Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2002. Том 43, № 2

УДК 517.95

ОБ ОДНОМ ЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ СМЕШАННОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

А. В. Чуешев

Аннотация: Рассматривается вопрос о разрешимости краевой задачи для дифференциального уравнения вида $Au - Bu + Su = f(t,x)$, $t \in (0,1)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, где $A = A(t, D_t)$ — обыкновенный дифференциальный оператор порядка $l \geq 2$ по переменной t, а оператор $B = B(x, D_x)$ порядка 2ν по переменным $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ является равномерно эллиптическим в $\overline{\Omega}$, $S = S(t, x, D_t, D_x)$ — дифференциальный оператор порядка меньшего, чем порядки A и B. Особенностью задачи является тот факт, что перед старшей производной в операторе A коэффициент может менять знак на интервале (0,1), т. е. данное уравнение является уравнением смешанного типа. Библиогр. 13.

Введение

Изучается уравнение вида

$$Lu = Au - Bu + Su = f(t,x) \tag{1}$$

в области $Q = (0,1) \times \Omega$. Здесь A — обыкновенный дифференциальный оператор порядка $l \geq 2$ по переменной t, B — равномерно эллиптический оператор порядка 2ν в $\overline{\Omega}$, а S — дифференциальный оператор меньшего порядка, подчиненный в некотором смысле операторам A и B. Коэффициент перед старшей производной в операторе A может обращаться в нуль на множестве ненулевой меры и менять знак. Подобные уравнения изучались в работах В. Н. Врагова [1], И. Е. Егорова [2] и др. Однако исследовались только некоторые модельные краевые задачи, а точнее аналоги задачи Дирихле. Например, В. Н. Врагов изучал для уравнения четного порядка ($l = 2\nu, S = 0$) краевые условия типа Дирихле на боковой поверхности цилиндра и краевые условия

$$\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \dots = \frac{\partial^{\nu-1} u}{\partial t^{\nu-1}}\bigg|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial^{\nu} u}{\partial t^{\nu}}\bigg|_{\overline{P}_0^+} = 0, \quad \frac{\partial^{\nu} u}{\partial t^{\nu}}\bigg|_{\overline{P}_1^-} = 0,$$

$$u\bigg|_{t=1} = \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=1} = \dots = \frac{\partial^{\nu-1} u}{\partial^{\nu-1} t}\bigg|_{t=1} = 0.$$

Здесь $P_1^- = \{(1,x) : (-1)^\nu k(1,x) > 0\}; P_0^+ = \{(0,x) : (-1)^\nu k(0,x) < 0\}$ и $k(t,x)$ — коэффициент перед старшей производной оператора A. И. Е. Егоров исследовал подобные краевые задачи как для уравнения четного порядка ($l = 2s$), так и для уравнений нечетного порядка ($l = 2s + 1$).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–01–00796) и Министерства образования РФ (код проекта E00–1.0–79).

В данной работе мы рассматриваем довольно общий класс граничных условий при $t=0$, $t=1$ и на боковой поверхности цилиндра. Должно быть выполнено лишь некоторое условие типа диссипативности оператора A. В качестве метода мы используем некоторые обобщения абстрактных теорем П. Гривара [3–5] и Ю. А. Дубинского [6]. В отличие от этих авторов нам требуются более «слабые» предположения о свойствах резольвенты и более широкие шкалы негативных пространств. Заметим, что используемые П. Griваром подходы были разработаны М. Г. Крейном для случая ограниченных операторов.

§ 1. Определения и предположения

Положим

$$Au = k(t)u^{(l)} + a(t)u^{(l-1)} + \sum_{j=0}^{l-2} a_j(t)u^{(j)},$$

где $u^{(j)} = \frac{\partial^j u}{\partial t^j} = D_t^j u$, $j = 0,1,\dots,l$; $k_t'(t)$, $a(t) \in \mathbf{C}[0,1]$, $a_j(t) \in \mathbf{L}_\infty(0,1)$, $j=0,1,\dots,l-2$, и функции $k(t)$, $a(t)$ вещественны, причем $(-1)^{[\frac{l+1}{2}]}\left(a - \frac{1}{2}k_t'\right) \geq \delta_0 > 0$ для всех $t \in [0,1]$, где δ_0 — некоторая постоянная, $[\cdot]$ — целая часть.

Условие вида $a - \frac{1}{2}k_t' \geq \delta_0 > 0$ для всех $t \in [0,1]$, где δ_0 — некоторая постоянная, характеризует поведение линейно независимых решений уравнения $k(t)y' + a(t)y = 0$. В частности, оно гарантирует существование решения из пространства $\mathbf{L}_2(0,1)$ уравнения $k(t)y' + a(t)y = f(t)$, $f \in \mathbf{L}_2(0,1)$.

Кроме того, это условие естественным образом возникает при получении априорных оценок [2] на решение таких уравнений.

Считаем для простоты, что $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ и оператор $B = B(x, D_x)$ порядка 2ν является равномерно эллиптическим в $\overline{\Omega}$ [7] по переменным $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$$B(x, D_x) = \sum_{|\alpha| \leq 2\nu} b_\alpha(x) D_x^\alpha.$$

При этом $D_x^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n}$, $D_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$, $k = 1,2,\dots,n$; $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$; $b_\alpha(x) \in \mathbb{C}^\infty(\overline{\Omega})$ $(|\alpha| \leq 2\nu)$. Оператор $S = S(t, x, D_t, D_x)$ имеет вид

$$S = \sum_{k=0}^{l-2} \sum_{|\alpha| < \frac{2\nu(l-1-k)}{d}} a_{k,\alpha}(t,x) D_t^k D_x^\alpha,$$

где $d = 2[\frac{l}{2}]$, $a_{k,\alpha}(t,x) \in \mathbf{L}_\infty(0,1; \mathbf{C}^1(\overline{\Omega}))$.

Для уравнения (1) изучим следующую краевую задачу. Найти решение уравнения (1) в области Q такое, что

$$\begin{aligned} l_{i1}u &= u^{(p_i)}(1,x) - \sum_{\mu=0}^{p_i-1} \alpha_{i\mu}(x) u^{(\mu)}(1,x) = 0, \quad x \in \Omega,\ i = 0,1,\dots,s_1, \\ l_{j0}u &= u^{(q_j)}(0,x) - \sum_{\mu=0}^{q_j-1} \beta_{j\mu}(x) u^{(\mu)}(0,x) = 0, \quad x \in \Omega,\ j = 0,1,\dots,s_1', \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$B_k(x, D_x)u = \sum_{|\alpha| \leq m_k} b_{k,\alpha}(x) D_x^\alpha u = 0, \quad t \in (0,1),\ x \in \partial\Omega,\ k = 1,2,\dots,\nu. \tag{1.2}$$

Здесь $\alpha_{p_i,\mu}(x), \beta_{q_j,\mu}(x) \in \mathbf{L}_\infty(\Omega)$ — произвольные функции; $l-1 \geq p_{s_1} > \dots > p_0 \geq 0$, $l-1 \geq q_{s_1'} > \dots > q_0 \geq 0$; $s_1 = \left[\frac{l-1}{2}\right] - 1$ при $k(1) \geq 0$ (при $s_1 < 0$ краевых условий нет), $s_1 = \left[\frac{l-1}{2}\right]$ при $k(1) < 0$; $s_1' = \left[\frac{l}{2}\right] - 1$ при $k(0) \leq 0$, $s_1' = \left[\frac{l}{2}\right]$ при $k(0) > 0$; $p_{s_1} < l-1$, если $k(1) = 0$, и $q_{s_1'} < l-1$, если $k(0) = 0$; $b_{k,\alpha}(x) \in \mathbf{C}^\infty(\partial\Omega)$; $0 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_\nu \leq 2\nu - 1$; набор граничных операторов $\{B_k(x, D_x)\}_{k=1}^{\nu}$ является нормальной системой на $\partial\Omega$, удовлетворяющей условию дополнительности [7, 8].

Ниже мы покажем, как требования гладкости на коэффициенты операторов B, S, $B_k(x, D_x)$ и на $\partial\Omega$ могут быть ослаблены. В силу линейности уравнения рассмотрим только однородные краевые условия (1.1), (1.2). Соответствующие теоремы о продолжении краевых условий внутрь области Q приведены, например, в работе [3]. Определения функциональных пространств, используемых в работе, стандартные и могут быть найдены в [4, 7–9] Положим $P_l = \left\{u(t,x) \in \mathbf{W}_2^{l-1}(0,1;\mathbf{L}_2(\Omega))\right\}$ при $k(0) = k(1) = 0$; $P_l = \left\{u(t,x) \in \mathbf{W}_2^{l-1}(0,1;\mathbf{L}_2(\Omega))\colon \operatorname{supp} u \subset [0, 2\delta']\right.$ для п. в. $\left. x \in \Omega\right\}$ при $k(0) = 0$, $k(1) \neq 0$; $P_l = \left\{u(t,x) \in \mathbf{W}_2^{l-1}(0,1;\mathbf{L}_2(\Omega))\colon \operatorname{supp} u \subset [1-2\delta', 1]\right.$ для п. в. $\left. x \in \Omega\right\}$ при $k(0) \neq 0$, $k(1) = 0$, где $\delta' \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ — произвольное число.

Обозначим $D(M_0, \beta) = \left\{\lambda_1 \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda_1 \geq M_0 > 0, |\arg\lambda_1| \leq \frac{\pi}{2} - \beta\right\}$, где $M_0 > 0, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ — некоторые постоянные; $D\prime(M,\gamma) = \{\lambda_1 \in \mathbb{C} : |\lambda_1| \geq M > 0,\ \gamma < \arg\lambda_1 < 2\pi - \gamma\}$, здесь γ: $0 \leq \gamma < \frac{\pi}{2} - \beta$, $M > 0$ — некоторая постоянная; $\widetilde{D}(M_0, M_1) = \{\lambda_1 \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda_1 \geq M_0 \geq 1,\ M_1|\operatorname{Im}\lambda_1| \leq [\operatorname{Re}\lambda_1]^{\frac{l-1}{l}}\}$, где $M_0 \geq 1$, $M_1 > 0$ — некоторые постоянные, l — порядок оператора A; $(u,v) = \int\limits_0^1 u\overline{v}\,dt$; $\|u\| = \sqrt{(u,u)} = \|u\|_{\mathbf{L}_2(0,1)}$; $\|u\|_j = \|u\|_{\mathbf{W}_2^j(0,1)}$, $j = 1, 2, \dots$; I — тождественный оператор; $\|\cdot\|_E$ — норма в пространстве E; $\|\cdot\|_{E\to E}$ — норма оператора, действующего из E в E; ρ_A, ρ_B — резольвентные множества операторов A, B.

