*Сибирский математический журнал*
*Январь—февраль, 2002. Том 43, № 1*

*УДК 512.547.212*

# МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП $O(3)$ И $SO(3)$

**В. М. Гордиенко**

**Аннотация:** Для спинорных представлений групп $O(3)$, $SO(3)$ и $SU(2)$ указаны базисы, в которых матрицы представлений вещественны. Вычислены матричные элементы в этих базисах. Описаны преобразования этими матричными элементами классических ортогональных гармонических полиномов в трехмерном пространстве. Библиогр. 4.

## § 1. Постановка задачи

Мы будем вычислять матричные элементы вещественных неприводимых представлений группы $O(3)$ ортогональных преобразований трехмерного пространства и ее подгруппы $SO(3)$, состоящей из преобразований ($3 \times 3$ матриц) с положительным определителем. Любой элемент $Q \in O(3)$ представим либо в виде $Q = P$, либо в виде $Q = -P$, где $P \in SO(3)$. Удобно параметризовать группу $SO(3)$ при помощи комплексных параметров $\alpha$ и $\beta$ таких, что $\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1$, параметризующих группу $SU(2)$, состоящую из унитарных матриц

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Каждая такая матрица $g$ задает вращение трехмерного пространства $P \in SO(3)$:

$$\begin{pmatrix} x'_{-1} \\ x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_{-1} \\ x_0 \\ x_1 \end{pmatrix},$$

с помощью формулы

$$\begin{pmatrix} x'_0 & x'_1 + ix'_{-1} \\ x'_1 - ix'_{-1} & -x'_0 \end{pmatrix} = g^* \begin{pmatrix} x_0 & x_1 + ix_{-1} \\ x_1 - ix_{-1} & -x_0 \end{pmatrix} g. \tag{1}$$

Более того, выписанная формула задает представление группы $SU(2)$ в $SO(3)$. Очевидно, что матрицы $g$ и $-g$ задают одно и то же вращение. Можно показать, что каждому вращению из $SO(3)$ соответствует только одна пара матриц $g$ и $-g$ из $SU(2)$. Понятно, что если мы имеем представление $T_g$ группы $SU(2)$ такое, что $T_g = T_{-g}$, то это представление может рассматриваться как представление группы $SO(3)$. Известно, что любое однозначное представление $T_g$ группы $SU(2)$ обладает свойством $T_g = T_{-g}$ и, значит, порождает представление группы $SO(3)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–01–00766).

Для описания представлений группы $SU(2)$ важно описать неприводимые представления, так как произвольное представление раскладывается в прямую сумму неприводимых. Известно [1–3], что однозначные неприводимые представления группы $SU(2)$ существуют только в пространстве нечетной размерности $2N+1$. При этом любые два неприводимых представления в пространствах размерности $2N+1$ эквивалентны. Число $N$ называется *весом представления*.

Удобно реализовывать неприводимое представление веса $N$ группы $SU(2)$ в пространстве однородных полиномов $h^{(N)}(\xi,\eta)$ степени $2N$ от двух формальных переменных $\xi$ и $\eta$. Это пространство имеет размерность $2N+1$. Для таких полиномов установилось название «спинорные полиномы». Представление $T_g$ ($g \in SU(2)$) в пространстве спинорных полиномов определим следующим образом:

$$T_g h(\xi,\eta) = h(\xi',\eta') = h(\bar{\alpha}\xi - \beta\eta, \bar{\beta}\xi + \alpha\eta),$$

где

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = g^* \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Итак, мы описали неприводимые представления групп $SU(2)$ и $SO(3)$. Остановимся коротко на представлениях группы $O(3)$. Мы уже отмечали, что любой элемент $Q \in O(3)$ представим либо в виде $Q = P$, либо в виде $Q = (-I_3)P$, где $I_m$ — единичная матрица порядка $m$. Поэтому если задано неприводимое представление $T_P$ веса $N$ группы $SO(3)$, то для задания представления группы $O(3)$ достаточно определить преобразование $T_{(-I_3)}$. Из общих соображений следует, что имеются две возможности $T_{(-I_3)} = \pm I_{2N+1}$. Таким образом, для каждого $N$ существуют два различных неприводимых представления веса $N$ полной ортогональной группы $O(3)$. Величину, преобразующуюся по неприводимому представлению веса $N$ группы $O(3)$, называют *вектором*, если $T_{(-I_3)} = (-1)^N I_{2N+1}$, и *псевдовектором*, если $T_{(-I_3)} = (-1)^{N+1} I_{2N+1}$.

