Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2002. Том 43, № 2

УДК 517.6

ТАУБЕРОВСКАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ МАЖОРИРУЕМО МЕНЯЮЩИХСЯ ВОЗРАСТАЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Б. А. Рогозин

Аннотация: Устанавливается тауберовская теорема для мажорируемо меняющихся возрастающих в 0 функций. Библиогр. 6.

Пусть $F(x)$ — монотонно неубывающая на $[0,\infty)$ функция, $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = F(0) = 0$ и $F(x) > 0$ при $x > 0$. Функция F называется *надстепенной в* 0 *возрастающей функцией*, если $\liminf\limits_{x\to 0} F(\lambda x)/F(x) > 0$ при некотором λ $(0 < \lambda < 1)$. Если F — надстепенная в 0 возрастающая функция, то функция $G(t) = F(1/t)$ называется *надстепенной на бесконечности убывающей функцией*.

Эти классы монотонных функций под названием мажорируемо меняющихся в теорию вероятностей введены в $[1,2]$. Связанные с этими функциями результаты и дальнейшие ссылки приводятся в [3]. Близкие к этому классу функции использовались в [4] под названием надстепенных, это название нами и используется здесь.

Цель работы — доказать тауберовскую теорему для надстепенных в 0 возрастающих функций. Пусть при $t > 0$ конечен интеграл Лапласа

$$\widehat{F}(t) = \int\limits_0^\infty \exp\{-tx\}\, dF_1(x),$$

где $F_1(x) = \sup\limits_{0\le y<x} F(y)$ при $x > 0$, $F_1(0) = 0$.

Теорема. *Следующие утверждения эквивалентны.*

1. $F(x)$ *— надстепенная в* 0 *возрастающая функция.*
2. $\widehat{F}(t)$ *— надстепенная на бесконечности убывающая функция.*
3. *При некоторых (всех)* $c > 0$

$$0 < \liminf_{x\to 0} \frac{F(x)}{\widehat{F}(c/x)} \le \limsup_{x\to 0} \frac{F(x)}{\widehat{F}(c/x)} < \infty.$$

Аналогичное теореме утверждение имеет место и при x, стремящемся к бесконечности (см. теорему 1 в [5]).

Для доказательства теоремы нам потребуется ввести класс подстепенных в 0 возрастающих функций. Функцию F будем называть *подстепенной в* 0 *возрастающей функцией*, если $\limsup\limits_{x\to 0} F(\lambda x)/F(x) < 1$ при некотором λ $(0 < \lambda <$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 99–01–01130 и 00–15–96178) и INTAS (проект 00–265).

1). Свойства функций G, для которых $G(t) = 1/F(1/t)$ и F — подстепенная в 0 возрастающая функция, обсуждаются в [6]. Функцию G в этом случае будем называть *надстепенной на бесконечности возрастающей функцией.* Для нее при некотором λ $(\lambda > 1)$ имеет место неравенство $\liminf\limits_{x\to\infty} G(\lambda x)/G(x) > 1$.

Отметим, что для надстепенной в 0 возрастающей функции F выполняется соотношение

$$\liminf_{x\to 0} F_1(\lambda x)/F_2(x) > 0 \tag{1}$$

с некоторым λ $(0 < \lambda < 1)$ и аналогично для подстепенной в 0 возрастающей функции F — соотношение

$$\limsup_{x\to 0} F_2(\lambda x)/F_1(x) < 1, \tag{2}$$

где $F_1(0) = F_2(0) = 0$, $F_1(t) = \sup\limits_{0\le y<t} F(y)$, $F_2(t) = \sup\limits_{0\le y\le t} F(y)$.

Выберем x_0 $(0 < x_0 < \infty)$ — точку непрерывности функции F, и $F(x_0) < F(\infty)$. Обозначим $f_1(t) = l(x : F(x) < t;\ 0 \le x \le x_0)$ при $0 \le t \le t_0 = F(x_0)$ и $f_2(t) = l(x : F(x) \le t,\ 0 \le x \le x_0)$ при $0 \le t \le t_0$, где l — мера Лебега на прямой. Тогда

$$F_1(f_2(t)) \le t \le F_2(f_1(t)), \quad 0 \le t \le t_0, \tag{3}$$

$$f_1(F_2(x)) \le x \le f_2(F_1(x)), \quad 0 \le x \le x_0. \tag{4}$$

Отметим, что если $F(x) = F_1(x) = F_2(x)$ при $0 \le x \le x_0$ и $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$ при $0 \le t \le t_0$, то F и f являются обратными функциями. В дальнейшем будем называть любую функцию f, для которой $f_1(t) \le f(t) \le f_2(t)$ при $0 \le t \le t_0$, *обратной* для $F(x)$ при $0 \le x \le x_0$.