Под пространством $\widetilde{\mathbf{W}}^l_{2,\{l_{i1}, l_{j0}\}}(0,1;E)$ (E — гильбертово пространство) понимаем совокупность E-значных функций u, удовлетворяющих (1.1) и имеющих обобщенные производные по переменной t до порядка $l-1$ включительно, для которых существует обобщенная производная $\frac{\partial}{\partial t}(ku^{(l-1)}) \in \mathbf{L}_2(0,1;E)$. В качестве области определения D_A оператора A возьмем $\widetilde{\mathbf{W}}^l_{2,\{l_{i1}, l_{j0}\}}(0,1;E)$. Область определения D_B оператора B состоит из всех $u \in \mathbf{L}_2\left(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu}(\Omega)\right)$, удовлетворяющих (1.2). Пространство $\dot{\mathbf{W}}_2^{2\nu}(\Omega)$ образовано замыканием множества $\dot{\mathbf{C}}^\infty(\Omega)$ бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций по норме $\mathbf{W}_2^{2\nu}(\Omega)$.

Пусть P — неограниченный оператор, определенный в данном банаховом пространстве E, и $\varphi \in [0, \pi)$. Будем говорить, что P *удовлетворяет условию* $H(\varphi)$, если

(1) $\rho_P \supset \Sigma_P = \{z \in \mathbb{C} : -\pi + \varphi \leq \arg z \leq \pi - \varphi\}$;

(2) существует постоянная C_P такая, что $\|(P - zI)^{-1}\|_{E\to E} \leq \frac{C_P}{1+|z|}$ для $z \in \Sigma_P$.

§ 2. Вспомогательные результаты

Пусть E — гильбертово пространство, а A_1, B_1 — замкнутые операторы с плотными областями определения в E, причем B_1 удовлетворяет условию $H(\theta_{B_1})$ для некоторого $\theta_{B_1} \in [0, \pi)$ и $\rho_{A_1} \neq \varnothing$. Предположим также, что операторы $(A_1 - zI)^{-1}$ и $(B_1 - yI)^{-1}$ коммутируют между собой для любых $z \in \rho_{A_1}$, $y \in \rho_{B_1}$. Для целого $m \geq 0$ положим [4, с. 172] $W^{m,E} = \left\{u \in E : B_1^k u \in E,\ k = \right.$

$0, 1, \ldots, m\}$. Это банахово пространство с нормой

$$u \mapsto \sum_{k=0}^{m} \|B_1^k u\|_E.$$

Обозначим через $B_1^* : E^* \to E^*$ оператор, сопряженный к B_1. Тогда B_1^* является линейным замкнутым оператором с плотной областью определения $D_{B_1^*}$. Определим $W^{-1,E}$ как пространство, двойственное к $D_{B_1^*}$. Норма в нем определяется так: $u \mapsto \sup\limits_{v \in D_{B_1^*}} |\langle u, v\rangle| / \|v\|_{D_{B_1^*}}$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — отношение двойственности между E и E^*. По итерации можно определить $W^{n,E}$ для всех целых $n < 0$. Для действительных s любого знака и $1 < q < \infty$ положим $D_{B_1}(s, q) = (W^{m,E}, W^{-m,E})_{\Theta,q}$, где m — любое целое большее $|s|$ и Θ такое, что $s = m(1 - 2\Theta)$.

Замечание 2.1. Можно установить [4, с. 173–175], что это определение корректно и при действительных s любого знака $D_{B_1}(s, q) = (W^{m,E}, W^{n,E})_{\Theta,q}$, $1 < q < \infty$, для m, n целых и Θ таких, что $m > s > n$, $s = m(1 - \Theta) + n\Theta$. Более того, $(D_{B_1}(s_1, q), D_{B_1}(s_2, q))_{\Theta,q} = D_{B_1}(s, q)$ для действительных s_1, s_2 любого знака, причем $s_1 > s > s_2$, где Θ такое, что $s = s_1(1 - \Theta) + s_2\Theta$. Пространство $W^{n,E}$ при любом целом $n < 0$ можно определить и как пополнение пространства E по норме $u \mapsto \|B_1^n u\|_E$; из теоремы о двойственности [8, с. 77] выводим, что норма в $D_{B_1}(s, q)$ при $s < 0$ эквивалентна норме

$$u \mapsto \sup_{v \in D_{B_1^*}(-s,q)} \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|v\|_{D_{B_1^*}(-s,q)}}.$$

Заметим также, что оператор B_1 осуществляет изоморфизм пространств $W^{m,E}$ и $D_{B_1}(s_1, q)$ на $W^{m-1,E}$ и $D_{B_1}(s_1 - 1, q)$ соответственно.

Пусть $1 < q < \infty$, а s — произвольное действительное число. При $s > 0$ положим $\widetilde{D} = \{u \in D_{A_1} \cap D_{B_1}(s, q) : A_1 u \in D_{B_1}(s, q)\}$, и при $s < 0$ пусть $\widetilde{D}$ — пополнение D_{A_1} по норме $\|u\|_{\widetilde{D}} = \|u\|_{D_{B_1}(s,q)} + \|A_1 u\|_{D_{B_1}(s,q)}$. Из этого определения следует, что при $s < 0$ имеем $\widetilde{D} = \{u \in D_{B_1}(s, q) : \exists \{u_n\} \subset D_{A_1},\ \|u_n - u\|_{D_{B_1}(s,q)} \to 0,\ n \to \infty, \|A_1 u_n - f\|_{D_{B_1}(s,q)} \to 0,\ n \to \infty,\ f \in D_{B_1}(s, q)\}$.

Определим оператор $\widetilde{A} : D_{B_1}(s, q) \to D_{B_1}(s, q)$, полагая, что $D_{\widetilde{A}} = \widetilde{D}$ и

$$\widetilde{A}u = \begin{cases} A_1 u & \text{при} \quad s > 0, \\ \lim\limits_{n\to\infty} A_1 u_n & \text{при} \quad s < 0. \end{cases}$$

Для простоты считаем, что $0 \in \rho_{B_1}$, иначе рассмотрим оператор $B_1 - y_0 I$ при $y_0 \in \rho_{B_1}$.

Лемма 2.1. *Для любого фиксированного $s \in \mathbb{R}$ и $1 < q < \infty$ оператор*

$$\widetilde{A} : D_{B_1}(s, q) \to D_{B_1}(s, q)$$

замкнут, плотно определен и резольвенты операторов $\widetilde{A}$ и B_1 коммутируют между собой. Если оператор A_1 удовлетворяет условию $H(\theta_{A_1})$, то и оператор $\widetilde{A}$ удовлетворяет этому условию.

Доказательство. Изучим оператор $(\widetilde{A} - zI)^{-1}$, $z \in \rho_{A_1}$. Пусть $s < 0$. Так как операторы $(A_1 - zI)^{-1}$ и $(B_1 - yI)^{-1}$ коммутируют между собой для любых $z \in \rho_{A_1}$, $y \in \rho_{B_1}$, причем $0 \in \rho_{B_1}$, то

$$(A_1 - zI)^{-1} B_1^{-1} u = B_1^{-1} (A_1 - zI)^{-1} u$$

для любых $u \in E$, $z \in \rho_{A_1}$. Отсюда

$$(A_1 - zI)^{-1} B_1{}^{-m} u = B_1^{-m}(A_1 - zI)^{-1} u \tag{2.1}$$

для любых $u \in E$, $z \in \rho_{A_1}$ и любого целого $m > 0$. Следовательно,

$$(A_1 - zI)^{-1} v = B_1^{-m}(A_1 - zI)^{-1} B_1^m v$$

для любого $v \in W^{m,E}$. Значит, для любого $v \in W^{m,E}$ имеем $(A_1 - zI)^{-1} v \in W^{m,E}$, причем $v \in W^{p,E}$ и $(A_1 - zI)^{-1} v = B_1^{-p}(A_1 - zI)^{-1} B_1^p v$ для любого $p = 1, 2, \dots, m$. Более того, для любого целого $m > 0$ и $z \in \rho_{A_1}$

$$\begin{aligned}
&\|(A_1 - zI)^{-1} v\|_{W^{m,E}} \\
&\quad = \|(A_1 - zI)^{-1} v\|_E + \|B_1(A_1 - zI)^{-1} v\|_E + \dots + \|B_1^m (A_1 - zI)^{-1} v\|_E \\
&\quad = \|(A_1 - zI)^{-1} v\|_E + \|(A_1 - zI)^{-1} B_1 v\|_E + \dots + \|(A_1 - zI)^{-1} B_1^m v\|_E \\
&\qquad \le \|(A_1 - zI)^{-1}\|_{E \to E} \sum_{k=0}^{m} \|B^k v\|_E = \|(A_1 - zI)^{-1}\|_{E \to E} \|v\|_{W^{m,E}}.
\end{aligned}$$

Итак, $(A_1 - zI)^{-1}$ для любого целого $m > 0$ и $z \in \rho_{A_1}$ линеен и непрерывен как оператор из $W^{m,E}$ в $W^{m,E}$. Для любых $u \in E$, $z \in \rho_{A_1}$ и любого целого $m > 0$, учитывая (2.1), имеем

$$\begin{aligned}
\|(A_1 - zI)^{-1} u\|_{W^{-m,E}} &= \|B_1^{-m}(A_1 - zI)^{-1} u\|_E = \|(A_1 - zI)^{-1} B_1^{-m} u\|_E \\
&\le \|(A_1 - zI)^{-1}\|_{E \to E} \|B_1^{-m} u\|_E = \|(A_1 - zI)^{-1}\|_{E \to E} \|u\|_{W^{-m,E}}.
\end{aligned}$$

Это неравенство гарантирует, что оператор $(A_1 - zI)^{-1}$ допускает продолжение до линейного ограниченного оператора $\widetilde{A}(z)$ из $W^{-m,E}$ в $W^{-m,E}$, совпадающего на элементах из E с $(A_1 - zI)^{-1}$. При этом, используя интерполяционное свойство (g) [7, с. 24], для действительного s любого знака, $1 < q < \infty$, $z \in \rho_{A_1}$, любого целого m, большего $|s|$, и Θ такого, что $s = m(1 - 2\Theta)$, имеем

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{A}(z)\|_{D_{B_1}(s,q) \to D_{B_1}(s,q)} &\le C_{\Theta,q} \|(A_1 - zI)^{-1}\|^{1-\Theta}_{W^{m,E} \to W^{m,E}} \|\widetilde{A}(z)\|^{\Theta}_{W^{-m,E} \to W^{-m,E}} \\
&\le C_{\Theta,q} \|(A_1 - zI)^{-1}\|^{1-\Theta}_{E \to E} \|(A_1 - zI)^{-1}\|^{\Theta}_{E \to E} = C_{\Theta,q} \|(A_1 - zI)^{-1}\|_{E \to E}.
\end{aligned}$$

Итак, для любых $s \in \mathbb{R}$, $1 < q < \infty$ и $z \in \rho_{A_1}$ оператор $\widetilde{A}(z)$ линеен и непрерывен как оператор из $D_{B_1}(s,q)$ в $D_{B_1}(s,q)$. Предполагая, что оператор A_1 удовлетворяет условию $H(\theta_{A_1})$, для $z \in \Sigma_{A_1}$ имеем

$$\|\widetilde{A}(z)\|_{D_{B_1}(s,q) \to D_{B_1}(s,q)} \le C_{\Theta,q} \|(A_1 - zI)^{-1}\|_{E \to E} \le \frac{C_{A_1,\Theta,q}}{1 + |z|}. \tag{2.2}$$

