Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2002. Том 43, № 2

УДК 517.54

К ПРОБЛЕМЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДЛЯ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

В. Г. Шеретов

Аннотация: Доказаны критерии принадлежности аналитических функций классам $S^{(p)}$ и $\Sigma^{(p)}$ однолистных функций с p-кратной круговой симметрией в терминах счетных систем точных коэффициентных неравенств. В качестве следствий получены описания соответствующих областей коэффициентов. Библиогр. 7.

1. Пусть p — фиксированное натуральное число. Символом $S^{(p)}$ обозначим класс всех однолистных в единичном круге Δ функций F, подчиненных нормировке $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$ и обладающих свойством p-кратной симметрии: $F\big(e^{(2\pi i/p)}z\big) = e^{(2\pi i/p)}F(z)$ для всех $z \in \Delta$. Класс $S^{(1)}$, очевидно, совпадает с известным классом S. Каждый элемент $F \in S^{(p)}$ представим в Δ рядом Тейлора

$$F(z) = z + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^{p\nu+1}. \tag{1}$$

Далее, пусть $\Sigma^{(p)}$ — класс всех p-кратно симметричных и однолистных в области $\Delta^* = \{\zeta \in \overline{\mathbb{C}} : |\zeta| > 1\}$ функций φ, имеющих гидродинамическую нормировку в точке $\zeta = \infty$ и голоморфных в $\Delta^* \cap \mathbb{C}$. Их лорановские разложения в $\Delta^* \cap \mathbb{C}$ имеют вид

$$\varphi(z) = \zeta + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \zeta^{1-p\nu}. \tag{2}$$

Класс $\Sigma^{(1)}$, очевидно, совпадает с известным классом Σ.

Л. де Бранж [1] доказал справедливость гипотезы Бибербаха о коэффициентах функций класса S. Целью данной работы является получение критериев принадлежности функций с разложениями (1) и (2) соответственно классам $S^{(p)}$ и $\Sigma^{(p)}$ для натуральных p в форме счетных систем точных коэффициентных неравенств, дающих полные описания структур областей коэффициентов

$$D_\infty\big(S^{(p)}\big) = \big\{\vec{a}_F \in \mathbb{C}^\infty : \ \vec{a}_F = (a_1, a_2, \dots), F \in S^{(p)}\big\},$$
$$D_\infty\big(\Sigma^{(p)}\big) = \big\{\vec{c}_\varphi \in \mathbb{C}^\infty : \ \vec{c}_\varphi = (c_1, c_2, \dots), \ \ \varphi \in \Sigma^{(p)}\big\},$$

где $a_\nu = a_\nu(F)$ и $c_\nu = c_\nu(\varphi)$ — коэффициенты рядов (1) и (2) соответственно, $\nu = 1, \dots, \infty$. Заметим, что известные критерии однолистности Ч. Левнера, Г. М. Голузина, Г. Грунского, И. М. Милина, И. Е. Базилевича, В. Я. Гутлянского [2–4] дают весьма сложные характеристики областей коэффициентов функций классов S и Σ, не выражающиеся непосредственно в терминах тейлоровских (лорановских) коэффициентов. Например, система неравенств Грунского

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–01–00112).

несчетна. Н. А. Лебедев [3] указывал, что области $D_\infty\big(S\big)$ и $D_\infty\big(\Sigma\big)$ «устроены достаточно хитро, и просто их характеризовать нельзя, но лучше характеризовать желательно».

Предлагаемый здесь способ решения проблемы коэффициентов вытекает из [5] и опирается на метод площадей в метриках аналитических квадратичных дифференциалов.

2. Рассмотрим классы $S_k^{(p)}(\infty)$, образуемые p-кратно симметричными k-квазиконформными автоморфизмами F сферы Римана $\overline{\mathbb{C}}$, нормированными условием $F(\infty)=\infty$ и такими, что ограничения F на Δ принадлежат классу $S^{(p)}$. Аналогично определим классы $\Sigma_k^{(p)}$ p-кратно симметричных k-квазиконформных автоморфизмов $\overline{\mathbb{C}}$, потребовав, чтобы ограничения их элементов φ на область Δ^* принадлежали $\Sigma^{(p)}$. Продолжим каждое отображение $F\in S_k^{(p)}(\infty)$ до автоморфизма $\widehat{F}$ римановой поверхности R_z радикала $\sqrt{z}$ так, чтобы ограничения $\widehat{F}$ на каждый ее лист совпадали с F. Однозначная на R_w функция

$$\Omega(w)=\sum_{q=1}^{N}\beta_q w^{-pq/2},\quad \beta_N\neq 0, \tag{3}$$

порождает аналитический квадратичный дифференциал $\omega=\big(\Omega' dw\big)^2$. Для получения неравенства площадей в классе $S_k^{(p)}(\infty)$ в метрике $|\omega|$ рассмотрим разложение композиции $\Omega\circ\widehat{F}$ в ряд Пюизо:

$$\Omega\circ\widehat{F}(z)=\sum_{\nu=-N}^{\infty}b_\nu z^{p\nu/2}. \tag{4}$$

Областью сходимости $\widehat{\Delta}_0$ ряда (4) является двулистный единичный круг $\widehat{\Delta}$ с проколом в единственной точке ветвления $z=0$. Символом $\widehat{\Delta}^*$ обозначим риманову область $R_z\backslash\widehat{\Delta}$. Площадь $A_\omega^{\mathrm{ext}}(F)$ $\widehat{F}$-образа области $\widehat{\Delta}^*$ в метрике $|\omega|$ выражается интегралом

$$A_\omega^{\mathrm{ext}}(F)=\iint\limits_{\widehat{F}(\widehat{\Delta}^*)}\big|\Omega'(w)\big|^2\,dudv.$$

Преобразуя интеграл с помощью обобщенной формулы Грина, получим

$$A_\omega^{\mathrm{ext}}(F)=\iint\limits_{\widehat{F}(\widehat{\Delta}^*)}\frac{\partial}{\partial\overline{w}}\big(\overline{\Omega(\omega)}\Omega'(w)\big)\,dudv=\frac{1}{2i}\int\limits_{\partial\widehat{F}(\widehat{\Delta}^*)}\overline{\Omega(\omega)}\Omega'(w)\,dw.$$

Предположим дополнительно, что F голоморфна в замкнутом круге $\overline{\Delta}$ ($F\in\mathrm{Hol}(\overline{\Delta})$). Тогда для дальнейших вычислений можно использовать представление $\Omega\circ\widehat{F}(z)$ на $\partial\widehat{\Delta}$ рядом (4). Будем иметь

$$A_\omega^{\mathrm{ext}}(F)=\frac{1}{2i}\int\limits_{\partial\widehat{\Delta}^*}\overline{\Omega\circ\widehat{F}(z)}\frac{\partial}{\partial z}\Omega\circ\widehat{F}(z)dz=\frac{i}{2}\int\limits_{\partial\widehat{\Delta}}\overline{\sum_{\nu=-N}^{+\infty}b_\nu z^{p\nu/2}}\sum_{\nu=-N}^{+\infty}\frac{p\nu}{2}b_\nu z^{(p\nu/2-1)}dz$$

$$=\frac{i}{2}\int\limits_{\partial\widehat{\Delta}}\sum_{\mu=-N}^{+\infty}\sum_{\nu=-N}^{+\infty}\frac{p\mu}{2}\overline{b}_\nu b_\mu\exp\bigg(\frac{p(\mu-\nu)}{2}i\varphi\bigg)i\,d\varphi=\pi p\bigg(\sum_{\nu=1}^{N}\nu|b_{-\nu}|^2-\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu|b_\nu|^2\bigg). \tag{5}$$

Чтобы получить оценку снизу величины $A_\omega^{\mathrm{ext}}(F)$, воспользуемся неравенством квазиконформности $|F_{\bar z}| \le k|F_{\bar z}|$ п. в. в области Δ^* и принципом Дирихле для гармонических функций на римановых поверхностях. Вычисления дают:

$$A_\omega^{\mathrm{ext}}(F) = \iint\limits_{\widehat{\Delta}^*} \left|\Omega'_w \circ \widehat{F}(z)\right|^2 (|F_z| - |F_{\bar z}|^2)\, dxdy$$
$$\ge \frac{1-k^2}{1+k^2} \iint\limits_{\widehat{\Delta}^*} \left(\left|\frac{\partial \Omega \circ \widehat{F}}{\partial z}\right|^2 + \left|\frac{\partial \Omega \circ \widehat{F}}{\partial \bar z}\right|^2 \right) dxdy \ge \frac{1-k^2}{1+k^2} \iint\limits_{\widehat{\Delta}^*} (|H_z|^2 + |H_{\bar z}|^2)\, dxdy. \tag{6}$$

Здесь

$$H(z) = \sum_{\nu=1}^{N} b_{-\nu} z^{-p\nu/2} + \overline{\sum_{\nu=0}^{\infty} \bar b_\nu z^{-p\nu/2}}$$

— комплекснозначная ограниченная гармоническая функция в $\widehat{\Delta}^*$ с граничными значениями, равными $\Omega \circ \widehat{F}$ на $\partial\widehat{\Delta}^*$. Значение последнего интеграла в цепочке (6) — интеграла Дирихле от функции H — равно

$$D(H) = \pi p \left(\sum_{\nu=1}^{N} \nu |b_{-\nu}|^2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu |b_\nu|^2 \right),$$