Следующее утверждение устанавливает связь между надстепенными и подстепенными функциями.

Лемма 1. *Если F — надстепенная (подстепенная) в 0 возрастающая функция, то любая монотонная функция f, для которой $f_1(t) \le f(t) \le f_2(t)$ при $0 \le t \le t_0$, является подстепенной (надстепенной) в 0 возрастающей функцией.*

Доказательство. Пусть F — подстепенная в 0 возрастающая функция. Тогда при некоторых x_0, λ и c $(x_0 > 0,\ 0 < \lambda < 1,\ 0 < c < 1)$ будет $F(\lambda x) \le cF(x)$ для $0 \le x \le x_0$. Следовательно,

$$f_2(ct)/\lambda = l(x : F(\lambda x) \le ct,\ 0 \le x \le x_0) \ge l(x : F(x) < t,\ 0 \le x \le x_0) = f_1(t)$$

для $0 \le t \le t_0$. Отсюда с помощью соотношения (2) получаем, что любая функция f, для которой $f_1(t) \le f(t) \le f_2(t)$ при $0 \le t \le t_0$, будет надстепенной в 0 возрастающей функцией.

Пусть теперь F — надстепенная в 0 возрастающая функция. Тогда при некоторых x_0, λ и c $(x_0 > 0,\ 0 < \lambda < 1,\ 0 < c < 1)$ имеем $F(\lambda x) \ge cF(x)$ для $0 \le x \le x_0$. Следовательно,

$$f_1(ct)/\lambda = l(x : F(\lambda x) \le ct,\ 0 \le x \le x_0) \le l(x : F(x) \le t,\ 0 \le x \le x_0) = f_2(t)$$

для $0 \le t \le t_0$, откуда с помощью соотношения (1) получаем утверждение леммы и в этом случае.

Приведем утверждение, которое содержит неравенства для надстепенной и подстепенной в 0 возрастающих функций. Эти неравенства в определенной мере оправдывают их название как надстепенных и подстепенных функций.

Лемма 2. *Если F — надстепенная в 0 возрастающая функция, то при некоторых $x_0 > 0$, $\alpha > 0$, $m > 1$ при $0 \le y \le x \le x_0$*

$$F(y) \ge (y/x)^{\alpha} F(x)/m, \tag{5}$$

и если F — подстепенная в 0 возрастающая функция, то при $0 \le y \le x \le x_0$

$$F(y) \le (y/x)^{\alpha} F(x)m. \tag{6}$$

Доказательство. Неравенство (5) вытекает из аналогичных неравенств для надстепенной на бесконечности убывающей функции, которые содержатся в [3, с. 88–89] и [4, с. 172]. Неравенство (6) следует из аналогичного неравенства для надстепенных на бесконечности возрастающих функций, содержащегося в [6].

Лемма 3. *При любой постоянной $c > 0$*

$$\limsup_{x\to 0} F(x)/\widehat{F}(c/x) < \infty.$$

Доказательство. При $c > 0$ и $t > 0$

$$\widehat{F}(t) \ge \int_0^{c/t} \exp\{-tx\}\, dF_1(x) \ge e^{-c} F_2(c/t),$$

откуда и получаем утверждение леммы.

Доказательство теоремы. Пусть F — надстепенная в 0 возрастающая функция. Обозначим через f обратную к F на $[0, x_0]$ функцию. Тогда

$$\widehat{F}(u) = \int_0^{\infty} e^{-ux}\, dF_1(x) \le \int_0^{t_0} \exp\{-uf_2(t)\}\, dt + \widehat{F}(u/2) e^{-ut_0/2}.$$

Выберем t_1 таким образом, что для подстепенной в 0 возрастающей функции $f_2(t)$ имеет место неравенство $f_2(t)/f_2(w) \ge (t/w)^{\alpha}/m$ при $0 < w < t < t_1$ в силу лемм 1 и 2. Отсюда

$$\int_{F_1(c/u)}^{t_1} \exp\{-uf_2(t)\}\, dt \le F_1(c/u) \int_1^{t_1/F_1(c/u)} \exp\left\{-c\frac{f_2(vF_1(c/u))}{f_2(F_1(c/u))}\right\} dv$$
$$\le F_1(c/u) \int_1^{\infty} \exp\{-cv^{\alpha}/m\}\, dv = F_1(c/u) c_1.$$

Следовательно, при достаточно большом u_0 при $u \ge u_0$

$$\widehat{F}(u) \le F_1(c/u)(c_1 + 1) + e^{-ut_1}(t_0 - t_1) + \widehat{F}(u/2) e^{-ut_0/2} \le c_2 F_1(c/u).$$

При этом используется неравенство $F_1(x) \ge c_3 x^{\beta}$, вытекающее из леммы 2 при $0 < x < x_0$ и некоторых постоянных $c_3 > 0$ и $\beta > 0$.