Из равенств $\widetilde{A}(z) u = (A_1 - zI)^{-1} u$, $A_1 (A_1 - zI)^{-1} u = u + z(A_1 - zI)^{-1} u$, где $u \in E$, и плотности E в $D_{B_1}(s,q)$ при $s < 0$ [7, с. 40], вытекает, что $\widetilde{A}(z) u \in \widetilde{D}$, $(\widetilde{A} - zI)\widetilde{A}(z) u = u$ для $u \in D_{B_1}(s,q)$. Используя определение класса $\widetilde{D}$, получим также, что $\widetilde{A}(z)(\widetilde{A} - zI) u = u$ для $u \in \widetilde{D}$, т. е. $\widetilde{A}(z) = (\widetilde{A} - zI)^{-1}$ и, следовательно, $\Sigma_{A_1} \subset \rho_{A_1} \subset \rho_{\widetilde{A}}$. Более того, из определения $\widetilde{A}$ следует, что резольвенты операторов $\widetilde{A}$ и B_1 коммутируют между собой, а из (2.2) — что оператор $\widetilde{A}$ удовлетворяет условию $H(\theta_{A_1})$. Для любого $f \in D_{B_1}(s,q)$ стандартным образом проверяется, что $-z(\widetilde{A} - zI)^{-1} f \to f$ при $z \to \infty$ в норме пространства $D_{B_1}(s,q)$ (см., например, в [7, п. 1.14.1]), т. е. оператор $\widetilde{A}$ плотно определен. Замкнутость оператора $\widetilde{A}$ вытекает при $s > 0$ из того, что A_1 — замкнутый оператор, а при

$s < 0$ — непосредственно из определения: если $\{u_n\} \subset D_{A_1}$, $u_n \to u$ при $n \to \infty$ в $D_{B_1}(s,q), A_1 u_n \to f$ при $n \to \infty$ в $D_{B_1}(s,q)$ для некоторого $f \in D_{B_1}(s,q)$, то $u \in \widetilde{D}$, $\widetilde{A}u = \lim\limits_{n\to\infty} A_1 u_n = f$. Лемма 2.1 доказана.

Далее операторы $\widetilde{A}$ и A_1 будем обозначать через A_1. Введем множество $W_{A_1,B_1}(s,q) = \{u \in \widetilde{D} : u \in D_{B_1}(s+1,q),\ \|u\|_{W_{A_1,B_1}(s,q)} = \|u\|_{D_{B_1}(s,q)} + \|A_1 u\|_{D_{B_1}(s,q)} + \|B_1 u\|_{D_{B_1}(s,q)} < \infty\}$.

Теорема 2.1. *Пусть A_1 и B_1 — замкнутые операторы с плотными областями определения в рефлексивном банаховом пространстве E, удовлетворяющие условиям:*

(1) *операторы $(A_1 - zI)^{-1}$ и $(B_1 - yI)^{-1}$ коммутируют между собой для любых $z \in \rho_{A_1}$ и $y \in \rho_{B_1}$;*

(2) *существуют постоянные θ_{A_1} и $\theta_{B_1} \geq 0$ такие, что A_1 удовлетворяет $H(\theta_{A_1})$, а $-B_1$ — $H(\theta_{B_1})$, причем $\theta_{A_1} + \theta_{B_1} < \pi$.*

Тогда для любой $f \in D_{B_1}(s,q)$ с любыми s и $q \in (1,\infty)$ существует единственное решение u уравнения

$$A_1 u - B_1 u - \lambda u = f, \quad \lambda \geq 0, \tag{2.3}$$

из $W_{A_1,B_1}(s,q)$. Более того, существуют постоянные $N_1, N_2 > 0$ такие, что

$$\|u\|_{D_{B_1}(s,q)} \leq \frac{N_1}{1+\lambda}\|f\|_{D_{B_1}(s,q)}, \quad \|u\|_{W_{A_1,B_1}(s,q)} \leq N_2\|f\|_{D_{B_1}(s,q)} \tag{2.4}$$

для всех $\lambda \geq 0$.

Доказательство. При $0 < s < 1$ утверждение вытекает из теоремы 3.11, леммы 3.5 (оценки) и леммы 3.6 (единственность) из работы [5]. Пусть $f \in D_{B_1}(s,q)$, где s — произвольное нецелое число, $1 < q < \infty$. Имеем $s = [s] + \{s\}$, где $[s]$ — целая часть s, $\{s\}$ — дробная часть s, причем $0 < \{s\} < 1$.

Рассмотрим уравнение

$$(A_1 - B_1 - \lambda I)v = B_1^{[s]} f, \quad \lambda \geq 0. \tag{2.5}$$

Так как $B_1^{[s]} f \in D_{B_1}(\{s\},q)$, уравнение (2.5) имеет единственное решение $v \in W_{A_1,B_1}(\{s\},q)$ и существуют постоянные $N_1, N_2 > 0$ такие, что

$$\|v\|_{D_{B_1}(\{s\},q)} \leq \frac{N_1}{1+\lambda}\big\|B_1^{[s]} f\big\|_{D_{B_1}(\{s\},q)}, \quad \|v\|_{W_{A_1,B_1}(\{s\},q)} \leq N_2\big\|B_1^{[s]} f\big\|_{D_{B_1}(\{s\},q)}.$$

Из леммы 2.1 при $z \in \rho_{A_1}$ имеем $(A_1 - zI)^{-1} B_1^{-1} v_1 = B_1^{-1}(A_1 - zI)^{-1} v_1$ для любого $v_1 \in D_{B_1}(\{s\},q)$, а следовательно, для любого $v_1 \in W_{A_1,B_1}(\{s\},q)$. Так как $B_1^{-1} B_1 (A_1 - zI)^{-1} v_1 = (A_1 - zI)^{-1} v_1 = (A_1 - zI)^{-1} B_1^{-1} B_1 v_1 = B_1^{-1}(A_1 - zI)^{-1} B_1 v_1$, то $B_1(A_1 - zI)^{-1} v_1 = (A_1 - zI)^{-1} B_1 v_1$ для любого $v_1 \in W_{A_1,B_1}(\{s\},q)$, $z \in \rho_{A_1}$. Отсюда $B_1^{-[s]}(A_1 - zI)^{-1} v_1 = (A_1 - zI)^{-1} B_1^{-[s]} v_1$, где $v_1 \in W_{A_1,B_1}(\{s\},q)$. По построению множества $W_{A_1,B_1}(\{s\},q)$

$$v = (A_1 - zI)^{-1} v_1 \in W_{A_1,B_1}(\{s\},q).$$

Следовательно,

$$\begin{gathered} B_1^{-[s]} v = (A_1 - zI)^{-1} B_1^{-[s]} (A_1 - zI) v, \\ (A_1 - zI) B_1^{-[s]} v = B_1^{-[s]} (A_1 - zI) v, \quad A_1 B_1^{-[s]} v = B_1^{-[s]} A_1 v \end{gathered} \tag{2.6}$$

при любой функции $v \in W_{A_1,B_1}(\{s\},q)$.

Подействуем на обе части уравнения (2.5) оператором $B_1^{-[s]}$. Согласно (2.6) $(A_1 - B_1 - \lambda I)B_1^{-[s]}v = f$ и $u = B_1^{-[s]}v \in W_{A_1,B_1}(s,q)$ является единственным решением уравнения (2.3), причем (2.4) выполняется для всех нецелых s, в частности, для $-1 < s < 0$. Таким образом, обратный к $A_1 - B_1 - \lambda I$ оператор, действующий из $D_{B_1}(s,q)$ в $W_{A_1,B_1}(s,q)$, будет линеен и непрерывен для $s \in (0,1)$ и $s \in (-1,0)$, а по замечанию 2.1 — и для $s = 0$, причем справедливы оценки (2.4). Аналогично можно доказать это утверждение для любых целых s. Таким образом, уравнение (2.3) имеет единственное решение из $W_{A_1,B_1}(s,q)$, и при этом для любых действительных s выполняются оценки (2.4). Теорема 2.1 доказана.

Пусть B_1 — самосопряженный положительный оператор, действующий в гильбертовом пространстве E, причем $(-\infty,0] \subset \rho_{B_1}$. Заметим [10], что B_1 допускает представление в виде $B_1 = \int\limits_0^\infty \lambda\, dE_\lambda$, где $\{E_\lambda\}$ — спектральное семейство, однозначно определяемое оператором B_1; операторы E_λ перестановочны с B_1, а также с любым ограниченным оператором, перестановочным с B_1. Пространство $D_{B_1}(s,2)$ совпадает при $s > 0$ с $D_{B_1^s}$, при $s = 0$ с E, а при $s < 0$ с пополнением E по норме $\|B_1^s u\|_E$ (см. [7, п. 1.18.10]). Доказательство следующей теоремы близко к доказательству теоремы 3.1 Ю. А. Дубинского [6].

Теорема 2.2. *Пусть A_1, B_1 — замкнутые операторы с плотными областями определения в гильбертовом пространстве E, удовлетворяющие условиям:*

(a) *B_1 — самосопряженный положительный оператор, и его резольвентное множество включает $(-\infty,0]$;*

(b) *операторы $(A_1 - zI)^{-1}$ и $(B_1 - yI)^{-1}$ коммутируют между собой для любых $z \in \rho_{A_1}$ и $y \in \rho_{B_1}$;*

(c) *$[0,\infty) \subset \rho_{A_1}$, и справедлива оценка $\|(A_1 - \lambda I)^{-1}\|_{E\to E} \le C_1(1+\lambda)^{-\beta}$, где C_1 — постоянная, а $0 < \beta \le 1$, $\lambda \ge 0$.*

