Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2002. Том 43, № 1

УДК 517.76 : 515.16.165

О ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ СВОБОДНЫХ СХОДЯЩИХСЯ ГРУПП

Н. А. Исаченко

Аннотация: Изучаются предельные множества сходящихся групп, и доказывается, что предельное множество свободной разрывной кокомпактной сходящейся группы с инвариантной компонентой области разрывности является дисконтинуумом. Библиогр. 7.

Введение

Сходящиеся группы были введены Ф. Герингом и Дж. Мартином [1] как естественное обобщение мёбиусовых групп. Класс таких групп достаточно широк, в частности, он включает в себя так называемые равномерно квазиконформные группы, т. е. группы квазиконформных гомеоморфизмов пополненного евклидова пространства на себя, коэффициенты квазиконформности которых ограничены в совокупности.

Сходящиеся группы, являясь обобщением мёбиусовых групп, наследуют многие их свойства (см. [1]). В то же время класс сходящихся групп существенно шире. В [2] доказано существование равномерно квазиконформных групп, которые даже чисто алгебраически не могут быть изоморфны мёбиусовым.

В настоящей работе изучаются предельные множества свободных сходящихся групп и доказывается, что при достаточно естественных ограничениях предельное множество свободной разрывной сходящейся группы является дисконтинуумом.

1. Определения

Пусть $\mathbf{S}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ — расширенное n-мерное евклидово пространство, отожествленное с n-мерной сферой посредством стереографической проекции. Группу G гомеоморфизмов $\mathbf{S}^n$ на себя будем называть *сходящейся*, если из любого бесконечного множества $F \subset G$ можно выбрать последовательность $\{g_k\}$ такую, что будет выполнено одно из следующих условий:

(i) существует гомеоморфизм $f : \mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n$ такой, что g_k сходятся к f равномерно на $\mathbf{S}^n$;

(ii) существуют точки $x \in \mathbf{S}^n$, $y \in \mathbf{S}^n$ (не обязательно различные) такие, что $g_k(z)$ сходятся к y и $g_k^{-1}(z)$ сходятся к x равномерно на компактах в $\mathbf{S}^n \setminus \{x\}$ и $\mathbf{S}^n \setminus \{y\}$ соответственно.

Относительно топологии равномерной сходимости на компактах всякая сходящаяся группа является топологической группой. Сходящаяся группа называется *дискретной*, если единичный элемент изолирован в этой топологии.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96–01–01523).

Несложно видеть, что это эквивалентно тому, что для такой группы выполнено только условие (ii).

Пусть G — сходящаяся группа, действующая в $\mathbf{S}^n$, будем говорить, что G *действует разрывно в точке* $x \in \mathbf{S}^n$, если существует окрестность $U(x) \subset \mathbf{S}^n$ точки x такая, что $U(x) \cap g(U(x)) \neq \varnothing$ не более чем для конечного числа элементов $g \in G$. Множество всех таких точек называется *областью разрывности* и обозначается через $\Omega(G)$, а множество $\Lambda(G) = \mathbf{S}^n \setminus \Omega(G)$ называется *предельным множеством группы* G. Группа G называется *разрывной*, если $\Omega(G) \neq \varnothing$.

Приведем необходимые в дальнейшем сведения из трехмерной топологии и теории препятствий.

Пусть M — трехмерное многообразие. По теореме Мойза [3] на многообразии M можно ввести кусочно-линейную структуру. Поэтому в дальнейшем будем считать, что на M зафиксирована некоторая кусочно-линейная структура и все отображения являются кусочно-линейными.

Компактное двумерное многообразие $S \subset M$ (поверхность в M) называется *двусторонней вложенной поверхностью в* M, если S разбивает свою регулярную окрестность в M. Если S — замкнутая поверхность в $\mathbf{S}^3$, то *внутренностью* S назовем множество в $\mathbf{S}^3$, ограниченное S и не содержащее точку ∞.

Пусть M и N — многообразия, $\pi_1(M)$ и $\pi_1(N)$ — их фундаментальные группы. Пусть $f : M \to N$ — непрерывное отображение. Через f_* будем обозначать гомоморфизм $\pi_1(M)$ в $\pi_1(N)$, индуцированный отображением f.

Пусть X — комплекс, L — его подкомплекс, $x_0 \in L$, Y — комплекс такой, что $\pi_k(Y, y_0) = 0$ для всех $k \geqslant 2$. Пусть $f : L \to Y$ — непрерывное отображение, и $f(x_0) = y_0$. Далее $f_* : \pi_1(L, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$, $i_* : \pi_1(L, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ — гомоморфизмы, индуцированные отображением f и тождественным вложением $i : L \to X$.