поэтому вытекающее из (6) неравенство

$$A_\omega^{\mathrm{ext}}(F) \ge \frac{1-k^2}{1+k^2} D(H)$$

с учетом (5) преобразуется к виду

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu |b_\nu|^2 \le k^2 \sum_{\nu=1}^{N} \nu |b_{-\nu}|^2. \tag{7}$$

Если условие $F \in \mathrm{Hol}(\overline{\Delta})$ не выполнено, то для вывода неравенства площадей (7) следует сначала записать аналог (7) для функций $F_\rho := \rho^{-1} F(\rho z)$, зависящих от параметра $\rho \in (0,1)$, принадлежащих, очевидно, классу $S_k^{(p)}(\infty)$ и голоморфных в $\overline{\Delta}$. Заметим, что функция F_ρ и композиция $\Omega \circ \widehat{F}_\rho$ соответственно имеют разложения

$$F_\rho(z) = z + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \rho^{p\nu} z^{p\nu+1}, \quad z \in \Delta,$$

и

$$\Omega \circ \widehat{F}_\rho(z) = \sum_{\nu=-N}^{+\infty} b_\nu \rho^{p\nu} z^{p\nu/2}, \quad z \in \widehat{\Delta}_0.$$

Следовательно, неравенство площадей примет вид

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu |b_\nu|^2 \rho^{2p\nu} \le k^2 \sum_{\nu=1}^{N} \nu |b_{-\nu}|^2 \rho^{-2p\nu}.$$

Выполним здесь предельный переход, беря от обеих частей неравенства нижний предел при $\rho \to 1$ и принимая во внимание, что

$$A_\omega^{\mathrm{ext}}(F) = \lim_{\rho \to 1} A_\omega^{\mathrm{ext}}(F_\rho)$$

и

$$D(H) \le \varliminf_{\rho\to 1} D(H_\rho),$$

где H_ρ — гармоническая функция в римановой области $\widehat{\Delta}^*$ с граничными значениями $\widehat{F}_\rho|\partial\widehat{\Delta}$.

Равенство в полученном таким путем неравенстве (7) для коэффициентов ряда Пюизо композиции $\Omega\circ\widehat{F}$ достигается в том и только в том случае, когда

$$A_\omega^{\mathrm{ext}}(F) = \frac{1-k^2}{1+k^2} D(H),$$

что, в свою очередь, равносильно выполнению условий $\Omega\circ\widehat{F}(z) = H(z)$ и

$$\left| \frac{\partial\Omega\circ\widehat{F}}{\partial\bar{z}} \Big/ \frac{\partial\Omega\circ\widehat{F}}{\partial z} \right| = k$$

в области $\widehat{\Delta}^*$. Эквивалентом этих условий является представление

$$\Omega\circ\widehat{F} = \sum_{\nu=1}^{N} b_{-\nu} z^{-p\nu/2} + ke^{i\theta}\overline{\sum_{i=1}^{N} b_{-\nu} z^{-p\nu/2}} \tag{8}$$

для всех $z\in\widehat{\Delta}^*$, где θ — некоторая действительная константа.

Итогом проведенного анализа является

Теорема 1. *Коэффициенты ряда* (4) *для композиции* $\Omega\circ\widehat{F}$, *где* F — *произвольный элемент класса* $S_k^{(p)}(\infty)$ *и* Ω — *произвольная функция вида* (3), *удовлетворяют неравенству площадей* (7). *Равенство в нем имеет место, если и только если граничная функция* $\Omega\circ\widehat{F}|\partial\widehat{\Delta}$ *продолжима до гармонического квазиконформного отображения вида* (8) *в римановой области* $\widehat{\Delta}^*$.

3. Пусть $S\in S^{(p)}$, ρ — число из промежутка $(0,1)$. Отображение $F_\rho = \rho^{-1}F(\rho z)$, рассматриваемое в круге Δ, также принадлежит классу $S^{(p)}$. Так как $F_\rho\in\mathrm{Hol}(\overline{\Delta})$, существует $k=k(\rho)$ такое, что F_ρ продолжается до элемента $\widetilde{F}\in S_k^{(p)}(\infty)$. Выписав неравенство вида (7) для Ω и $\widetilde{F}_\rho$ и выполнив в нем предельный переход при $\rho\to 1$, получим

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu|b_\nu|^2 \le \sum_{\nu=1}^{N} \nu|b_{-\nu}|^2,$$