Тогда для любого $s \in \mathbb{R}$ и любой $f \in D_{B_1}(s,2)$ существует единственное решение u уравнения

$$A_1 u - B_1 u - \lambda_1 u = f, \quad \lambda_1 \ge 0, \tag{2.7}$$

такое, что $u \in D_{B_1}(\beta + s, 2)$, $A_1 u \in D_{B_1}(\beta - 1 + s, 2)$ (рассматриваем A_1 как неограниченный оператор из $D_{B_1}(\beta - 1 + s, 2)$ в $D_{B_1}(\beta - 1 + s, 2)$. Предположим дополнительно, что $\Lambda : E \to E$ — самосопряженный положительно определенный оператор такой, что операторы $(\Lambda - zI)^{-1}$ и $(B_1 - yI)^{-1}$ коммутируют между собой для любых $z \in \rho_\Lambda$, $y \in \rho_{B_1}$, $D_{A_1} \subset D_\Lambda$ и существуют постоянные C_2, $\gamma \le \beta$ такие, что $\|\Lambda(A_1 - \lambda I)^{-1}\|_{E\to E} \le C_2(1+\lambda)^\gamma$, $\lambda \ge 0$. Рассмотрим операторы A_1, Λ как неограниченные операторы из $D_{B_1}(\alpha,2)$ в $D_{B_1}(\alpha,2)$ с $\alpha \le s - \gamma$. Тогда решение u уравнения (2.7) принадлежит D_Λ и существуют постоянные $C_3(\lambda_1)$, C_4, C_5 такие, что

$$\|u\|_{D_{B_1}(\beta+s,2)} \le C_1 \|f\|_{D_{B_1}(s,2)}; \quad \|A_1 u\|_{D_{B_1}(\beta-1+s,2)} \le C_3(\lambda_1)\|f\|_{D_{B_1}(s,2)};$$

$$\|u\|_{D_{B_1}(\alpha,2)} \le \frac{C_4}{(1+\lambda_1)^{\beta-\alpha+\delta}} \|f\|_{D_{B_1}(\delta,2)}, \quad \delta \le s,\ \delta \le \alpha \le \beta + \delta;$$

$$\|\Lambda u\|_{D_{B_1}(\alpha,2)} \le \frac{C_5}{(1+\lambda_1)^{\beta-\gamma}} \|f\|_{D_{B_1}(s,2)}, \quad \gamma \le \beta \le s - \alpha.$$

Доказательство. Пусть $f \in E$ (E плотно в $D_{B_1}(s,2)$). Положим

$$u = \int\limits_0^\infty (A_1 - (\lambda + \lambda_1)I)^{-1} dE_\lambda f.$$

Поскольку $0 \in \rho_{B_1}$, найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что

$$u = \int_{\varepsilon_0}^{\infty} (A_1 - (\lambda + \lambda_1)I)^{-1} dE_\lambda f.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
&(A_1 - B_1 - \lambda_1 I)u \\
&\quad = A_1 \int_{\varepsilon_0}^{\infty} (A_1 - (\lambda + \lambda_1)I)^{-1}\, dE_\lambda f - (B_1 + \lambda_1 I) \int_{\varepsilon_0}^{\infty} (A_1 - (\lambda + \lambda_1)I)^{-1}\, dE_\lambda f \\
&= \int_{\varepsilon_0}^{\infty} [A_1(A_1 - (\lambda + \lambda_1)I)^{-1} - (\lambda + \lambda_1)(A_1 - (\lambda + \lambda_1)I)^{-1}]\, dE_\lambda f = \int_{\varepsilon_0}^{\infty} dE_\lambda f = f.
\end{aligned}$$

Поэтому формула

$$u = \int_{\varepsilon_0}^{\infty} (A_1 - (\lambda + \lambda_1)I)^{-1}\, dE_\lambda f$$

определяет искомое решение. Оценим соответствующие интегралы:

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{D_{B_1}(\beta+s,2)} &= \int_{\varepsilon_0}^{\infty} \lambda^{2(\beta+s)} \|(A_1 - (\lambda + \lambda_1)I)^{-1}\, dE_\lambda f\|^2_E \\
&= \int_{\varepsilon_0}^{\infty} \lambda^{2\beta} \big\|(A_1 - (\lambda + \lambda_1)I)^{-1}\, dE_\lambda B_1^s f\big\|^2_E \\
&\le \int_{\varepsilon_0}^{\infty} \lambda^{2\beta} \|(A_1 - (\lambda + \lambda_1)I)^{-1}\|^2_{E\to E} \big(dE_\lambda B_1^s f,\, dE_\lambda B_1^s f\big)_E \\
&\le C_1^2 \int_{\varepsilon_0}^{\infty} \frac{\lambda^{2\beta}}{(1 + \lambda + \lambda_1)^{2\beta}} \big(dE_\lambda B_1^s f, dE_\lambda B_1^s f\big)_E \\
&\le C_1^2 \int_{\varepsilon_0}^{\infty} \big\|dE_\lambda B_1^s f\|^2_E \le C_1^2 \big\|f\|^2_{D_{B_1}(s,2)};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|A_1 u\|^2_{D_{B_1}(\beta-1+s,2)} &= \int_{\varepsilon_0}^{\infty} \lambda^{2(\beta-1+s)} \|A_1(A_1 - (\lambda + \lambda_1)I)^{-1}\, dE_\lambda f\|^2_E \\
&= \int_{\varepsilon_0}^{\infty} \lambda^{2(\beta-1)} \big\|A_1(A_1 - (\lambda + \lambda_1)I)^{-1}\, dE_\lambda B_1^s f\big\|^2_E \\
&\le \int_{\varepsilon_0}^{\infty} \lambda^{2(\beta-1)} \|A_1(A_1 - (\lambda + \lambda_1)I)^{-1}\|^2_{E\to E} \big(dE_\lambda B_1^s f, dE_\lambda B_1^s f\big)_E
\end{aligned}$$

$$\leq \int\limits_{\varepsilon_0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{2(1-\beta)}}\left(1 + C_1 \frac{\lambda+\lambda_1}{(1+\lambda+\lambda_1)^{\beta}}\right)^2 \left(dE_\lambda B_1^s f, dE_\lambda B_1^s f\right)_E$$

$$\leq \int\limits_{\varepsilon_0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^{2(1-\beta)} (1+C_1)^2 \left(dE_\lambda B_1^s f, dE_\lambda B_1^s f\right)$$

$$\leq C_3(\lambda_1) \int\limits_{\varepsilon_0}^{\infty} \left\|dE_\lambda B_1^s f\right\|_E^2 \leq C_3(\lambda_1) \|f\|^2_{D_{B_1}(s,2)}.$$

При $\delta \leq s$, $\delta \leq \alpha \leq \beta + \delta$ имеем

$$\|u\|^2_{D_{B_1}(\alpha,2)} = \int\limits_{\varepsilon_0}^{\infty} \lambda^{2\alpha} \|(A_1 - (\lambda+\lambda_1)I)^{-1}\, dE_\lambda f\|_E^2$$

$$= \int\limits_{\varepsilon_0}^{\infty} \lambda^{2\alpha-2\delta} \left\|(A_1 - (\lambda+\lambda_1)I)^{-1}\, dE_\lambda B_1^\delta f\right\|_E^2$$

$$\leq \int\limits_{\varepsilon_0}^{\infty} (1+\lambda+\lambda_1)^{2\alpha-2\delta} \|(A_1 - (\lambda+\lambda_1)I)^{-1}\|^2_{E\to E} \left(dE_\lambda B_1^\delta f, dE_\lambda B_1^\delta f\right)_E$$

$$\leq C_1^2 \int\limits_{\varepsilon_0}^{\infty} \frac{1}{(1+\lambda+\lambda_1)^{2(\beta-\alpha+\delta)}} \left(dE_\lambda B_1^\delta f, dE_\lambda B_1^\delta f\right)_E$$

$$\leq \frac{C_1^2}{(1+\lambda_1)^{2(\beta-\alpha+\delta)}} \int\limits_{\varepsilon_0}^{\infty} \left\| dE_\lambda B_1^\delta f\right\|_E^2 \leq \frac{C_4^2}{(1+\lambda_1)^{2(\beta-\alpha+\delta)}} \left\|f\right\|^2_{D_{B_1}(\delta,2)}.$$

При $\gamma \leq \beta \leq s - \alpha$ получим

$$\|\Lambda u\|^2_{D_{B_1}(\alpha,2)} = \int\limits_{\varepsilon_0}^{\infty} \lambda^{2\alpha} \|\Lambda(A_1 - (\lambda+\lambda_1)I)^{-1}\, dE_\lambda f\|_E^2$$

$$= \int\limits_{\varepsilon_0}^{\infty} \lambda^{2\alpha-2s} \left\|\Lambda(A_1 - (\lambda+\lambda_1))^{-1}\, dE_\lambda B_1^s f\right\|_E^2$$

$$\leq \int\limits_{\varepsilon_0}^{\infty} \lambda^{2\alpha-2s} \|\Lambda(A_1 - (\lambda+\lambda_1)I)^{-1}\|^2_{E\to E} \left(dE_\lambda B_1^s f, dE_\lambda B_1^s f\right)_E$$

$$\leq C_2^2 \int\limits_{\varepsilon_0}^{\infty} \lambda^{2\alpha-2s} (1+\lambda+\lambda_1)^{2\gamma} \left(dE_\lambda B_1^s f, dE_\lambda B_1^s f\right)_E$$

$$= C_2^2 \int\limits_{\varepsilon_0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{2(s-\alpha)}(1+\lambda+\lambda_1)^{-2\beta}(1+\lambda+\lambda_1)^{2(\beta-\gamma)}} \left\| dE_\lambda B_1^s f\right\|_E^2$$

$$\leq C_2^2 \frac{1}{\varepsilon_0^{2(s-\alpha-\beta)}(1+\lambda_1)^{2(\beta-\gamma)}} \int\limits_{\varepsilon_0}^{\infty} \left\|dE_\lambda B_1^s f\right\|_E^2 \leq \frac{C_5^2}{(1+\lambda_1)^{2(\beta-\gamma)}} \|f\|^2_{D_{B_1}(s,2)}.$$

Единственность доказывается так же, как в теореме 1.2 Ю. А. Дубинского [6]. Теорема 2.2 доказана.

§ 3. Уравнение нечетного порядка

Положим $E = \mathbf{L}_2(Q)$. Рассмотрим уравнение

$$Au - \lambda_1 u = f, \tag{3.1}$$

где $l = 2m+1$, $m \in \mathbb{N}$, $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, $f \in \mathbf{L}_2(Q)$. Условия на коэффициенты оператора A приведены в § 1.

Лемма 3.1. *Если хотя бы одна из величин $k(1)$, $k(0)$ равна нулю, то предположим, что существуют некоторое число $\beta_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ и оператор $\widetilde{L_1}$ вида*

$$\widetilde{L_1}u(t,x) = u^{(2m)}(t,x) + b_{2m-2}(t)u^{(2m-2)}(t,x) + \cdots + b_0(t)u(t,x),$$

где функции $b_{2m-2}(t), \ldots, b_0(t)$ принадлежат $\mathbf{L}_\infty(0,1)$ вместе со своими производными первого порядка, такой, что для любой функции $u(t,x) \in P_l$, удовлетворяющей краевым условиям (1.1), выполняется неравенство

$$(-1)^m \operatorname{Re}(e^{i\theta}(u, \widetilde{L_1}u)) \geq \delta \|u\|_m^2 \tag{3.2}$$

для почти всех $x \in \Omega$ и всех $\theta \in [-\frac{\pi}{2} + \beta_0, \frac{\pi}{2} - \beta_0]$, где δ — некоторая положительная постоянная. Обозначим через β величину, равную β_0, в случае, когда хотя бы одна из величин $k(1)$, $k(0)$ равна нулю, и произвольную величину из интервала $(0, \frac{\pi}{2})$ в случае, когда обе величины $k(1)$, $k(0)$ не равны нулю.