Если в пространстве однородных спинорных полиномов степени выбран какой-либо базис $h_n^{(N)}(\xi,\eta)$, $n = -N, \dots, 0, \dots, N$, то представление $T_g$ задается матрицей $\Omega^{(N)}(\alpha,\beta)$, элементы которой определяются следующей производящей функцией:

$$T_g h_n^{(N)}(\xi,\eta) = h_n^{(N)}(\bar{\alpha}\xi - \beta\eta, \bar{\beta}\xi + \alpha\eta) = \sum_{k=-N}^{k=N} \Omega_{nk}^{(N)}(\alpha,\beta) h_k^{(N)}(\xi,\eta).$$

Излагая теорию представлений групп $SU(2)$, $SO(3)$, $O(3)$, как правило, отмечают тот факт, что конечномерные представления этих групп в подходящем базисе описываются унитарными матрицами [1–3]. На самом деле справедливо более сильное утверждение: представления этих групп описываются в подходящем базисе вещественными ортогональными матрицами. Так как нам не удалось найти соответствующего изложения в широко доступной литературе, мы приводим в этой заметке описание базиса, в котором представления групп $SU(2)$, $SO(3)$ и $O(3)$ вещественны, и вычисляем матричные элементы.

Как обычно, через $\bar{h}(\xi,\eta)$ обозначаем полином с комплексно-сопряженными коэффициентами. Нетрудно показать, что в базисе $\hat{h}_n^{(N)}(\xi,\eta) = \bar{h}_n^{(N)}(-\eta,\xi)$ элементы матрицы представления $\widehat{\Omega}^{(N)}(\alpha,\beta)$ оказываются комплексно-сопряженными элементам матрицы $\Omega^{(N)}(\alpha,\beta)$, т. е. $\widehat{\Omega}_{nk}^{(N)}(\alpha,\beta) = \overline{\Omega_{nk}^{(N)}(\alpha,\beta)}$.

В самом деле,

$$\hat{h}^{(N)}(\bar{\alpha}\xi-\beta\eta,\bar{\beta}\xi+\alpha\eta)=\bar{h}_n^{(N)}(-\bar{\beta}\xi-\alpha\eta,\bar{\alpha}\xi-\beta\eta)=\overline{h^{(N)}(\bar{\alpha}(-\eta)-\beta\xi,\bar{\beta}(-\eta)+\alpha\xi)}$$
$$=\overline{\sum_{k=-N}^{k=N}\Omega_{nk}^{(N)}(\alpha,\beta)h_k^{(N)}(-\eta,\xi)}=\sum_{k=-N}^{k=N}\overline{\Omega_{nk}^{(N)}(\alpha,\beta)}\hat{h}_k^{(N)}(\xi,\eta).$$

Поэтому если выбранный базис в пространстве спинорных полиномов обладает свойством

$$h_n^{(N)}(\xi,\eta)=\bar{h}_n(-\eta,\xi), \tag{2}$$

то в этом базисе матричные элементы будут обладать свойством

$$\Omega_{nk}^{(N)}(\alpha,\beta)=\overline{\Omega_{nk}^{(N)}(\alpha,\beta)},$$

т. е. будут вещественными.

