то W удовлетворяет свойству максимальности.*

Из этого следствия вытекает, что $\mathbb{Q}$ алгебраически замкнуто в F, т. е. $\operatorname{Abs} F = \mathbb{Q}$. Тогда $H \cap \operatorname{Abs} F = H \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$.

Система аксиом для теории $Th(\mathbb{F})$ состоит из теории $T_*(= Th(mNLGF^*))$, $N(\mathbb{Q})$ и описания элементарных характеристик $\chi(\Phi, \Psi, \bar{a})$ идеалов $T^F_{\Phi;\bar{a}} \cap T^F_{\Psi;\bar{a}}$ $\mathbb{E}$-решетки $\mathbb{E}(H)$, где $\Phi(\bar{x}) \in L_{\sigma_f}$, $\Psi(\bar{x}) \in L_{\sigma_l}$, $\bar{a} \in \mathbb{Z}^\times$.

Заметим, что $\mathbb{E}(H) \backsimeq \mathbb{E}(\mathbb{Z})$, а $\mathbb{E}$-решетка $\mathbb{E}(\mathbb{Z})$ естественно изоморфна E-решетке $P\omega(\mathscr{P})$ всех конечных подмножеств множества $\mathscr{P}$ всех простых чисел. Отсюда следует, что всякий идеал $\mathbb{E}(H)$ либо конечен, либо является атомной E-решеткой, не являющейся булевой (все такие E-решетки элементарно эквивалентны, т. е. имеют одну и ту же характеристику).

Поэтому описание элементарных характеристик $\chi(\Phi, \Psi, \bar{a})$ будет эффективным, если по Φ, Ψ и $\bar{a}$ можно эффективно узнать, конечно или бесконечно множество $T^F_{\Phi;\bar{a}} \cap T^F_{\Psi;\bar{a}}$ и, если оно конечно, сколько элементов оно содержит.

Пусть $\Phi(\bar{x}) \in L_{\sigma_f}$, $\Psi(\bar{x}) \in L_{\sigma_l}$, $\bar{a} \in \mathbb{Z}^\times$. Пусть

$$\mathscr{P}(\Phi, \Psi, \bar{a}) \rightleftharpoons \{p \mid p\text{— простое число}, \langle\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p\rangle \models \Phi_R(\bar{a}) \wedge \Psi^R(\bar{a})\}.$$

Нетрудно видеть, что идеал $T^F_{\Phi;\bar{a}} \cap T^F_{\Psi;\bar{a}}$ порождается в $\mathbb{E}(H)$ множеством $\{[p]_H \mid p \in \mathscr{P}(\Phi, \Psi, \bar{a})\}$. Заметим, что $\Phi_R(\bar{a}) \wedge \Psi^R(\bar{a})$ является предложением сигнатуры σ_R.

Поэтому достаточно по любому предложению Φ сигнатуры σ_R эффективно узнавать

1) конечно или бесконечно множество

$$\mathscr{P}_\Phi \rightleftharpoons \{p \mid p\text{ — простое число}, \langle\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p\rangle \models \Phi\};$$

2) если $\mathscr{P}_\Phi$ конечно, то сколько элементов оно содержит?

То, что первый вопрос решается эффективно, отмечено в доказательстве теоремы.

Если известно, что $\mathscr{P}_\Phi$ конечно, то, используя разрешимость теории T^* всех полей p-адических чисел, можно эффективно найти натуральное N такое, что $\langle\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p\rangle \models \Phi \Longrightarrow p \le N$. Тогда

$$\mathscr{P}_\Phi = \{p \mid p \le N,\ \langle\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p\rangle \models \Phi\}$$

и разрешимость теории T^* позволяет вычислить это множество $\mathscr{P}_\Phi$ и, в частности, узнать число элементов этого множества.

Теорема доказана. $\square$

Замечание. Разрешимость теории удивительных расширений поля $\mathbb{Q}$, объявленная в [10], устанавливается аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ершов Ю. Л.* Хорошие локально-глобальные поля. I // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 4. С. 411–423.
2. *Ершов Ю. Л.* Хорошие локально-глобальные поля. II // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 5. С. 503–528.
3. *Ершов Ю. Л.* Хорошие локально-глобальные поля. III // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 526–532.
4. *Ершов Ю. Л.* Кратно нормированные поля. Новосибирск: Научная книга, 2000.
5. *Ершов Ю. Л.* Непосредственные расширения прюферовых колец // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, № 3. С. 262–289.
6. *Ершов Ю. Л.* Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.
7. *Гончаров С. С., Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели. Новосибирск: Научная книга, 1999.
8. *Van den Dries L.* Elimination theory for the ring of algebraic integers // J. Reine Angew. Math. 1988. V. 388. P. 189–205.
9. *Ершов Ю. Л.* Инвариантная порождаемость // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 5. С. 109–111.
10. *Ершов Ю. Л.* Об удивительных расширениях поля рациональных чисел // Докл. РАН. 2000. Т. 373, № 1. С. 15–16.

Статья поступила 5 ноября 2001 г.

Ершов Юрий Леонидович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
ershov@math.nsc.ru