Найдется постоянная $M_0 > 0$ такая, что при $\lambda_1 \in D(M_0, \beta)$ существует единственное решение $u \in D_A = \widetilde{\mathbf{W}}^l_{2,\{l_{i1}, l_{j0}\}}(0,1; \mathbf{L}_2(\Omega))$ задачи (3.1), (1.1), причем выполняется оценка

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t}(k u^{(l-1)}) \right\|^2_{\mathbf{L}_2(Q)} + \|u^{(l-1)}\|^2_{\mathbf{L}_2(Q)} + |\lambda_1| \|u^{(\frac{l-1}{2})}\|^2_{\mathbf{L}_2(Q)} + |\lambda_1|^2 \|u\|^2_{\mathbf{L}_2(Q)} \leq C\|f\|^2_{\mathbf{L}_2(Q)},$$

где постоянная C не зависит от λ_1, u.

Доказательство вытекает из теоремы 1.1 в [11].

Приведем пример [11] числа $\beta_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ и оператора $\widetilde{L_1}$, для которых выполнено предположение леммы 3.1. Пусть краевые условия имеют вид:

$$u^{(p_j)}(0,x) = 0, \quad j = 1, \ldots, m, \ 0 \leq p_1 < p_2 < \cdots < p_m \leq 2m-1,$$

причем $x \in \Omega$, $p_k + p_{m-k+1} = 2m-1$, $k = 1, \ldots, m$;

$$u^{(q_j)}(1,x) = 0, \quad j = 1, \ldots, m, \ 0 \leq q_1 < q_2 < \cdots < q_m \leq 2m-1,$$

причем $x \in \Omega$, $q_k + q_{m-k+1} = 2m-1$, $k = 1, \ldots, m$.

Пусть $\beta_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ — произвольное число, а $u(t,x) \in P_l$ — произвольная функция, удовлетворяющая этим краевым условиям. Положим

$$\widetilde{L_1}u = u^{(2m)} + (-1)^m u.$$

Запишем краевые условия через квазипроизводные $u^{[k]}$, определяемые по формулам

$$u^{[k]} = \frac{\partial^k u}{\partial t^k}, \ k = 1, \ldots, m; \ u^{[k]} = -\frac{\partial^k u}{\partial t^k}, \ k = m+1, \ldots, 2m-1; \ u^{[2m]} = u - \frac{\partial^{2m} u}{\partial t^{2m}},$$

в следующем виде:

$$u^{[p_j]}(0,x)=0,\quad j=1,\dots,m,\ 0\le p_1<p_2<\dots<p_m\le 2m-1,$$

причем $x\in\Omega$, $p_k+p_{m-k+1}=2m-1$, $k=1,\dots,m$;

$$u^{[q_j]}(1,x)=0,\quad j=1,\dots,m,\ 0\le q_1<q_2<\dots<q_m\le 2m-1,$$

причем $x\in\Omega$, $q_k+q_{m-k+1}=2m-1$, $k=1,\dots,m$.

Известно [12], что оператор $\widetilde{L_1}$ самосопряжен. Более того, интегрированием по частям с учетом краевых условий можно установить неравенство

$$(-1)^m\operatorname{Re}(u,\widetilde{L_1}u)\ge\delta_*\|u\|_m^2$$

для почти всех $x\in\Omega$, где δ_* — некоторая положительная постоянная. По предположению 2 из [11] заключаем, что выполняется неравенство (3.2).

Лемма 3.2. *Пусть выполняются условия:*

(i) $(-1)^\nu\frac{\sum\limits_{|\alpha|=2\nu}b_\alpha(x)\xi^\alpha}{|\sum\limits_{|\alpha|=2\nu}b_\alpha(x)\xi^\alpha|}\ne e^{i\arg\lambda_1}$ *для всех векторов* $\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, *любых* $x\in\overline{\Omega}$ *и* $\theta_B<\arg\lambda_1<2\pi-\theta_B,\theta_B:0\le\theta_B<\frac{\pi}{2}-\beta$;

(ii) *полиномы (по t)*

$$\sum_{|\alpha|=m_k}b_{k,\alpha}(x)(\xi+t\eta)^\alpha,\quad k=1,2,\dots,\nu,$$

линейно независимы по модулю $\prod\limits_{k=1}^{\nu}\big(t-t_k^+(\xi,\lambda_1)\big)$ *(здесь $x\in\partial\Omega$, η — вектор нормали в точке x, $\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ — касательный вектор в точке x, а $t_k^+(\xi,\lambda_1)$, $k=1,2,\dots,\nu$, обозначает ν корней с положительными мнимыми частями полинома $(-1)^\nu\sum\limits_{|\alpha|=2\nu}b_\alpha(x)(\xi+t\eta)^\alpha-\lambda_1$ по t), и тогда существует постоянная $M>0$ такая, что при $\lambda_1\in D\prime(M,\theta_B)$ выполняется неравенство*

$$\|(B-\lambda_1I)^{-1}\|_{\mathbf{L}_2(Q)\to\mathbf{L}_2(Q)}\le C\frac{1}{1+|\lambda_1|},$$

где постоянная C не зависит от λ_1.

Доказательство представляет собой прямое следствие теоремы 2.1 Агмона из [8].

Изучим при $l=2m+1$, $m\in\mathbb{N}$ уравнение

$$(L-\lambda I)u=Au-Bu+Su-\lambda u=f,\quad\lambda\ge 0.\tag{3.3}$$

Опишем пространство $D_B(s,2)$. В соответствии с результатами Гривара — Сили (см., например, [7, п. 4.3.3]) $D_B(s,2)=\mathbf{L}_2\big(0,1;\mathbf{W}^{2\nu s}_{2,\{B_j\}}(\Omega)\big)$ при $s\in(0,1)$ состоит из функций $u\in\mathbf{L}_2(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu s}(\Omega))$, которые дополнительно удовлетворяют условиям $B_ku=0$, $t\in(0,1)$, $x\in\partial\Omega$ при $m_j<2\nu s-\frac12$ и $\int\limits_0^1\int\limits_\Omega\frac{|B_ju|^2}{\rho(x)}\,dxdt<\infty$ при $m_j=2\nu s-\frac12$, где $\rho(x)=\rho(x,\partial\Omega)$ — расстояние от точки x до $\partial\Omega$, при этом считаем, что коэффициенты граничного оператора B_j продолжены внутрь области Ω до функций класса $\mathbf{C}^1(\overline{\Omega})$. Из результатов о гладкости решений эллиптических уравнений [13, с. 179] $D_B(s,2)=\mathbf{L}_2(0,1;\mathbf{W}^{2\nu s}_{2,\{B_j\}}(\Omega))$ при $s\in(1,2)$

состоит из функций $u \in \mathbf{L}_2\big(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu s}(\Omega)\big)$ таких, что $u \in \mathbf{L}_2\big(0,1;\mathbf{W}_{2,\{B_j\}}^{2\nu}(\Omega)\big)$, причем $Bu \in \mathbf{L}_2(0,1;\mathbf{W}_{2,\{B_j\}}^{2\nu(s-1)}(\Omega))$. Пространство $D_{B^*}(s,2)$ описывается аналогично с учетом того, что набор $\{B_j\}$ заменяется соответствующим набором граничных операторов $\{B_j^*\}$ сопряженной задачи. При $0 < s < \frac{1}{4\nu}$ имеем [7, п. 4.3.3]

$$D_B(s,2) = D_{B^*}(s,2) = \mathbf{L}_2\big(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu s}(\Omega)\big). \tag{3.4}$$

Пространство $D_B(s,2)$ при $s \in (-1,0)$ может быть определено как негативное пространство (см. замечание 2.1), построенное по паре $D_{B^*}(-s,2)$ и $\mathbf{L}_2(Q)$. При $-\frac{1}{4\nu} < s < 0$ имеем $D_B(s,2) = \mathbf{L}_2\big(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu s}(\Omega)\big)$ [7, с. 415]. При $s=0$ будет $D_B(0,2) = \mathbf{L}_2(0,1;\mathbf{L}_2(\Omega))$ [7, с. 394]. Таким образом, для оператора $B : \mathbf{L}_2(Q) \to \mathbf{L}_2(Q)$ справедливо равенство $D_B(s,2) = \mathbf{L}_2\big(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu s}(\Omega)\big)$ при $|s| < \frac{1}{4\nu}$.

Если рассмотреть оператор A как неограниченный оператор в $\mathbf{L}_2(Q)$, то $D_A = \widetilde{\mathbf{W}}^l_{2,\{l_{i1},l_{j0}\}}(0,1;\mathbf{L}_2(\Omega))$. Далее (см. лемму 2.1), при $|s| < 1$ оператор $\widetilde{A}$: $D_B(s,2) \to D_B(s,2)$ имеет областью определения $\widetilde{\mathbf{W}}^l_{2,\{l_{i1},l_{j0}\}}\big(0,1;\mathbf{W}_{2,\{B_j\}}^{2\nu s}(\Omega)\big)$. В частности, при $|s| < \frac{1}{4\nu}$ будет $D_{\widetilde{A}} = \widetilde{\mathbf{W}}^l_{2,\{l_{i1},l_{j0}\}}\big(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu s}(\Omega)\big)$.

Теорема 3.1. *Пусть выполняются предположение леммы* 3.1 *и условия* (i), (ii) *леммы* 3.2. *Если* $f \in \mathbf{L}_2\big(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu s}(\Omega)\big)$ *с* $|s| < \frac{1}{4\nu}$, *то существует* $\lambda_1 > 0$ *такое, что для* $\lambda \geq \lambda_1$ *решение* $u \in \mathbf{L}_2\big(0,1;\mathbf{W}_{2,\{B_j\}}^{2\nu+2\nu s}(\Omega)\big) \cap \widetilde{\mathbf{W}}^l_{2,\{l_{i0},l_{j1}\}}\big(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu s}(\Omega)\big)$ *задачи* (3.3), (1.1), (1.2) *существует и единственно. Кроме того, решение обладает свойством:*

$$u^{(p)} \in \mathbf{L}_2\big(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu(\frac{l-1-p}{l-1})+2\nu s}(\Omega)\big)$$

для любого $p = 1,2,\ldots,l-2$.