Лемма 1 [4]. *При заданных выше условиях отображение f продолжается до непрерывного отображения $\hat{f} : X \to Y$ тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм $\theta : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$, замыкающий диаграмму*

$$\begin{tikzcd} \pi_1(L, x_0) \arrow[rr, "f_*"] \arrow[dr, "i_*"'] & & \pi_1(Y, y_0) \\ & \pi_1(X, x_0) \arrow[ur, "\theta"'] & \end{tikzcd}$$

в коммутативную. Причем для любого такого гомоморфизма θ существует продолжение $\hat{f} : X \to Y$ такое, что $\hat{f}_* = \theta$.

2. Предельные множества свободных сходящихся групп

В теории клейновых групп, т. е. разрывных групп мёбиусовых преобразований $\mathbf{S}^n$, известен следующий результат Н. А. Гусевского [5].

Теорема 1. *Пусть Γ — клейнова геометрически конечная свободная ранга $m \geqslant 2$ группа без параболических элементов, действующая в $\mathbf{S}^3$. Тогда ее предельное множество гомеоморфно канторовскому дисконтинууму.*

Условия геометрической конечности и отсутствия параболических элементов существенны в теореме 1. Определение геометрической конечности клейновой группы Γ использует продолжение действия Γ в $\mathbb{R}^4_+$. Поскольку не известно (по-видимому, и не верно), возможно ли действие всякой сходящейся группы продолжить в $\mathbb{R}^4_+$, то для доказательства аналогичного утверждения для свободных сходящихся групп требуются ограничения, заменяющие условия геометрической конечности и отсутствия параболических элементов. Оказывается, что вполне естественными условиями являются наличие инвариантной компоненты $\Omega_0 \in \Omega(G)$ области разрывности и компактность фактор-многообразия $M = \Omega_0/G$.

Теорема 2. *Пусть G — сходящаяся разрывная свободная ранга $m \geqslant 2$ группа, действующая в $\mathbf{S}^3$ и имеющая инвариантную компоненту Ω_0 области разрывности, и фактор-многообразие $M = \Omega_0/G$ компактно. Тогда предельное множество $\Lambda(G)$ гомеоморфно канторовскому дисконтинууму.*

Рассмотрим следующую ситуацию.

Пусть $S_1, S_1', S_2, S_2', \ldots, S_m, S_m'$ — замкнутые поверхности в $\mathbf{S}^3$, причем замыкания их внутренностей не пересекаются, S_i гомеоморфна S_i', $i = 1, 2, \ldots, m$. Пусть, далее, $g_1, g_2, \ldots, g_m$ — гомеоморфизмы $\mathbf{S}^3$ на себя такие, что $g_i(\overline{\mathrm{ext}(S_i)}) = \overline{\mathrm{int}(S_i')}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Допустим, что при этом группа $G = \langle g_1, g_2, \ldots, g_m \rangle$ сходящаяся. В п. 4 будет показано, что в этом случае G свободная, разрывная и ее предельное множество гомеоморфно канторовскому дисконтинууму.

Тем самым для доказательства теоремы 2 достаточно построить область $D \subset \mathbf{S}^3$, ограниченную $2m$ попарно не пересекающимися поверхностями S_1, S_1', $S_2, S_2', \ldots, S_m, S_m'$, и отображения $g_1, g_2, \ldots, g_m$ такие, что $g_i(\overline{\mathrm{ext}(S_i)}) = \overline{\mathrm{int}(S_i')}$, при этом $g_1, g_2, \ldots, g_m$ порождают нашу группу G.

Последующие два пункта посвящены доказательству теоремы 2. В п. 3 для группы G мы строим область D, о которой говорилось выше. В п. 4, как уже сказано, докажем, что предельное множество $\Lambda(G)$ гомеоморфно канторовскому дисконтинууму.