Выберем полиномы $h_n^{(N)}(\xi,\eta)$ обладающие свойством (2):

$$h_{-n}^{(N)}(\xi,\eta)=i^{N+1}\sqrt{\frac{(2N+1)!}{2(N+n)!(N-n)!}}[\xi^{N+n}\eta^{N-n}-(-1)^n\xi^{N-n}\eta^{N+n}],\quad n\geq 1,$$

$$h_0^{(N)}(\xi,\eta)=i^N\frac{\sqrt{(2N+1)!}}{N!}\xi^N\eta^N,$$

$$h_n^{(N)}(\xi,\eta)=-i^N\sqrt{\frac{(2N+1)!}{2(N+n)!(N-n)!}}[\xi^{N+n}\eta^{N-n}+(-1)^n\xi^{N-n}\eta^{N+n}],\quad n\geq 1.$$

Скалярное произведение в пространстве спинорных полиномов зададим так, чтобы выписанные полиномы были ортонормированны. В этом базисе матрица представления $\Omega^{(N)}(\alpha,\beta)$ вещественна (и ортогональна).

После того как выбран базис в пространстве спинорных полиномов, любой полином может быть записан в виде

$$h^{(N)}(\xi,\eta)=\sum_{n=-N}^{n=N}a_n^{(N)}h_n^{(N)}(\xi,\eta).$$

Очевидно, что коэффициенты $a_n^{(N)}$ можно рассматривать как координаты вектора $a^{(N)}$ в пространстве размерности $2N+1$. При этом если преобразование базисных полиномов задается матрицей $\Omega^{(N)}(\alpha,\beta)$

$$\begin{pmatrix} T_g h_{-N}^{(N)}(\xi,\eta)\\ \vdots \\ T_g h_N^{(N)}(\xi,\eta)\end{pmatrix}=\Omega^{(N)}(\alpha,\beta)\begin{pmatrix} h_{-N}^{(N)}(\alpha,\beta)\\ \vdots \\ h_N^{(N)}(\alpha,\beta)\end{pmatrix},$$

то и преобразование вектора

$$a^{(N)}=\begin{pmatrix} a_{-N}^{(N)}\\ \vdots \\ a_N^{(N)}\end{pmatrix}$$

задается той же матрицей: $a'^{(N)}=\Omega^{(N)}(\alpha,\beta)a^{(N)}$.

Покажем, что преобразование трехмерного вектора согласуется с правилом (1). В самом деле, если $g \in SU(2)$ и $\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = g^* \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$, то $(-\eta' \ \xi') = (-\eta \ \xi)g$. Заметим еще, что

$$a_{-1}^{(1)}h_{-1}^{(1)}(\xi,\eta) + a_0^{(1)}h_0^{(1)}(\xi,\eta) + a_1^{(1)}h_1^{(1)}(\xi,\eta) = -\frac{\sqrt{6}}{2}i(-\eta \ \xi)\begin{pmatrix} a_0^{(1)} & a_1^{(1)} + ia_{-1}^{(1)} \\ a_1^{(1)} - ia_{-1}^{(1)} & -a_0^{(1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} a_{-1}^{(1)}h_{-1}^{(1)}(\xi,\eta) &+ a_0^{(1)}h_0^{(1)}(\xi,\eta) + a_1^{(1)}h_1^{(1)}(\xi,\eta) \\ &= -\frac{\sqrt{6}}{2}i(-\eta \ \xi)\begin{pmatrix} a_0^{(1)} & a_1^{(1)} + ia_{-1}^{(1)} \\ a_1^{(1)} - ia_{-1}^{(1)} & -a_0^{(1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \\ &= -\frac{\sqrt{6}}{2}i(-\eta \ \xi)gg^*\begin{pmatrix} a_0^{(1)} & a_1^{(1)} + ia_{-1}^{(1)} \\ a_1^{(1)} - ia_{-1}^{(1)} & -a_0^{(1)} \end{pmatrix}gg^*\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \\ &= -\frac{\sqrt{6}}{2}i(-\eta' \ \xi')\begin{pmatrix} a_0'^{(1)} & a_1'^{(1)} + ia_{-1}'^{(1)} \\ a_1'^{(1)} - ia_{-1}'^{(1)} & -a_0'^{(1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} \\ &= a_{-1}'^{(1)}h_{-1}^{(1)}(\xi',\eta') + a_0'^{(1)}h_0^{(1)}(\xi',\eta') + a_1'^{(1)}h_1^{(1)}(\xi',\eta'). \end{aligned}$$

Значит, выражение

$$x_{-1}h_{-1}^{(1)}(\xi,\eta) + x_0h_0^{(1)}(\xi,\eta) + x_1h_1^{(1)}(\xi,\eta)$$

является инвариантом.