Доказательство. Рассмотрим при $l = 2m+1$, $m \in \mathbb{N}$ уравнение

$$Au - Bu - \lambda u = f, \quad \lambda \geq 0. \tag{3.5}$$

Операторы A, B являются замкнутыми с плотными областями определения в $\mathbf{L}_2(Q)$. Замкнутость оператора A вытекает из леммы 3.1. Для операторов A и B выполнено условие: операторы $(A-zI)^{-1}$ и $(B-yI)^{-1}$ коммутируют между собой для любых $z \in D(M_0,\beta)$ и $y \in D\prime(M,\theta_B)$, так как коэффициенты этих операторов зависят от разных переменных и производные в операторах взяты по разным переменным. Делая сдвиг параметра λ на $\lambda_0 = \max(M_0,M)$ и учитывая леммы 3.1 и 3.2, без ограничения общности можно считать, что для операторов A и B выполнено условие: существуют постоянные θ_A и $\theta_B \geq 0$ такие, что A удовлетворяет $H(\theta_A)$, а $-B$ удовлетворяет $H(\theta_B)$, причем $\theta_A + \theta_B < \pi$. В силу теоремы 2.1 решение уравнения (3.5) из $W_{A,B}(s,q) = \mathbf{L}_2\big(0,1;\mathbf{W}_{2,\{B_j\}}^{2\nu+2\nu s}(\Omega)\big) \cap \widetilde{\mathbf{W}}^l_{2,\{l_{i0},l_{j1}\}}\big(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu s}(\Omega)\big)$, где $|s| < \frac{1}{4\nu}$, существует, единственно и для всех $\lambda \geq \lambda_0$ найдутся такие постоянные $N_1, N_2 > 0$, что

$$\begin{gathered}\|u\|_{\mathbf{L}_2\left(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu s}(\Omega)\right)} \leq \frac{N_1}{1+\lambda}\|f\|_{\mathbf{L}_2\left(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu s}(\Omega)\right)},\\ \|u\|_{\mathbf{L}_2\left(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu+2\nu s}(\Omega)\right)\cap\mathbf{W}_2^{l-1}\left(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu s}(\Omega)\right)} \leq N_2\|f\|_{\mathbf{L}_2\left(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu s}(\Omega)\right)}.\end{gathered} \tag{3.6}$$

Представим уравнение (3.3) в виде

$$(L-\lambda I)u = (A-B-\lambda I)u + SS_\lambda(A-B-\lambda I)u = f,$$

где S_λ — оператор, обратный к $A-B-\lambda I$. Обозначим $v=(A-B-\lambda I)u\in \mathbf{L}_2\big(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu s}(\Omega)\big)$ с $|s|<\frac{1}{4\nu}$. Тогда уравнение примет вид

$$v+SS_\lambda v=f. \tag{3.7}$$

Оценим $\|SS_\lambda v\|_{\mathbf{L}_2\left(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu s}(\Omega)\right)}$, где

$$S_\lambda v=u\in \mathbf{L}_2\big(0,1;\mathbf{W}^{2\nu+2\nu s}_{2,\{B_j\}}(\Omega)\big)\cap \widetilde{\mathbf{W}}^l_{2,\{l_{i0},l_{j1}\}}\big(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu s}(\Omega)\big).$$

Для этого достаточно оценить $\|u^{(j)}\|_{\mathbf{L}_2\left(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu(\frac{l-1-j}{l-1})-\varepsilon+2\nu s}(\Omega)\right)}$ для любого $j=0,1,\dots,l-2$. Здесь если $2\nu(\frac{l-1-j}{l-1})$ целое, то ε можно положить равным 1, иначе $\varepsilon=\{2\nu(\frac{l-1-j}{l-1})\}$. Имеют место соотношения

$$\mathbf{L}_2\big(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu(\frac{l-1-j}{l-1})+2\nu s}(\Omega)\big)\subset \mathbf{L}_2\big(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu(\frac{l-1-j}{l-1})-\varepsilon+2\nu s}(\Omega)\big)\subset \mathbf{L}_2\big(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu s}(\Omega)\big),$$

причем вложение $\mathbf{W}_2^{2\nu(\frac{l-1-j}{l-1})+2\nu s}(\Omega)\to \mathbf{W}_2^{2\nu(\frac{l-1-j}{l-1})-\varepsilon+2\nu s}(\Omega)$ компактно. По теореме 16.4 из [13, с. 126] для любого $\eta>0$ существует такая постоянная $C(\eta)$, что

$$\begin{aligned}\|u^{(j)}\|&_{\mathbf{L}_2\left(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu(\frac{l-1-j}{l-1})-\varepsilon+2\nu s}(\Omega)\right)}\\ &\le \eta\|u^{(j)}\|_{\mathbf{L}_2\left(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu(\frac{l-1-j}{l-1})+2\nu s}(\Omega)\right)}+C(\eta)\|u^{(j)}\|_{\mathbf{L}_2\left(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu s}(\Omega)\right)}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

При $j=0$ получаем

$$\|u\|_{\mathbf{L}_2\left(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu(s+1)-\varepsilon}(\Omega)\right)}\le \eta\|u\|_{\mathbf{L}_2\left(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu(s+1)}(\Omega)\right)}+C(\eta)\|u\|_{\mathbf{L}_2\left(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu s}(\Omega)\right)}. \tag{3.9}$$

Пусть $j=1,2,\dots,l-2$. Первую норму в правой части (3.8) оцениваем, используя теорему 2.3 о промежуточных производных из [13, с. 29], теорему 2 из [7, с. 394] и то, что $2\nu(s+1)(1-\frac{j}{l-1})+2\nu s(\frac{j}{l-1})=2\nu(\frac{l-1-j}{l-1})+2\nu s$:

$$\|u^{(j)}\|_{\mathbf{L}_2(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu(\frac{l-1-j}{l-1})+2\nu s}(\Omega))}\le C_1(\|u\|_{\mathbf{L}_2(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu(s+1)}(\Omega))}+\|u\|_{\mathbf{W}_2^{l-1}(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu s}(\Omega))}). \tag{3.10}$$

Для оценки второй нормы в правой части (3.8) используем интерполяционное неравенство [13, с. 32] и неравенство Коши с ε_1: для любого $\varepsilon_1>0$ существует постоянная $C_3(\varepsilon_1)$ такая, что

$$\begin{aligned}\|u^{(j)}\|_{\mathbf{L}_2(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu s}(\Omega))}&\le \|u\|_{\mathbf{W}_2^{j}(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu s}(\Omega))}\\ &=\|u\|_{[\mathbf{W}_2^{l-1}(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu s}(\Omega)),\mathbf{L}_2(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu s}(\Omega))]_{1-\frac{j}{l-1},2}}\\ &\le C_2\|u\|^{\frac{j}{l-1}}_{\mathbf{W}_2^{l-1}(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu s}(\Omega))}\|u\|^{1-\frac{j}{l-1}}_{\mathbf{L}_2(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu s}(\Omega))}\\ &\le \varepsilon_1\|u\|_{\mathbf{W}_2^{l-1}(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu s}(\Omega))}+C_3(\varepsilon_1)\|u\|_{\mathbf{L}_2(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu s}(\Omega))}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Подставляя (3.9)–(3.11) в (3.8), получаем

$$\begin{aligned}\|Su\|_{\mathbf{L}_2(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu s}(\Omega))}&\le C_0\sum_{j=0}^{l-2}\|u^{(j)}\|_{\mathbf{L}_2(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu(\frac{l-1-j}{l-1})-\varepsilon+2\nu s}(\Omega))}\\ &\le C_0[(\eta+\eta C_1(l-2))\|u\|_{\mathbf{L}_2(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu(s+1)}(\Omega))}\end{aligned}$$

$$+ (C(\eta) + C(\eta)C_3(\varepsilon_1)(l-2))\|u\|_{\mathbf{L}_2(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu s}(\Omega))}$$
$$+ (\eta C_1 + C(\eta)\varepsilon_1)(l-2)\|u\|_{\mathbf{W}_2^{l-1}(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu s}(\Omega))}]. \quad (3.12)$$

Учитывая (3.6) из (3.12), имеем

$$\|SS_\lambda v\|_{\mathbf{L}_2(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu s}(\Omega))} = \|Su\|_{\mathbf{L}_2(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu s}(\Omega))}$$
$$\le C_0 \max\biggl((\eta + 2\eta C_1(l-2) + C(\eta)\varepsilon_1(l-2))N_2, \frac{(C(\eta) + C(\eta)C_3(\varepsilon_1)(l-2))N_1}{1+\lambda}\biggr)$$
$$\times \|v\|_{\mathbf{L}_2(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu s}(\Omega))}.$$

Выбираем η, ε_1 и $\lambda > \lambda_0$ такими, что

$$C_0 \max\biggl((\eta + 2\eta C_1(l-2) + C(\eta)\varepsilon_1(l-2))N_2, \frac{(C(\eta) + C(\eta)C_3(\varepsilon_1)(l-2))N_1}{1+\lambda}\biggr) < 1.$$

Воспользовавшись теоремой о неподвижной точке, получаем: найдется $\lambda_1 > \lambda_0 > 0$ такое, что для $\lambda \ge \lambda_1$ решение уравнения (3.7) существует, единственно и $v = (A - B - \lambda I)u \in \mathbf{L}_2\bigl(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu s}(\Omega)\bigr)$ при $|s| < \frac{1}{4\nu}$. Отсюда для $\lambda \ge \lambda_1$ задача (3.3), (1.1), (1.2) имеет единственное решение

$$u = S_\lambda v \in \mathbf{L}_2\bigl(0,1;\mathbf{W}_{2,\{B_j\}}^{2\nu+2\nu s}(\Omega)\bigr) \cap \widetilde{\mathbf{W}}_{2,\{l_{i0},l_{j1}\}}^{l}\bigl(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu s}(\Omega)\bigr)$$

при $|s| < \frac{1}{4\nu}$. Из (3.10) вытекает последнее утверждение теоремы. Теорема 3.1 доказана.

Замечание 3.1. Теорема 3.1 может быть получена и при минимальных условиях гладкости на коэффициенты операторов B, S, B_j и границу $\partial\Omega$. В частности, лемма 3.2 справедлива [8, с. 121], если $b_\alpha(x) \in C(\overline{\Omega})$ при $|\alpha| = 2\nu$, $b_\alpha(x) \in \mathbf{L}_\infty(\Omega)$ при $|\alpha| < 2\nu$, $a_{k,\alpha}(t,x) \in \mathbf{L}_\infty(0,1;\mathbf{C}^\gamma(\overline{\Omega}))$, где $\gamma > |2\nu s|$, $b_{k,\alpha}(x) \in \mathbf{C}^{2\nu - m_k}(\partial\Omega)$, $\partial\Omega \in C^{2\nu}$. Однако поскольку мы не смогли найти подходящие работы, где результаты из [7, п. 4.3.3] обобщены на случай не очень гладких границы $\partial\Omega$ и коэффициентов $b_\alpha(x)$, $a_{k,\alpha}(t,x)$, $b_{k,\alpha}(x)$, утверждение теоремы 3.1 становится менее точным в смысле описания функциональных пространств, которым принадлежит соответствующее решение u. Если при вышеприведенных (или более сильных) условиях на коэффициенты операторов B, S, B_j и границу $\partial\Omega$ для сопряженного оператора B^* имеет место

$$\mathbf{L}_2\bigl(0,1;\dot{\mathbf{W}}_2^{2\nu}(\Omega)\bigr) \subset D_{B^*} \subset \mathbf{L}_2\bigl(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu}(\Omega)\bigr)$$

то равенство (3.4) при $|s| < \frac{1}{4\nu}$ остается верным [7, 9].