поскольку $\sup\limits_{\rho\in(0,1)} k(\rho)\le 1$. Доказана

Теорема 2. *Коэффициенты ряда* (4) *для композиции* $\Omega\circ\widehat{F}$, *где* F — *произвольная функция класса* $S^{(p)}$ *и* Ω *имеет вид* (3), *связаны неравенствами*

$$\sum_{\nu=1}^{m} \nu|b_\nu|^2 \le \sum_{\nu=1}^{N} \nu|b_{-\nu}|^2 \tag{9}$$

при любом $m\ge 0$. *Если* $m\ge N$, *то неравенства* (9) *точны и экстремалями для них являются* p-*лучевые функции*

$$F_\alpha(z) = z\bigl(1+e^{i\alpha}z^p\bigr)^{-2/p}, \quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

Необходимо лишь проверить точность неравенств (9) при $m \geq N$. Вычисления дают

$$\Omega \circ F_\alpha(z) = \sum_{q=1}^{N} \beta_q \big(F_\alpha(z)\big)^{-qp/2} = \sum_{q=1}^{N} \beta_q \big(z^{-p/2} + e^{i\alpha} z^{p/2}\big)^q.$$

Следовательно, $|b_{-\nu}| = |b_\nu|$ для всех ν, и, кроме того, $b_{-\nu} = b_\nu = 0$ для всех $\nu > N$. Эти свойства коэффициентов ряда (4) для композиции $\Omega \circ F_\alpha$ обеспечивают равенства в (9) при любом $m \geq N$.

Основным результатом данной работы является следующий критерий однолистности.

Теорема 3. *Голоморфная в единичном круге Δ функция F, имеющая тейлоровское разложение вида* (1), *тогда и только тогда принадлежит классу $S^{(p)}$, когда для любой аналитической функции Ω вида* (3) *с целыми комплексными коэффициентами $\beta_q = m_q + in_q$, $q = 1, \dots, N$, при любом $N \geq 1$ коэффициенты ряда* (4), *представляющего композицию $\Omega \circ \widehat{F}(z)$ в римановой области $\widehat{\Delta}_0$, связаны неравенством* (9) *при $m = N$.*

Так как утверждение о необходимости содержится в теореме 2, нам следует доказать утверждение о достаточности. Каждой функции $F \in S^{(p)}$ поставим в соответствие функцию, определяемую гидродинамически нормированной на бесконечности ветвью

$$\varphi(\zeta) = \big(F(\zeta^{-2/p})\big)^{-p/2} \tag{10}$$

в области Δ^*.

Лемма 1. *Формула* (10) *устанавливает биекцию между классами $S^{(p)}$ и $\Sigma^{(2)}$.*

Доказательство. Используя разложение (1), находим

$$\varphi(\zeta) = \left[\zeta^{-2/p}\left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \zeta^{-2\nu}\right)\right]^{-p/2} = \zeta\left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \zeta^{-2\nu}\right).$$

Таким образом, $\varphi(\zeta)$ — нечетная аналитическая функция, однолистная в некоторой окрестности точки $\zeta = \infty$. Предположим, что она не однолистна в Δ^*. Тогда найдутся две различные точки $\zeta_1, \zeta_2 \in \Delta^*$ такие, что $\varphi(\zeta_1) = \varphi(\zeta_2)$. Так как $F(\Delta) \subset \mathbb{C}$, то $\varphi(\Delta^*) \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ и поэтому $\varphi(\zeta_1) \neq 0$. Из равенства

$$\big(F\big(\zeta_1^{-2/p}\big)\big)^{-p/2} = \big(F\big(\zeta_2^{-2/p}\big)\big)^{-p/2}$$

следует, что

$$F\big(\zeta_1^{-2/p}\big) = e^{4\pi i\nu/p} F\big(\zeta_2^{-2/p}\big).$$

при некотором целом ν. В силу свойства p-кратной симметрии функции класса $S^{(p)}$ имеем

$$F\big(e^{4\pi i\nu/p} \zeta_2^{-2/p}\big) = e^{4\pi i\nu/p} F\big(\zeta_2^{-2/p}\big).$$

Следствием однолистности функции F класса $S^{(p)}$ является равенство $\zeta_1^{-2/p} = e^{4\pi i\nu/p} \zeta_2^{-2/p}$. Таким образом, $\zeta_1^{-2} = \zeta_2^{-2}$, и, поскольку, $\zeta_1 \neq \zeta_2$, заключаем, что $\zeta_2 = -\zeta_1$. Последнее в силу нечетности функции φ означает выполнение равенств $\varphi(\zeta_1) = \varphi(\zeta_2) = \varphi(-\zeta_1) = = -\varphi(\zeta_1)$, т. е. $\varphi(\zeta_1) = 0$ вопреки установленному ранее свойству $\varphi(\zeta_1) \neq 0$ для $\zeta_1 \in \Delta^*$. Доказано, таким образом, что

φ принадлежит классу $\Sigma^{(2)}$ нечетных однолистных функций в Δ^*, имеющих гидродинамическую нормировку на бесконечности.