Таким образом, для надстепенной в 0 возрастающей функции F с помощью леммы 3 получаем, что утверждение 3 теоремы имеет место при всех $c > 0$.

Пусть выполнено утверждение 3 теоремы при некотором $c > 0$. Докажем, что из него вытекает утверждение 1. Действительно, пусть $F(x) \ge c_1 \widehat{F}(c/x)$

при $0 < x \le x_0$, далее, с помощью леммы 3 выводим, что при некоторых $c_1 > 0$ и λ $(0 < \lambda < 1)$ будет $F(\lambda x) \le c_2 \widehat{F}(c/x)$ при $0 < x \le x_0$ и, следовательно, F — надстепенная в 0 возрастающая функция. Аналогично доказывается и утверждение 2.

Предположим, что $\widehat{F}(u)$ — надстепенная на бесконечности убывающая функция, и докажем, что $\limsup\limits_{u\to\infty} \widehat{F}(u)/F(c/u) < \infty$ при любом $c > 0$, т. е. выполняется утверждение 3 теоремы. Пусть $f_1(t)$ при $0 \le t \le t_0$ — обратная для $F(x)$ при $0 \le x \le x_0$ функция. Тогда для $u \ge u_0$, $0 < v < 1$ и некоторой постоянной $c_1 > 0$

$$c_1 \le \widehat{F}(2u)/\widehat{F}(u) \le \int\limits_{A(v,u)} e^{-2uf_1(t)}\,dt/\widehat{F}(u) + \int\limits_{B(v,u)} e^{-2uf_1(t)}\,dt/\widehat{F}(u) + e^{-ux_0}$$
$$\le l(A(v,u))/\widehat{F}(u) + v + e^{-ux_0}, \quad (7)$$

где $A(v,u) = \{t : \exp\{-uf_1(t)\} > v,\ 0 \le t \le t_0\}$, $B(v,u) = \{t : \exp\{-uf_1(t)\} \le v,\ 0 \le t \le t_0\}$. Если допустить, что при любом v $(0 < v < 1)$

$$\liminf_{u\to\infty} l(A(v,u))/\widehat{F}(u) = 0,$$

то из неравенства (7) вытекает $0 < c_1 \le v$, что невозможно. Поэтому существует v_0 $(0 < v_0 < 1)$ такое, что $\liminf\limits_{u\to\infty} l(A(v_0,u))/\widehat{F}(u) > 0$. Другими словами, при некоторых $c_2 > 0$, $c_3 > 0$ и $u > u_0$ имеем

$$l(t : f_1(t) < c_2/u,\ 0 \le t \le t_0)/\widehat{F}(u) \ge c_3,$$

т. е. $F(c_2/u)/\widehat{F}(u) \ge c_3$. Отсюда, так как $\widehat{F}$ — надстепенная на бесконечности убывающая функция, и вытекает выполнение утверждения 3 теоремы при всех $c > 0$.

Автор признателен рецензенту за информацию о работе [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Feller W.* On regular variation and local limit theorems // Proc. Fifth Berkeley sympos. math. statist. probab. V. 2. Contributions to probability theory. Part I. Berkeley: Univ. of California Press, 1967. P. 373–388.
2. *Feller W.* One-sided analogues of Karamata's regular variation // L'Enseignement Math. 1969. V. 15. P. 107–121.
3. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.
4. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972.
5. *Haan L. de, Stadtmüller U.* Dominated variation and related concepts and Tauberian theorems for Laplace transforms // J. Math. Anal. Appl. 1985. V. 108. P. 344–365.
6. *Bingham N. H., Goldie Ch. M.* Extensions of regular variation. I, II // Proc. London Math. Soc. 1982. V. 44. P. 473–534.

Статья поступила 21 февраля 2001 г.

Рогозин Борис Алексеевич
Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск 644099
rogozin@iitam.omsk.net.ru