Обычно базис в пространстве спинорных полиномов выбирают следующим образом:

$$e_n^{(N)}(\xi,\eta) = (-1)^{N+n}\sqrt{\frac{(2N+1)!}{(N+n)!(N-n)!}}\xi^{N+n}\eta^{N-n}, \quad n = -N,\dots,0,\dots,N.$$

Предлагаемый базис с этим базисом связан формулами ($n \geq 1$)

$$h_{-n}^{(N)}(\xi,\eta) = \frac{(-i)^{N-1}}{\sqrt{2}}\big[(-1)^n e_n^{(N)}(\xi,\eta) - e_{-n}^{(N)}(\xi,\eta)\big],$$

$$h_0^{(N)}(\xi,\eta) = (-i)^N e_0^{(N)}(\xi,\eta),$$

$$h_n^{(N)}(\xi,\eta) = -\frac{(-i)^N}{\sqrt{2}}\big[(-1)^n e_n^{(N)}(\xi,\eta) + e_{-n}^{(N)}(\xi,\eta)\big].$$

Очевидно, что переход от одного базиса к другому осуществляется унитарным преобразованием.

В группе $SU(2)$ выделяют следующие три однопараметрические подгруппы:

$$g_{-1}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad g_0(\varphi) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix},$$

$$g_1(\omega) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\omega}{2} & -i\sin\frac{\omega}{2} \\ -i\sin\frac{\omega}{2} & \cos\frac{\omega}{2} \end{pmatrix}.$$

Инфинитезимальные операторы представления $T_g$ этих подгрупп в пространстве спинорных полиномов $G_j = \frac{d}{d\omega} T_{g_j(\omega)}|_{\omega=0}$ $(j = -1, 0, 1)$ задаются формулами

$$G_{-1} = \frac{1}{2}\left(-\eta\frac{\partial}{\partial\xi} + \xi\frac{\partial}{\partial\eta}\right), \quad G_0 = \frac{i}{2}\left(-\xi\frac{\partial}{\partial\xi} + \eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right), \quad G_1 = \frac{i}{2}\left(\eta\frac{\partial}{\partial\xi} + \xi\frac{\partial}{\partial\eta}\right),$$

при этом $T_{g_j(\omega)} = e^{\omega G_j}$.

Приведем формулы, описывающие действие инфинитезимальных операторов на базисные полиномы:

$$\begin{pmatrix} G_{-1} & G_1 \\ -G_1 & G_{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_{-n}^{(N)}(\xi,\eta) \\ h_n^{(N)}(\xi,\eta) \end{pmatrix} = -\sqrt{(N+n)(N-n+1)}\begin{pmatrix} h_{-n+1}^{(N)}(\xi,\eta) \\ h_{n-1}^{(N)}(\xi,\eta) \end{pmatrix}, \quad n \geq 2;$$

$$\begin{pmatrix} G_{-1} & G_1 \\ -G_1 & G_{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_{-1}^{(N)}(\xi,\eta) \\ h_1^{(N)}(\xi,\eta) \end{pmatrix} = \sqrt{2N(N+1)}\begin{pmatrix} 0 \\ h_0^{(N)}(\xi,\eta) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} G_{-1} & -G_1 \\ G_1 & G_{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_{-n}^{(N)}(\xi,\eta) \\ h_n^{(N)}(\xi,\eta) \end{pmatrix} = \sqrt{(N+n+1)(N-n)}\begin{pmatrix} h_{-n-1}^{(N)}(\xi,\eta) \\ h_{n+1}^{(N)}(\xi,\eta) \end{pmatrix}, \quad n \geq 1;$$

$$\begin{pmatrix} G_{-1} & -G_1 \\ G_1 & G_{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ h_0^{(N)}(\xi,\eta) \end{pmatrix} = -\sqrt{\frac{N(N+1)}{2}}\begin{pmatrix} h_{-1}^{(N)}(\xi,\eta) \\ h_1^{(N)}(\xi,\eta) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & G_0 \\ -G_0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_{-n}^{(N)}(\xi,\eta) \\ h_n^{(N)}(\xi,\eta) \end{pmatrix} = n\begin{pmatrix} h_{-n}^{(N)}(\xi,\eta) \\ h_n^{(N)}(\xi,\eta) \end{pmatrix}, \quad n \geq 0.$$