3. Построение области D

Лемма 2. *Если выполнены условия теоремы 2, то существуют область D и гомеоморфизмы $g_1, g_2, \ldots, g_m$ такие, что*

(1) *D ограничена $2m$ поверхностями $S_1, S_1', S_2, S_2', \ldots, S_m, S_m'$;*

(2) *замыкания внутренностей поверхностей $S_1, S_1', S_2, S_2', \ldots, S_m, S_m'$ попарно не пересекаются;*

(3) *$g_i(\overline{\mathrm{ext}(S_i)}) = \overline{\mathrm{int}(S_i')}$, $i = 1, 2, \ldots, m$;*

(4) *$g_1, g_2, \ldots, g_m$ порождают группу G.*

Доказательство. Рассмотрим накрытие $p : \Omega_0 \to M = \Omega_0/G$. Пусть $x_0 \in M$, $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, $\tau : \pi_1(M, x_0) \to G$ — естественный эпиморфизм и $p_* : \pi_1(\Omega_0, \tilde{x}_0) \to \pi_1(M, x_0)$ — естественный гомоморфизм, индуцированные накрытием $p : \Omega_0 \to M$. Пусть $H = p_*(\pi_1(\Omega_0, \tilde{x}_0))$ и $g_1, g_2, \ldots, g_m$ — свободные порождающие группы G. Для каждого g_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, выберем по представителю $\tilde{g}_i \in \tau^{-1}(g_i)$. Тогда $\pi_1(M, x_0) = \langle \tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \ldots, \tilde{g}_m, H \rangle$.

В многообразии M выберем простые петли $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, представляющие в $\pi_1(M, x_0)$ элементы $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \ldots, \tilde{g}_m$ соответственно. Обозначим через L комплекс в M, образованный петлями $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$.

Рассмотрим комплекс Y, представляющий собой букет из m окружностей $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$, касающихся друг друга в точке y_0. Фундаментальная группа $\pi_1(Y, y_0)$ является свободной ранга m, т. е. изоморфна группе G. Пусть $\varphi : G \to \pi(Y, y_0)$ — изоморфизм ($\varphi(g_i) = [Y_i]$).

Пусть $f : L \to Y$ — гомеоморфизм, $f(\alpha_i) = Y_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $f(x_0) = y_0$. Многообразие M, комплексы L и Y и отображение f полностью удовлетворяют условиям леммы 1, причем роль гомоморфизма θ играет эпиморфизм $\varphi \circ \tau$. Таким образом, существует непрерывное отображение $\hat{f} : M \to Y$ такое, что $\hat{f}|_L = f$ и $\hat{f}$ индуцирует эпиморфизм $\tau : \pi_1(M, x_0) \to G$, т. е. $\hat{f}_* = \tau$.

На каждой из окружностей Y_i выберем по точке $y_i \in Y_i$, $y_i \neq y_0$. Точки y_i можно считать регулярными в том смысле, что $\hat{f}^{-1}(y_i)$ — набор правильно вложенных двумерных многообразий, и для каждой поверхности $S \subset \hat{f}^{-1}(y_i)$ существуют окрестности $S \times [-1, 1] \subset M$ и $\{y_i\} \times [-1, 1] \subset Y_i$ такие, что для всякой точки $q \in S$ отображение $\hat{f}$, ограниченное на $\{q\} \times [-1, 1]$, представляет собой гомеоморфизм на $\{y_i\} \times [-1, 1]$. В самом деле, это следует из леммы Сарда, поскольку по теореме Мойза [3] на M можно ввести гладкую структуру и отображение $\hat{f}$ можно считать гладким.

Рассмотрим прообраз $\hat{f}^{-1}(y_i)$ точки y_i, $i = 1, 2, \ldots, m$. В нем имеется поверхность, которую обозначим через S_i, пересекающая петлю α_i. Действительно, на α_i существует точка x такая, что $\hat{f}(x) = y_i$, и, следовательно, x лежит на одной из компонент $\hat{f}^{-1}(y_i)$. Так как точка y_i регулярная, а сужение $\hat{f}$ на α_i — гомеоморфизм, петля α_i пересекает S_i ровно в одной точке. Очевидно, что поверхности S_i и S_j не пересекаются при $i \neq j$.

Рассмотрим компоненту поднятия $p^{-1}(S_i)$ поверхности S_i и обозначим ее через $\widetilde{S}_i$.

Лемма 3. *Сужение отображения p на $\widetilde{S}_i$ — гомеоморфизм.*

Доказательство. Действительно, поверхность S_i с помощью $\hat{f}$ отображается в точку, и, значит, $\hat{f}_*(i_*(\pi_1(S_i))) = 1$. Но $\hat{f}$ индуцирует естественный эпиморфизм $\tau : \pi_1(M, x_0) \to G$. Следовательно, если петля α содержится в S_i, то она представляет элемент $p_*(\pi_1(\Omega_0, \tilde{x}_0))$, а поэтому ее поднятие $\tilde{\alpha} \subset \widetilde{S}_i$ также является петлей, т. е. на $\widetilde{S}_i$ нет эквивалентных относительно G точек, тем самым сужение p на $\widetilde{S}_i$ — гомеоморфизм. $\square$

В Ω_0 существует единственный путь $\tilde{\alpha}_i$, проходящий через $\tilde{x}_0$, накрывающий путь α_i и имеющий начало на одной компоненте $p^{-1}(S_i)$, а конец — на другой. Обозначим эти компоненты через $\widetilde{S}_i$ и $\widetilde{S}'_i$.