Следствие 3.1. *Пусть* $f \in \mathbf{L}_2\bigl(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu s}(\Omega)\bigr)$ *с* $|s| < \frac{1}{4\nu}$, $l = 2m+1$, $m \in \mathbb{N}$ *и выполнены условия теоремы* 3.1. *Если решение*

$$u \in \mathbf{L}_2\bigl(0,1;\mathbf{W}_{2,\{B_j\}}^{2\nu+2\nu s}(\Omega)\bigr) \cap \widetilde{\mathbf{W}}_{2,\{l_{i0},l_{j1}\}}^{l}\bigl(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu s}(\Omega)\bigr)$$

уравнения (1) *единственно, то оно существует.*

Доказательство. Исходное уравнение (1) можно представить в виде $Lu = (L - \lambda I)u + \lambda u = f$ или $u + (L - \lambda I)^{-1}\lambda u = (L - \lambda I)^{-1} f$, где $\lambda \ge \lambda_1$. Оператор $(L - \lambda I)^{-1}$ вполне непрерывный, так как вложение

$$\mathbf{L}_2\bigl(0,1;\mathbf{W}_{2,\{B_j\}}^{2\nu+2\nu s}(\Omega)\bigr) \cap \widetilde{\mathbf{W}}_{2,\{l_{i0},l_{j1}\}}^{l}\bigl(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu s}(\Omega)\bigr) \to \mathbf{L}_2\bigl(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu s}(\Omega)\bigr)$$

компактно. Следовательно, из теорем Фредгольма получаем нужное утверждение.

§ 4. Уравнение четного порядка

Положим $E = \mathbf{L}_2(Q)$. Рассмотрим уравнение

$$Au - \lambda_1 u = f, \tag{4.1}$$

где $l = 2m, m \in \mathbb{N}$, $k(1) \le 0$, $k(0) \le 0$, $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, $f \in \mathbf{L}_2(Q)$. Условия на коэффициенты оператора A приведены в § 1.

Лемма 4.1. *Если хотя бы одна из величин $k(1)$, $k(0)$ равна нулю, то предположим, что существует оператор $\widetilde{L_1}$ вида*

$$\widetilde{L_1}u(t,x) = b(t)u^{(2m-1)}(t,x) + b_{2m-3}(t)u^{(2m-3)}(t,x) + \dots + b_0(t)u(t,x)$$

(функции $b(t), b_{2m-3}(t), \dots, b_0(t)$ принадлежат $\mathbf{L}_\infty(0,1)$ вместе со своими производными первого порядка, $b(t) \ge \delta_{00} > 0$, $b'_t \le -\delta_{01} < 0$, $|b'_t|$ достаточно мало δ_{00}, δ_{01} — некоторые постоянные) такой, что для любой функции $u(t,x) \in P_l$, удовлетворяющей краевым условиям (1.1), выполняется неравенство

$$(-1)^{m-1}\operatorname{Re}(u, \widetilde{L_1}u) \ge \delta \|u\|^2_{m-1} \tag{4.2}$$

для почти всех $x \in \Omega$, где δ — некоторая положительная постоянная.

Найдутся постоянные $M_0 \ge 1$ и $M_1 > 0$ такие, что при $\lambda_1 \in \widetilde{D}(M_0, M_1)$ существует единственное решение $u \in \widetilde{\mathbf{W}}^l_{2,\{l_{i1},l_{j0}\}}(0,1;\mathbf{L}_2(\Omega))$ задачи (4.1), (1.1) такое, что

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t}(ku^{(l-1)}) \right\|^2_{\mathbf{L}_2(Q)} + \|u^{(l-1)}\|^2_{\mathbf{L}_2(Q)} + |\lambda_1| \|u^{(\frac{l-2}{2})}\|^2_{\mathbf{L}_2(Q)} + |\lambda_1|^{2(1-\frac{1}{l})}\|u\|^2_{\mathbf{L}_2(Q)} \le C\|f\|^2_{\mathbf{L}_2(Q)},$$

где постоянная C не зависит от λ_1, u.

Доказательство вытекает из теоремы 2.1 в [11].

Приведем пример [11] оператора $\widetilde{L_1}$, для которого выполнено предположение леммы 4.1. Пусть $u(t,x) \in P_l$ — произвольная функция, удовлетворяющая для почти всех $x \in \Omega$ краевым условиям

$$u(0,x) = u'(0,x) = \dots = u^{(m-1)}(0,x) = 0,$$
$$u(1,x) = u'(1,x) = \dots = u^{(m-1)}(1,x) = 0.$$

Положим $\widetilde{L_1}u = (2 - \varepsilon_1 t)u^{(2m-1)} + (-1)^{m-1}u$, где $\varepsilon_1 \in (0,1)$. При $t \in [0,1]$ имеем $b(t) = (2 - \varepsilon_1 t) \ge 2 - \varepsilon_1 > 1$, $b'_t = -\varepsilon_1 < 0$, причем величину ε_1 можно выбрать сколь угодно малой. Неравенство (4.2) устанавливается с помощью интегрирования по частям.

Замечание 4.1. Без ограничения общности считаем, что $M_0 = 0$.

В качестве скалярного произведения в пространстве $\mathbf{W}^{l-1}_2(0,1;\mathbf{L}_2(\Omega))$ возьмем

$$\langle u, v\rangle_{\mathbf{W}^{l-1}_2(0,1;\mathbf{L}_2(\Omega))} = (u^{(l-1)}, v^{(l-1)})_{\mathbf{L}_2(Q)} + (u,v)_{\mathbf{L}_2(Q)}.$$

Введем оператор $\widetilde{\Lambda}u = (-1)^{l-1}u^{2(l-1)} + u$. Область определения $D_{\widetilde{\Lambda}}$ состоит из всех функции $u \in \mathbf{W}^{2(l-1)}_2(0,1;\mathbf{L}_2(\Omega))$, удовлетворяющих для почти всех $x \in \Omega$ условиям Неймана

$$u^{(l-1)}(0,x) = u^{(l)}(0,x) = \dots = u^{(2l-3)}(0,x) = 0,$$
$$u^{(l-1)}(1,x) = u^{(l)}(1,x) = \dots = u^{(2l-3)}(1,x) = 0.$$

Тогда $(\widetilde{\Lambda}u, v)_{\mathbf{L}_2(Q)} = \langle u, v\rangle_{\mathbf{W}^{l-1}_2(0,1;\mathbf{L}_2(\Omega))}$. Так как $\widetilde{\Lambda}$ — самосопряженный положительный оператор, можно взять $\Lambda = \widetilde{\Lambda}^{\frac{1}{2}}$. Учитывая, что

$$\|u\|^2_{\mathbf{W}^{l-1}_2(0,1;\mathbf{L}_2(\Omega))} = \langle u, u\rangle_{\mathbf{W}^{l-1}_2(0,1;\mathbf{L}_2(\Omega))} = (\widetilde{\Lambda}u, u)_{\mathbf{L}_2(Q)}$$

$$= (\widetilde{\Lambda}^{\frac{1}{2}}u, \widetilde{\Lambda}^{\frac{1}{2}}u)_{\mathbf{L}_2(Q)} = (\Lambda u, \Lambda u)_{\mathbf{L}_2(Q)} = \|\Lambda u\|^2_{\mathbf{L}_2(Q)},$$

имеем [7, с. 166, 400] $D_\Lambda = D_{\widetilde{\Lambda}^{\frac{1}{2}}} = (D_{\widetilde{\Lambda}}, \mathbf{L}_2(Q))_{\frac{1}{2},2} = \mathbf{W}_2^{l-1}(0,1;\mathbf{L}_2(\Omega))$. Этот оператор Λ будет удовлетворять всем условиям теоремы 2.2, причем $\beta = \frac{l-1}{l}$, $s = 0$, $\gamma = 0$, $\alpha = 0$, $\delta = 0$.

Изучим при $l = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, $k(1) \le 0$, $k(0) \le 0$ уравнение

$$(L - \lambda I)u = Au - Bu + Su - \lambda u = f, \quad \lambda \ge 0. \tag{4.3}$$

Теорема 4.1. *Пусть выполняется предложение леммы* 4.1*, а также для оператора B условие* (a) *теоремы 2.2. Если $f \in \mathbf{L}_2(Q)$, то найдется $\lambda_0 > 0$ такое, что для $\lambda \ge \lambda_0$ существует единственное решение u задачи* (4.3), (1.1), (1.2) *из* $\mathbf{L}_2\big(0,1;\mathbf{W}^{2\nu\frac{l-1}{l}}_{2,\{B_j\}}(\Omega)\big) \cap \widetilde{\mathbf{W}}^l_{2,\{l_{i1},l_{j0}\}}\big(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu(\frac{-1}{l})}(\Omega)\big) \cap \mathbf{W}_2^{l-1}(0,1;\mathbf{L}_2(\Omega))$. *Кроме того, решение обладает свойством*

$$u^{(p)} \in \mathbf{L}_2\big(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu(\frac{l-1-p}{l})}(\Omega)\big)$$

для любого $p = 1, 2, \ldots, l-2$.

Доказательство. Рассмотрим при $l = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, $k(1) \le 0$, $k(0) \le 0$ уравнение

$$Au - Bu - \lambda u = f, \quad \lambda \ge 0. \tag{4.4}$$

Операторы A, B являются замкнутыми с плотными областями определения в $\mathbf{L}_2(Q)$. Замкнутость оператора A вытекает из леммы 4.1. Для операторов A, B условие (b) теоремы 2.2 вытекает из того, что коэффициенты операторов A и B зависят от разных переменных и производные в операторах взяты по разным переменным. Учитывая замечание 4.1 и лемму 4.1, можно считать, что для оператора A выполнено условие (c) теоремы 2.2. Заметим [7, п. 4.3.3], что

$$D_B(\beta,2) = D_B(1-1/l,2) = (D_B,\mathbf{L}_2(Q))_{\frac{1}{l},2}$$
$$= \mathbf{L}_2\big(0,1;\big(\mathbf{L}_2(\Omega),\mathbf{W}^{2\nu}_{2,\{B_j\}}(\Omega)\big)_{1-\frac{1}{l}}\big) = \mathbf{L}_2\big(0,1;\mathbf{W}^{2\nu\frac{l-1}{l}}_{2,\{B_j\}}(\Omega)\big).$$

Таким образом, в силу теоремы 2.2 существует единственное решение уравнения (4.4) из $\mathbf{L}_2\big(0,1;\mathbf{W}^{2\nu\frac{l-1}{l}}_{2,\{B_j\}}(\Omega)\big) \cap \widetilde{\mathbf{W}}^l_{2,\{l_{i1},l_{j0}\}}\big(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu(\frac{-1}{l})}(\Omega)\big) \cap \mathbf{W}_2^{l-1}(0,1;\mathbf{L}_2(\Omega))$, и выполняется оценка

$$\|u\|_{\mathbf{L}_2(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu\frac{l-1}{l}}(\Omega))} + (1+\lambda)^{\frac{l-1}{l}}[\|u\|_{\mathbf{W}_2^{l-1}(0,1;\mathbf{L}_2(\Omega))} + \|u\|_{\mathbf{L}_2(Q)}] \le C\|f\|_{\mathbf{L}_2(Q)}, \tag{4.5}$$

где постоянная C не зависит от λ, u.