При описанном соответствии $SU(2) \to SO(3)$ выделенным однопараметрическим подгруппам $g_j(\omega)$ в $SU(2)$ соответствуют однопараметрические подгруппы в $SO(3)$ — вращения вокруг координатных осей:

$$g_{-1}(\omega) \to P_{-1}(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix},$$

$$g_0(\omega) \to P_0(\omega) = \begin{pmatrix} \cos\omega & 0 & \sin\omega \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\omega & 0 & \cos\omega \end{pmatrix},$$

$$g_1(\omega) \to P_1(\omega) = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega & 0 \\ \sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Любое $g \in SU(2)$ можно представить в виде произведения трех матриц из указанных однопараметрических подгрупп, а именно

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = g_0(\omega) \cdot g_{-1}(\theta) \cdot g_0(\varphi).$$

При этом параметры Кэли — Клейна $\alpha$, $\beta$ оказываются выраженными через углы Эйлера

$$\alpha = e^{-\frac{i}{2}(\varphi+\omega)}\cos\frac{\theta}{2}, \quad \beta = e^{\frac{i}{2}(\varphi-\omega)}\sin\frac{\theta}{2}.$$

По определению представления имеем разложение

$$T_g = T_{g_0(\omega)} \cdot T_{g_{-1}(\theta)} \cdot T_{g_0(\varphi)}.$$

Поэтому матричные элементы представления $T_g$ будут вычислены, если мы вычислим матричные элементы представлений $T_{g_{-1}(\theta)}$ и $T_{g_0(\varphi)}$ двух однопараметрических подгрупп.

Матрицы этих представлений обозначим через $\Omega_{-1}^{(N)}(\theta)$ и $\Omega_0^{(N)}(\varphi)$ соответственно, а их элементы — через $\Omega_{-1,n,k}^{(N)}(\theta)$ и $\Omega_{0,n,k}^{(N)}(\varphi)$. В следующем параграфе мы вычислим эти матричные элементы, а здесь приведем результаты вычислений.

Для матрицы $\Omega_0^{(N)}(\varphi)$ имеем

$$\Omega_{0,0,0}^{(N)}(\varphi) = 1, \quad \Omega_{0,n,n}^{(N)}(\varphi) = \cos n\varphi, \quad \Omega_{0,-n,n}^{(N)} = \sin n\varphi$$

при $n = \pm 1, \pm 2, \pm N$ и $\Omega_{0,n,k}^{(N)}(\varphi) = 0$ в остальных случаях.

Для матрицы $\Omega_{-1}^{(N)}(\theta)$

$$\begin{aligned}\Omega_{-1,\pm n,\pm k}^{(N)}(\theta) = {} & \frac{(-1)^{N-k}}{2^N(1-\mu^2)^{k/2}}\sqrt{\frac{(N+k)!}{(N-k)!(N-n)!(N+n)!}} \\ & \times \left\{ \left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{d^{N-k}}{d\mu^{N-k}}[(1+\mu)^{N+n}(1-\mu)^{N-n}] \right. \\ & \left. \pm (-1)^n \left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{d^{N-k}}{d\mu^{N-k}}[(1+\mu)^{N-n}(1-\mu)^{N+n}] \right\} \quad \text{при} \quad n, k \geq 1;\end{aligned}$$

$$\Omega_{-1,0,0}^{(N)}(\theta) = \frac{(-1)^N}{2^N \cdot N!}\frac{d^N}{d\mu^N}(1-\mu^2)^N,$$