Проверим биективность соответствия, устанавливаемого (10). Произвольному $\varphi \in \Sigma^{(2)}$ в силу (10) отвечает единственная нормированная условиями $F(0) = F'(0) - 1 = 0$ ветвь

$$F(z) = (\varphi(z^{-p/2}))^{-2/p} = \left[z^{-p/2}\left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu z^p\right)\right]^{-2/p} = z + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^{p\nu+1},$$

голоморфная и однолистная в круге Δ. Однолистность F в некоторой окрестности начала координат и справедливость в Δ выписанного разложения в ряд Тейлора очевидны. Если $F(z_1) = F(z_2)$ для некоторой пары различных точек $z_1, z_2 \in \Delta$, то $\varphi^2\bigl(z_1^{-p/2}\bigr) = \varphi^2\bigl(z_2^{-p/2}\bigr)$. В случае, когда $\varphi\bigl(z_1^{-p/2}\bigr) = \varphi\bigl(z_2^{-p/2}\bigr)$, имеем $z_1^{-p/2} = z_2^{-p/2}$ и, значит, $z_1 = e^{4\pi i\nu/p} z_2$ при некотором целом ν. В силу p-кратной симметрии функции F получим

$$F(z_1) = F\bigl(e^{4\pi i\nu/p} z_2\bigr) = e^{4\pi i\nu/p} F(z_2) = e^{4\pi i\nu/p} F(z_1),$$

следовательно, $e^{4\pi i\nu/p} = 1$ либо $F(z_1) = F(z_2) = 0$. Первое равенство исключено предположением о том, что $z_1 \neq z_2$, а из второго следует, что $\varphi(\zeta_1) = \varphi(\zeta_2) = \infty$, т. е. $\zeta_1 = \zeta_2 = \infty$, а $z_1 = z_2 = 0$; противоречие. Аналогично в случае $\varphi\bigl(z_1^{-p/2}\bigr) = -\varphi\bigl(z_2^{-p/2}\bigr)$, принимая во внимание нечетность функции φ, находим, что $\varphi\bigl(z_1^{-p/2}\bigr) = \varphi\bigl(-z_2^{-p/2}\bigr)$. Отсюда последовательно получаем, что $z_1^{-p/2} = -z_2^{-p/2}$, $z_1^p = z_2^p$ и $z_2 = e^{2\pi i\nu/p} z_1$ при некотором целом ν. Имеем

$$F(z_1) = F\bigl(z_1 e^{2\pi i\nu/p}\bigr) = e^{2\pi i\nu/p} F(z_1) = e^{2\pi i\nu/p} F(z_2).$$

Обе вытекающие отсюда возможности

$$e^{2\pi i\nu/p} = 1 \quad \text{или } F(z_1) = F(z_2) = 0,$$

как и выше, влекут равенство $z_1 = z_2$ вопреки исходному допущению. Лемма доказана.

Заметим, что p-лучевым функциям F_α в силу (10) отвечают функции вида $\varphi_\alpha = \zeta + e^{i\alpha}\zeta^{-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Продолжим доказательство теоремы 3. Заданной функции $\Omega(w)$ вида (3) поставим в соответствие полином

$$Q(w) = \sum_{q=1}^{N} \beta_q w^q$$

с теми же коэффициентами. Тогда, используя (4) и (10), можно записать

$$\Omega \circ F(z) = \sum_{\nu=-N}^{+\infty} b_\nu z^{p\nu/2} = \sum_{\nu=-N}^{+\infty} b_\nu \zeta^{-\nu} = \sum_{\nu=-\infty}^{N} B_\nu \zeta^\nu = Q \circ \varphi(\zeta),$$

где $B_\nu = b_{-\nu}$ для всех ν, $z = \zeta^{-2/p}$. Неравенства (9) при $m = N$ запишем в равносильной форме

$$\sum_{\nu=1}^{N} \nu |B_{-\nu}|^2 \leq \sum_{\nu=1}^{N} \nu |B_\nu|^2, \tag{11}$$

справедливой для коэффициентов ряда Лорана, представляющего композицию $Q \circ \varphi$ в области $\Delta^* \cap \mathbb{C}$.