Представим уравнение (4.3) в виде

$$(L - \lambda I)u = (A - B - \lambda I)u + SS_\lambda(A - B - \lambda I)u = f,$$

где S_λ — оператор, обратный к $A - B - \lambda I$. Обозначим $v = (A - B - \lambda I)u \in \mathbf{L}_2(Q)$. Тогда уравнение примет вид

$$v + SS_\lambda v = f. \tag{4.6}$$

Оценим $\|SS_\lambda v\|_{\mathbf{L}_2(Q)}$, где

$$S_\lambda v = u \in \mathbf{L}_2\big(0,1;\mathbf{W}^{2\nu\frac{l-1}{l}}_{2,\{B_j\}}(\Omega)\big) \cap \widetilde{\mathbf{W}}^l_{2,\{l_{i1},l_{j0}\}}\big(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu(\frac{-1}{l})}(\Omega)\big) \cap \mathbf{W}_2^{l-1}(0,1;\mathbf{L}_2(\Omega)).$$

Для этого достаточно оценить $\|u^{(j)}\|_{\mathbf{L}_2(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu(\frac{l-1-j}{l})-\varepsilon}(\Omega))}$ для любого $j = 0, 1, \ldots, l-2$. Здесь если $2\nu(\frac{l-1-j}{l})$ целое, то ε можно положить равным 1, иначе $\varepsilon = \{2\nu(\frac{l-1-j}{l})\}$. Имеют место включения

$$\mathbf{L}_2\big(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu(\frac{l-1-j}{l})}(\Omega)\big) \subset \mathbf{L}_2\big(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu(\frac{l-1-j}{l})-\varepsilon}(\Omega)\big) \subset \mathbf{L}_2(Q),$$

причем вложение $\mathbf{W}_2^{2\nu(\frac{l-1-j}{l})}(\Omega) \to \mathbf{W}_2^{2\nu(\frac{l-1-j}{l})-\varepsilon}(\Omega)$ компактно. По теореме 16.4 из [13] для любого $\eta > 0$ существует такая постоянная $C(\eta)$, что

$$\|u^{(j)}\|_{\mathbf{L}_2\left(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu(\frac{l-1-j}{l})-\varepsilon}(\Omega)\right)} \le \eta\|u^{(j)}\|_{\mathbf{L}_2\left(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu(\frac{l-1-j}{l})}(\Omega)\right)} + C(\eta)\|u^{(j)}\|_{\mathbf{L}_2(Q)}. \tag{4.7}$$

При $j = 0$ получаем

$$\|u\|_{\mathbf{L}_2\left(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu(\frac{l-1}{l})-\varepsilon}(\Omega)\right)} \le \eta\|u\|_{\mathbf{L}_2\left(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu(\frac{l-1}{l})}(\Omega)\right)} + C(\eta)\|u\|_{\mathbf{L}_2(Q)}. \tag{4.8}$$

Пусть $j = 1, 2, \dots, l-2$. Первую норму в правой части (4.7) оцениваем, используя теорему 2.3 о промежуточных производных [13, с. 29], теорему 2 [7, с. 394] и то, что $2\nu\left(\frac{l-1}{l}\right)\left(1 - \frac{j}{l-1}\right) = 2\nu\left(\frac{l-1-j}{l}\right)$:

$$\|u^{(j)}\|_{\mathbf{L}_2\left(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu(\frac{l-1-j}{l})}(\Omega)\right)} \le C_1\big(\|u\|_{\mathbf{L}_2\left(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu(\frac{l-1}{l})}(\Omega)\right)} + \|u\|_{\mathbf{W}_2^{l-1}(0,1;\mathbf{L}_2(\Omega))}\big). \tag{4.9}$$

Для оценки второй нормы в правой части (4.7) используем интерполяционное неравенство [13, с. 32] и неравенство Юнга с $p = \frac{l-1}{j}$, $q = \frac{l-1}{l-1-j}$:

$$\begin{aligned}\|u^{(j)}\|_{\mathbf{L}_2(Q)} &\le \|u\|_{\mathbf{W}_2^j(0,1;\mathbf{L}_2(\Omega))} = \|u\|_{[\mathbf{W}_2^{l-1}(0,1;\mathbf{L}_2(\Omega)),\mathbf{L}_2(Q)]_{1-\frac{j}{l-1},2}} \\ &\le C_2\|u\|^{\frac{j}{l-1}}_{\mathbf{W}_2^{l-1}(0,1;\mathbf{L}_2(\Omega))}\|u\|^{1-\frac{j}{l-1}}_{\mathbf{L}_2(Q)} \le \|u\|_{\mathbf{W}_2^{l-1}(0,1;\mathbf{L}_2(\Omega))} + C_3\|u\|_{\mathbf{L}_2(Q)}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Подставляя (4.8)–(4.10) в (4.7), получаем

$$\begin{aligned}\|Su\|_{\mathbf{L}_2(Q)} &\le C_0\sum_{j=0}^{l-2}\|u^{(j)}\|_{\mathbf{L}_2\left(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu(\frac{l-1-j}{l})-\varepsilon}(\Omega)\right)} \\ &\le C_0[(\eta + \eta C_1(l-2))\|u\|_{\mathbf{L}_2\left(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu(\frac{l-1}{l})}(\Omega)\right)} + (C(\eta) + C(\eta)C_3(l-2))\|u\|_{\mathbf{L}_2(Q)} \\ &\qquad + (\eta C_1 + C(\eta))(l-2)\|u\|_{\mathbf{W}_2^{l-1}(0,1;\mathbf{L}_2(\Omega))}]. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Учитывая (4.5), из (4.11) можно получить

$$\|SS_\lambda v\|_{\mathbf{L}_2(Q)} = \|Su\|_{\mathbf{L}_2(Q)} \le C_0C$$
$$\times\max\left(\eta+\eta C_1(l-2), \frac{\eta C_1(l-2) + C(\eta)(l-2) + C(\eta) + C(\eta)C_3(l-2)}{(1+\lambda)^{\frac{l-1}{l}}}\right)\|v\|_{\mathbf{L}_2(Q)}.$$

Выбираем η, ε_1 и $\lambda > 0$ такими, что

$$C_0C\max\left(\eta + \eta C_1(l-2), \frac{\eta C_1(l-2) + C(\eta)(l-2) + C(\eta) + C(\eta)C_3(l-2)}{(1+\lambda)^{\frac{l-1}{l}}}\right) < 1.$$

Воспользовавшись теоремой о неподвижной точке, получаем: существует $\lambda_0 > 0$ такое, что для $\lambda \ge \lambda_0$ решение уравнения (4.6) существует, единственно и $v = (A - B - \lambda I)u \in \mathbf{L}_2(Q)$. Значит, для $\lambda \ge \lambda_0$ задача (4.3), (1.1), (1.2) имеет единственное решение

$$u = S_\lambda v \in \mathbf{L}_2\big(0,1;\mathbf{W}^{2\nu\frac{l-1}{l}}_{2,\{B_j\}}(\Omega)\big)\cap\widetilde{\mathbf{W}}^l_{2,\{l_{i1},l_{j0}\}}\big(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu(\frac{-1}{l})}(\Omega)\big)\cap\mathbf{W}_2^{l-1}(0,1;\mathbf{L}_2(\Omega)).$$

Из (4.9) вытекает последнее утверждение теоремы. Теорема 4.1 доказана.

Замечание 4.2. Справедливо замечание 3.1, причем в качестве условия на коэффициент $a_{k,\alpha}(t,x)$ оператора S здесь можно потребовать выполнение условия $a_{k,\alpha}(t,x) \in \mathbf{L}_\infty(Q)$.

Следствие 4.1. *Пусть* $f \in \mathbf{L}_2(Q)$, $l = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, $k(1) \le 0$, $k(0) \le 0$ *и выполнены условия теоремы* 4.1. *Если решение*

$$u \in \mathbf{L}_2\big(0,1;\mathbf{W}^{2\nu\frac{l-1}{l}}_{2,\{B_j\}}(\Omega)\big)\cap\widetilde{\mathbf{W}}^l_{2,\{l_{i1},l_{j0}\}}\big(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu(\frac{-1}{l})}(\Omega)\big)\cap\mathbf{W}_2^{l-1}(0,1;\mathbf{L}_2(\Omega))$$

уравнения (1) *единственно, то оно существует.*

Доказательство. Исходное уравнение (1) можно представить в виде $Lu = (L - \lambda I)u + \lambda u = f$ или $u + (L - \lambda I)^{-1}\lambda u = (L - \lambda I)^{-1} f$, где $\lambda \geq \lambda_0$. Оператор $(L - \lambda I)^{-1}$ вполне непрерывный, так как вложение

$$\mathbf{L}_2\big(0,1;\mathbf{W}_{2,\{B_j\}}^{2\nu\frac{l-1}{l}}(\Omega)\big) \cap \widetilde{\mathbf{W}}_{2,\{l_{i1},l_{j0}\}}^{l}\big(0,1;\mathbf{W}_2^{2\nu(\frac{-1}{l})}(\Omega)\big) \cap \mathbf{W}_2^{l-1}(0,1;\mathbf{L}_2(\Omega)) \to \mathbf{L}_2(Q)$$

компактно. Следовательно, из теорем Фредгольма получаем нужное утверждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Врагов В. Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1983.

2. *Егоров И. Е., Федоров В. Е.* Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: ВЦ СО РАН, 1995.

3. *Grisvard P.* Equations differentielles abstraites // Ann. Sci. Norm. Super Pisa. (4). 1969. V. 2, N 3. P. 311–395.

4. *Grisvard P.* Commutativite de deux foncteurs d'interpolation et applications // Math. Pures Appl. Sér. IX. 1966. V. 45, N 2. P. 143–206.

5. *Da Prato G., Grisvard P.* Sommes d'opératours linéaires et équations differentielles opérationnelles // Pure Math. Appl. Sér. IX. 1975. V. 54, N 3. P. 305–387.

6. *Дубинский Ю.А.* О некоторых дифференциально-операторных уравнениях произвольного порядка // Мат. сб. 1973. Т. 90, № 1. С. 1–22.

7. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.

8. *Agmon S.* On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems // Comm. Pure Appl. Math. 1962. V. 15. P. 119–147.

9. *Pyatkov S. G.* Interpolation of weighted Sobolev spaces // Siberian Adv. Math. 2000. V. 10, N 3–4. P. 83–132.

10. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.

11. *Чуешев А. В.* Оценки резольвенты для обыкновенных дифференциальных операторов смешанного типа // Мат. труды. (Новосибирск). 2000. Т. 3, № 1. С. 144–196.

12. *Крейн М. Г.* Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения 2 // Мат. сб. 1947. Т. 21. С. 365–404.

13. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.

Статья поступила 20 мая 2000 г.

Чуешев Александр Викторович
Кемеровский гос. университет, ул. Красная, 6, Кемерово 650043
chueshev@ngs.ru