$$\Omega_{-1,0,k}^{(N)}(\theta) = -\frac{(-1)^{N-k}}{2^N \cdot N!}\sqrt{\frac{2\cdot(N+k)!}{(N-k)!}}\frac{1}{(1-\mu^2)^{k/2}}\frac{d^{N-k}}{d\mu^{N-k}}(1-\mu^2)^N \quad \text{при} \quad k \geq 1,$$

$$\Omega_{-1,n,0}^{(N)}(\theta) = -\frac{(-1)^N}{2^N \cdot N!}\sqrt{\frac{2\cdot(N+n)!}{(N-n)!}}\frac{1}{(1-\mu^2)^{n/2}}\frac{d^{N-n}}{d\mu^{N-n}}(1-\mu^2)^N \quad \text{при} \quad n \geq 1,$$

В частности, в § 3 описаны преобразования этими матричными элементами классических ортогональных гармонических полиномов в трехмерном пространстве. Как это ни удивительно, соответствующих формул для тессеральных полиномов найти не удалось. (Преобразование для полиномов с цилиндрической симметрией приводится в учебниках и справочниках.) Формулы сложения в [2, 4] используют комплексный базис, в котором выделение ортогональных представлений из унитарных затруднительно.

## § 2. Вычисление матричных элементов

Вычислим матричные элементы представления $T_{g_0(\varphi)}$, т. е. $\Omega_{0,n,k}^{(N)}(\varphi)$ — элементы матрицы $\Omega_0^{(N)}(\varphi)$. Для спинорного полинома $h(\xi,\eta)$ имеем

$$T_{g_0(\varphi)}h(\xi,\eta) = h(e^{\frac{i\varphi}{2}}\xi, e^{\frac{-i\varphi}{2}}\eta).$$

Проводя несложные вычисления для базисных полиномов $h_n^{(N)}(\xi,\eta)$, получим $(n \geq 1)$

$$\begin{aligned}T_{g_0(\varphi)}h_{-n}^{(N)}(\xi,\eta) &= \cos n\varphi \cdot h_{-n}^{(N)}(\xi,\eta) + \sin n\varphi \cdot h_n^{(N)}(\xi,\eta), \\ T_{g_0(\varphi)}h_0^{(N)}(\xi,\eta) &= h_0^{(N)}(\xi,\eta), \\ T_{g_0(\varphi)}h_n^{(N)}(\xi,\eta) &= -\sin n\varphi \cdot h_{-n}^{(N)}(\xi,\eta) + \cos n\varphi \cdot h_n^{(N)}(\xi,\eta),\end{aligned} \tag{3}$$

т. е. $\Omega^{(N)}_{0,0,0}(\varphi) = 1$, $\Omega^{(N)}_{0,n,n}(\varphi) = \cos n\varphi$, $\Omega^{(N)}_{0,-n,+n} = \sin n\varphi$ при $n = \pm 1, \pm 2, \pm N$ и $\Omega^{(N)}_{0,n,k}(\varphi) = 0$ в остальных случаях.

Переходим к вычислению матричных элементов представления $T_{g_{-1}}(\theta)$ однопараметрической подгруппы $g_{-1}(\theta)$. Матрицу этого представления обозначим через $\Omega^{(N)}_{-1}(\theta)$. Сначала выявим блочную структуру матрицы $\Omega^{(N)}_{-1}(\theta)$ и свойства симметрии ее элементов. В силу того, что любая однопараметрическая подгруппа коммутативна, справедливы тождества

$$\begin{gathered} g_{-1}(\pi)g_{-1}(\theta) = g_{-1}(\theta)g_{-1}(\pi), \quad T_{g_{-1}(\pi)} \cdot T_{g_{-1}(\theta)} = T_{g_{-1}(\theta)} \cdot T_{g_{-1}(\pi)}, \\ \Omega^{(N)}_{-1}(\pi)\Omega^{(N)}_{-1}(\theta) = \Omega^{(N)}_{-1}(\theta)\Omega^{(N)}_{-1}(\pi). \end{gathered} \tag{4}$$

Так как $g_{-1}(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, имеем $T_{g_{-1}(\pi)}h(\xi,\eta) = h(-\eta,\xi)$.