Умножение голоморфного полинома $Q(\omega)$ на константу $\gamma \neq 0$ приводит к умножению обеих частей неравенства (11) на $|\gamma|^2$, что несущественно. Так как произвольный полином с рациональными комплексными коэффициентами отличается лишь множителем от соответствующего полинома с целыми комплексными коэффициентами, то можно считать, что неравенства (11) истинны для функции φ и любых отличных от констант полиномов $P(\omega)$ с рациональными комплексными коэффициентами. Пусть $\widetilde{P}(\omega)$ — произвольный отличный от константы голоморфный полином с коэффициентами из $\mathbb{C}$. Выписав неравенства вида (11) для рассматриваемой функции φ и полиномов $P_n(\omega)$ степени $N = \deg \widetilde{P}(\omega)$ с рациональными комплексными коэффициентами, равномерно на компактах из $\mathbb{C}$ аппроксимирующих $\widetilde{P}(\omega)$, и выполнив в них предельный переход при $n \to \infty$, придем к заключению, что неравенства вида (11) истинны для φ и любых полиномов $\widetilde{P}(\omega)$ с комплексными коэффициентами.

Пусть $\mathscr{F}_p(\omega)$ — полиномы Фабера, ω_{pq} — коэффициенты Грунского, порожденные функцией φ, однолистной в окрестности некоторой точки $\zeta = \infty$; $x_1, x_2, \ldots, x_N$ — произвольные одновременно не равные нулю комплексные числа. Беря в качестве $\widetilde{P}(\omega)$ полином $\sum\limits_{p=1}^{N} \frac{1}{p} x_p \mathscr{F}_p(\omega)$ и используя известную связь полиномов Фабера с коэффициентами Грунского [3]

$$\mathscr{F}_p \circ \varphi(\zeta) = \zeta^p + p \sum_{q=1}^{\infty} \omega_{pq} \zeta^{-q},$$

получим лорановское разложение

$$\widetilde{P} \circ \varphi(\zeta) = \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p} x_p \zeta^p + \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{N} \omega_{pq} x_p \zeta^{-q}.$$

Это позволяет записать неравенство (11) для $\varphi(\zeta)$ и $\widetilde{P}(\omega)$ в виде

$$\sum_{q=1}^{N} q \left| \sum_{p=1}^{N} \omega_{pq} x_p \right|^2 \leq \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p} |x_p|^2,$$

которое согласно [3] равносильно неравенству Грунского

$$\left| \sum_{p,q=1}^{N} \omega_{pq} x_p x_q \right| \leq \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p} |x_p|^2. \tag{12}$$

Известный критерий Грунского гарантирует однолистность φ в Δ^*, если неравенства (12) истинны для ее коэффициентов Грунского ω_{pq} при любых значениях комплексных параметров $x_1, x_2, \ldots, x_N$, $N = 1, \ldots, \infty$. Из доказанной таким образом однолистности в Δ^* функции φ следует ее принадлежность классу $\Sigma^{(2)}$, а применение леммы 1 завершает доказательство достаточности в теореме 3.

4. Применяя изложенный подход к классам $\Sigma_k^{(p)}$ и функциям

$$\Omega_1(w) = \sum_{q=1}^{N} \beta_q w^{pq/2}, \quad \beta_N \neq 0, \tag{13}$$

приходим к следующему результату.

Теорема 4. *Коэффициенты сходящегося в двулистной области* $\widehat{\Delta}^*\backslash\{\infty\}$ *разложения*

$$\Omega_1 \circ \widehat{\varphi} = \sum_{\nu=-\infty}^{N} \gamma_\nu \zeta^{p\nu/2}, \tag{14}$$

где Ω_1 *— произвольная функция вида* (13) *и* $\varphi \in \Sigma_k^{(p)}$, *удовлетворяют неравенству площадей*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu|\gamma_{-\nu}|^2 \le k^2 \sum_{\nu=1}^{N} \nu|\gamma_\nu|^2. \tag{15}$$

Равенство в нем имеет место в том и только в том случае, когда граничная функция $\Omega_1 \circ \widehat{\varphi}|\partial\widehat{\Delta}$ *продолжима в* $\widehat{\Delta}$ *до гармонического* k*-квазиконформного отображения вида*

$$h(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{N} \gamma_\nu \zeta^{p\nu/2} + ke^{i\theta}\overline{\sum_{\nu=1}^{N} \gamma_\nu \zeta^{p\nu/2}},$$

где θ *— действительная константа.*

Аналогами теорем 2 и 3 для классов $\Sigma^{(p)}$ являются следующие утверждения.