Так как путь $\tilde{\alpha}_i$ накрывает путь α_i, а α_i представляет в $\pi_1(M, x_0)$ элемент $\tilde{g}_i$, то $g_i(\widetilde{S}_i) = \widetilde{S}'_i$.

Можно считать, что точка ∞ лежит в области разрывности группы G. Поэтому точку $\tilde{x}_0$ можно выбрать так, что $\operatorname{int}(\widetilde{S}'_1) \subset \operatorname{ext}(\widetilde{S}_1)$ и $\tilde{x}_0 \in \operatorname{ext}(\widetilde{S}'_1) \cap \operatorname{ext}(\widetilde{S}_1)$.

Лемма 4. $g_1(\operatorname{ext}(\widetilde{S}_1)) = \operatorname{int}(\widetilde{S}'_1)$.

Доказательство. Точка $\tilde{x}_0$ под действием g_1 отображается внутрь $\widetilde{S}'_1$. Действительно, допустим, что $g_1(\tilde{x}_0) \in \operatorname{ext}(S'_1)$. Рассмотрим путь α^* от точки $\tilde{x}_0$ до $g_1(\tilde{x}_0)$, накрывающий путь α_1. Так как индекс пересечения α_1 с S_1 равен единице, а сужение p на $\widetilde{S}'_1$ — гомеоморфизм, то индекс пересечения α^* с $\widetilde{S}'_1$ также равен единице. Но концы пути α^* ($\tilde{x}_0$ и $g_1(\tilde{x}_0)$) лежат во внешности поверхности $\widetilde{S}'_1$, которая, очевидно, разбивает $\mathbf{S}^3$, и потому индекс пересечения α^* с $\widetilde{S}'_1$ равен нулю. Противоречие; следовательно, $g_1(\tilde{x}_0) \in \operatorname{int}(\widetilde{S}'_1)$.

Пусть $x \in \operatorname{ext}(\widetilde{S}_1)$. Соединив x с $\tilde{x}_0$ путем в $\operatorname{ext}(\widetilde{S}_1)$ и проведя стандартные рассуждения с покрытием пути шарами, получаем, что $g_1(x) \in \operatorname{int}(\widetilde{S}'_1)$. $\square$

Теперь рассмотрим поверхности $\widetilde{S}_2$ и $\widetilde{S}'_2$. Из тех же соображений, что и для $\widetilde{S}_1$ и $\widetilde{S}'_1$, можно считать, что $\mathrm{int}(\widetilde{S}'_2) \subset \mathrm{ext}(\widetilde{S}_2)$ и $g_2(\mathrm{ext}(\widetilde{S}_2)) = \mathrm{int}(\widetilde{S}'_2)$. Кроме того, ни одна из поверхностей $\widetilde{S}_2$ и $\widetilde{S}'_2$ не может лежать ни внутри $\widetilde{S}_1$, ни внутри $\widetilde{S}'_1$, так как в противном случае путь $\tilde{\alpha}_2$ пересекал бы поверхность $\widetilde{S}_1$ или $\widetilde{S}'_1$ и, следовательно, путь α_2, накрываемый путем $\tilde{\alpha}_2$, пересекал бы поверхность S_1.

Повторяя рассуждения для остальных поверхностей $\widetilde{S}_3$, $\widetilde{S}'_3, \ldots, \widetilde{S}_m, \widetilde{S}'_m$, получим набор из $2m$ поверхностей, замыкания внутренностей которых попарно не пересекаются. При этом $g_i(\overline{\mathrm{ext}(\widetilde{S}_i)}) = \overline{\mathrm{int}(\widetilde{S}'_i)}$ и $g_1, \ldots, g_m$ порождают группу G. Таким образом, построена область D со свойствами (1)–(4). $\square$

4. Гомеоморфность предельного множества канторову дисконтинууму

В этом пункте будет доказана

Лемма 5. *Пусть $S_1, S'_1, S_2, S'_2, \ldots, S_m, S'_m$ —замкнутые поверхности, ограничивающие в $\mathbf{S}^3$ область D, замыкания внутренностей которых попарно не пересекаются. Пусть, далее, $g_1, \ldots, g_m$ — гомеоморфизмы $\mathbf{S}^3$ на себя такие, что $g_i(\overline{\mathrm{ext}(S_2)}) = \overline{\mathrm{int}(S'_i)}$. Тогда группа $G = \langle g_1, \ldots, g_m \rangle$ свободная и разрывная. Если, кроме того, G — сходящаяся группа, то ее предельное множество $\Lambda(G)$ гомеоморфно канторовскому дисконтинууму.*

Доказательство. Утверждение, что G свободна и разрывна, вполне очевидно. В самом деле, пусть $x \in D$ и $U(x)$ — окрестность точки x, содержащаяся в D. Пусть $w = w(g_1, \ldots, g_m)$ — произвольное редуцированное слово от $g_1, \ldots, g_m$. Так как $U(x)$ содержится в пересечении внешностей всех S_i и S'_i, то $w(U(x)) \cap U(x) = \varnothing$ и $w(x) \neq x$, следовательно, w представляет нетривиальный элемент в группе G и $\Omega(G) \neq \varnothing$.

Докажем, что $\Lambda(G)$ гомеоморфно канторовскому дисконтинууму.

Замыкания внутренностей поверхностей S_i и S'_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, назовем *множествами нулевого поколения.* Если $w = w(g_1, \ldots, g_m)$ — редуцированное слово длины k, то $\overline{\mathrm{int}(w(S_i))}$ и $\overline{\mathrm{int}(w(S'_i))}$ будем называть множествами k-го поколения. Пусть U_k — объединение всех множеств k-го поколения. Заметим, что, если V_1 и V_2 — различные множества одного поколения, то либо $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, либо одно содержится в другом. Кроме того, $U_{k+1} \subset U_k$ для всех $k = 1, 2, 3, \ldots$. Таким образом, предельное множество $\Lambda(G)$ лежит в пересечении всех U_k.

Группа G неэлементарная, поэтому ее предельное множество совершенно [1]. Таким образом, для доказательства того, что $\Lambda(G)$ — дисконтинуум, достаточно показать, что оно нульмерно [6].

Предположим противное. Пусть $\Lambda(G)$ содержит отрезок кривой, который обозначим через γ. Тогда для любого k существует множество k-го поколения, содержащее γ. Поскольку поверхностей S_i и S'_i конечное число, то среди таких множеств существует бесконечно много образов замыкания одной поверхности. Пусть S_i такая поверхность и $h_1, h_2, h_3, \ldots$ — последовательность элементов, для которых $\gamma \subset \overline{\mathrm{int}(h_k(S_i))}$, при этом h_k имеет длину k.

С другой стороны, поскольку G сходящаяся, то существуют точки $t_1, t_2 \in \Lambda(G)$ и подпоследовательность $\{h_{k_j}\}$ такие, что $h_{k_j}(x) \to t_2$ равномерно на компактах в $\mathbf{S}^3 \setminus t_1$. Противоречие; следовательно, $\Lambda(G)$ нульмерно и совершенно и тем самым гомеоморфно канторовскому дисконтинууму. $\square$

Из лемм 2 и 5 теперь с очевидностью следует справедливость теоремы 2.

Замечание. Поверхности $S_1, S_1', S_2, S_2', \ldots, S_m, S_m'$ в лемме 5, вообще говоря, могут быть зацеплены между собой, а потому предельное множество группы G вполне может оказаться диким дисконтинуумом, т. е. таким, что не существует гомеоморфизма $\mathbf{S}^3$ на себя, отображающего $\Lambda(G)$ на отрезок. Примеры таких групп построены М. Фридманом и Р. Скорой [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gehring F. Martin G.* Discrete quasiconformal groups. I // Proc. London Math. 1987. V. 55, N 3. P. 331–358.
2. *Исаченко Н. А.* О равномерно квазиконформных разрывных группах, не изоморфных мёбиусовым // Докл. АН СССР. 1990. Т. 313, № 5. С. 1040–1043.
3. *Moise E.* Affine structure on 3-manyfolds // Ann. of Math. 1952. V. 56. P. 96–114.
4. *Ху Сы-Цзян.* Теория гомотопий. М.: Мир, 1964.
5. *Гусевский Н. А.* Группы Шоттки в пространстве // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280, № 1. С. 30–33.
6. *Александров П. С., Пасынков В. А.* Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1980.
7. *Freedman M., Skora R.* Strange actions of groups on spheres // J. Differential Geom. 1987. V. 25. P. 75–98.

Статья поступила 30 января 2001 г.

Исаченко Николай Андреевич
Омский гос. университет, кафедра математического анализа,
пр. Мира, 55а, Омск 644077
isachenk@univer.omsk.su; isachenko@math.omsu.omskreg.ru