Теорема 5. *Коэффициенты ряда* (14) *для композиции* $\Omega_1 \circ \widehat{\varphi}$, *где* $\varphi \in \Sigma^{(p)}$ *и* Ω_1 *имеет вид* (13), *связаны неравенствами*

$$\sum_{\nu=1}^{m} \nu|\gamma_{-\nu}|^2 \le \sum_{\nu=1}^{N} \nu|\gamma_\nu|^2 \tag{16}$$

при любом $m \ge 0$. *Если* $m \ge N$, *то неравенства* (16) *точны и их единственными экстремалями служат гидродинамически нормированные на бесконечности ветви функций*

$$\varphi_\alpha = \zeta\big(1 + e^{i\alpha}\zeta^{-p}\big)^{2/p}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Теорема 6. *Мероморфная* p*-кратно симметричная в области* Δ^* *функция* φ, *представимая в* $\Delta^* \cap \mathbb{C}$ *рядом вида* (2), *принадлежит классу* $\Sigma^{(p)}$, *если и только если для любой функции* Ω_1 *вида* (13) *с целыми комплексными коэффициентами* $\beta_q = m_q + in_q$, $q = 1, \ldots, N$, *при любом* $N \ge 1$ *коэффициенты ряда* (14), *представляющего композицию* $\Omega_1 \circ \widehat{\varphi}$ *в римановой области* $\widehat{\Delta}^*\backslash\{\infty\}$, *связаны неравенством* (16) *при* $m = N$.

Аналогом леммы 1 в рассматриваемом случае служит

Лемма 2. *Формула* $\varphi_1 = (\varphi(\zeta^{2/p}))^{p/2}$, *где* φ_1 *— гидродинамически нормированная на бесконечности ветвь, устанавливает биекцию между классами* $\Sigma^{(p)}$ *и* $\Sigma^{(2)}$.

Заметим, что возможен вариант, когда вместо функций вида (13) используются полиномы вида $Q(w) = \sum\limits_{q=1}^{N} \beta_q w^{pq}$, $\beta_N \ne 0$, а вместо леммы 2 — ее аналог, в котором биекция между классами $\Sigma^{(p)}$ и Σ устанавливается посредством формулы $\widetilde{\varphi} = \big(\varphi(\zeta^{1/p})\big)^p$, где $\varphi \in \Sigma^{(p)}$. Соответствующие аналоги теорем 4–6 формулируются в терминах коэффициентов лорановских разложений

$$Q \circ \varphi = \sum_{\nu=-\infty}^{N} b_\nu \zeta^{p\nu}, \quad \zeta \in \Delta^* \cap \mathbb{C}.$$

5. Для каждого из неравенств, входящих в счетные системы, описанные теоремами 3 и 6, существует конечный алгоритм, позволяющий выразить его через конечное число начальных коэффициентов разложений (1) либо (2). Для этого нужно с помощью формулы бинома Ньютона представить коэффициенты b_ν в виде полиномов от β_q и a_μ, а γ_ν — в виде полиномов β_q и c_μ. В итоге получаются две счетные системы точных коэффициентных неравенств, вполне характеризующих области коэффициентов $D_\infty\big(S^{(p)}\big)$ и $D_\infty\big(\Sigma^{(p)}\big)$ соответственно. В частности, при $p = 1$ системы неравенств, получаемых таким путем из теорем 3 и 6, дают точное аналитическое описание областей $D_\infty(S)$ и $D_\infty(\Sigma)$ в терминах тейлоровских коэффициентов функций класса S соответственно в терминах лорановских коэффициентов класса Σ, т. е. решают проблему, поставленную в [4, гл. 3]. Они дают лучшую сравнительно с другими критериями характеризацию областей коэффициентов $D_\infty(S)$ и $D_\infty(\Sigma)$, на желательность получения которой указывал Н. А. Лебедев. Явный вид экстремалей для неравенств Грунского в общем случае неизвестен, в то время как экстремали каждого из неравенств счетных систем указаны в теоремах 3 и 6. Следовательно, система всех неравенств вида (7) для $F \in S^{(p)}$ и произвольных Ω вида (3) не исчерпывает всех неравенств системы Грунского. Как показал М. Шиффер еще в 1948 г. (см. [3]), для любого ненулевого вектора $\vec{x} \in \mathbb{C}^\infty$ с нормой $\|\vec{x}\| = \sum\limits_{p=1}^{\infty} p^{-1}|x_p|^2 < \infty$ и для любого $\theta \in \mathbb{R}$ существует функция $F_{\vec{x},\theta}$ класса Σ, для коэффициентов Грунского которой выполняются равенства $\sum\limits_{p=1}^{\infty} \omega_{pq} x_p = e^{i\theta} q^{-1} \bar{x}_q$ для всех $q \in \mathbb{N}$ и на функциях $F_{\vec{x},\theta}$ реализуются равенства в соответствующих неравенствах Грунского общего вида

$$\left|\sum_{p,q=1}^{\infty} \omega_{pq} x_p x_q\right| \le \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} |x_p|^2.$$

Множество таких экстремалей $F_{\vec{x},\theta}$, очевидно, не исчерпывается функциями $z + e^{i\theta} z^{-1} \in \Sigma^{(2)}$, которым в классах $S^{(p)}$ соответствуют p-лучевые функции.

Критерий Грунского не оптимален в том смысле, что в нем содержится несчетное множество «лишних» неравенств. Полученные здесь критерии можно трактовать как аналоги теорем об очистке применительно к системам неравенств типа (9), поскольку в них устранены основные массивы «лишних» неравенств. Впрочем, и в самой системе неравенств Грунского тоже можно выделить эквивалентную ей счетную подсистему, предварительно преобразовав входящие в нее неравенства к виду

$$\left|\sum_{m,n=1}^{\infty} \sqrt{mn}\,\omega_{mn} x_m x_n\right| \le 1,$$

где $x = (x_n)$ — точки гильбертова пространства l^2 суммируемых с квадратом последовательностей. Далее, используя сепарабельность l^2, можно ограничиться подсистемой тех преобразованных неравенств, которые отвечают некоторому счетному всюду плотному подмножеству точек x на единичной сфере $\|x\|_{l^2} = 1$.

Существуют ли конечные подсистемы счетных систем, описанных в теоремах 3 и 6, которые вполне характеризуют области $D_\infty\big(S^{(p)}\big)$ и $D_\infty\big(\Sigma^{(p)}\big)$, а значит, все n-тела коэффициентов

$$D_n\big(S^{(p)}\big) = \big\{\vec{a}_F \in \mathbb{C}^n : \ \vec{a}_F = (a_1, a_2, \ldots, a_n), F \in S^{(p)}\big\},$$
$$D_n\big(\Sigma^{(p)}\big) = \big\{\vec{c}_\varphi \in \mathbb{C}^n : \ \vec{c}_\varphi = (c_1, c_2, \ldots, c_n), \quad \varphi \in \Sigma^{(p)}\big\}?$$

Если бы ответ был утвердительным, то это означало бы, в частности, что граница тела $D_2(S)$ состоит из конечного числа частей — гиперповерхностей, являющихся следами в $\mathbb{C}^2$ многообразий в $\mathbb{C}^\infty$, уравнения которых получаются путем замены в одном или нескольких характеристических неравенствах знака неравенства знаком равенства. Сравнение с известными параметрическими уравнениями частей границы компакта $D_2(S)$ в $\mathbb{C}^2$, явно выписанными в [6], показывает, что, хотя $D_2(S)$ и представляет собой полиэдр в $\mathbb{C}^2$ с нелинейными гранями, уравнения этих граней содержат трансцендентные функции и отличны от описанных выше. Итак, число характеристических для $D_\infty(S^{(p)})$ и $D_\infty(\Sigma^{(p)})$ неравенств рассматриваемого в теоремах 3 и 6 вида не может быть конечным. Как описанные выше, так и другие аналогичные счетные характеристические для классов $D_\infty(S^{(p)})$ и $D_\infty(\Sigma^{(p)})$ подсистемы систем неравенств Грунского являются, по-видимому, переопределенными.

В заключение дадим коэффициентный критерий принадлежности точки $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ n-телу $D_n(S^{(p)})$, $n > 1$, который при $p = 1$ дает решение проблемы коэффициентов для класса S в постановке Л. Бибербаха (1916 г.).

Теорема 7. *Точка $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ в том и только в том случае принадлежит компакту $D_n(S^{(p)})$, $n > 1$, когда существует такая последовательность $\{a_\nu\}_{\nu=n+1}^\infty$, что числа $a_1, a_2, \dots$ удовлетворяют всем неравенствам счетной системы из теоремы* 3.

Аналогичный критерий для $D_n(\Sigma^{(p)})$, $n > 1$, следует из теоремы 6.

В случае $p = 1$ основные результаты данной работы получены в докторской диссертации автора [7] и изложены также в [5], где можно найти дополнительные комментарии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *De Branges L.* A proof of the Bieberbach conjecture // Acta Math. 1985. V. 154. P. 137–152.
2. *Александров И. А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976.
3. *Лебедев Н. А.* Принцип площадей в теории однолистных функций. М.: Наука, 1975.
4. *Милин И. М.* Однолистные функции и ортонормированные системы. М.: Наука, 1971.
5. *Шеретов В. Г.* Аналитические функции с квазиконформным продолжением. Тверь: ТвГУ, 1991.
6. *Schaeffer A. C., Spencer D. C.* Coefficient regions for schlicht functions. New York: Amer. Math. Soc., 1950.
7. *Шеретов В. Г.* Квазиконформные отображения, экстремальные относительно своих граничных значений. Дис. … д-ра физ.-мат. наук. Краснодар: КубГУ, 1988.

Статья поступила 17 июля 2001 г.

Шеретов Владимир Георгиевич
Тверской гос. университет, кафедра математического анализа,
пер. Садовый, 35, Тверь 170002
Vladimir.Sheretov@tversu.ru