Вычисляя действие представления на базисные полиномы, получаем

$$T_{g_{-1}}(\pi)h^{(N)}_{-n}(\xi,\eta) = (-1)^{N+1}h^{(N)}_{-n}(\xi,\eta),$$

$$T_{g_{-1}}(\pi)h^{(N)}_{0}(\xi,\eta) = (-1)^{N}h^{(N)}_{0}(\xi,\eta),$$

$$T_{g_{-1}}(\pi)h^{(N)}_{n}(\xi,\eta) = (-1)^{N}h^{(N)}_{0}(\xi,\eta).$$

Таким образом, $\Omega^{(N)}_{-1}(\pi) = (-1)^N \begin{pmatrix} -I_N & 0 \\ 0 & I_{N+1} \end{pmatrix}$. Поэтому из равенства (4) вытекает следующая блочно-диагональная структура матрицы $\Omega^{(N)}_{-1}(\theta)$:

$$\Omega_{-1}(\theta) = \begin{pmatrix} A_N & 0 \\ 0 & A_{N+1} \end{pmatrix},$$

т. е. отличными от нуля могут быть только элементы $\Omega^{(N)}_{-1,-m,-k}(\theta)$ при $n,k \geq 1$ и элементы $\Omega^{(N)}_{-1,n,k}(\theta)$ при $n,k \geq 0$.

Докажем еще одно свойство симметрии для элементов матрицы $\Omega^{(N)}_{-1}(\theta)$. Легко убедиться в справедливости тождества

$$g_0(\pi) \cdot g_{-1}(-\theta) = g_{-1}(\theta) \cdot g_0(\pi).$$

Следовательно, для представлений выполнено равенство

$$T_{g_0(\pi)} \cdot T_{g_{-1}(-\theta)} = T_{g_{-1}(\theta)} \cdot T_{g_0(\pi)},$$

или

$$T_{g_0(\pi)}[T_{g_{-1}(\theta)}]^{-1} = T_{g_{-1}(\theta)} \cdot T_{g_0(\pi)}.$$

Значит, аналогичное тождество выполнено и для матриц представления

$$\Omega^{(N)}_0(\pi)\big[\Omega^{(N)}_{-1}(\theta)\big]^{-1} = \Omega^{(N)}_{-1}(\theta) \cdot \Omega^{(N)}_0(\pi).$$

В силу ортогональности нашего представления $\big[\Omega^{(N)}_{-1}(\theta)\big]^{-1} = \big[\Omega^{(N)}_{-1}(\theta)\big]^{T}$. Поэтому

$$\Omega^{(N)}_0(\pi)\big[\Omega^{(N)}_{-1}(\theta)\big]^{T} = \Omega^{(N)}_{-1}(\theta)\Omega^{(N)}_0(\pi). \tag{5}$$

Из формул (3) следует, что

$$T_{g_0(\pi)}h^{(N)}_n(\xi,\eta) = (-1)^n h^{(N)}_n(\xi,\eta),$$

т. е. $\Omega^{(N)}_{0,n,k}(\pi) = (-1)^n\delta_{nk}$. Поэтому из (5) для элементов матрицы $\Omega^{(N)}_{-1}(\theta)$ вытекает, что

$$\Omega^{(N)}_{-1,n,k}(\theta) = (-1)^{n+k}\Omega^{(N)}_{-1,k,n}(\theta). \tag{6}$$

Теперь переходим к вычислению ненулевых элементов матрицы $\Omega^{(N)}_{-1}(\theta)$. Сначала вычислим элементы с отрицательными номерами. Они определяются следующей производящей функцией ($n \geq 1$):

$$h^{(N)}_{-n}\left(\cos\frac{\theta}{2}\cdot\xi - \sin\frac{\theta}{2}\cdot\eta, \sin\frac{\theta}{2}\cdot\xi + \cos\frac{\theta}{2}\cdot\eta\right) = \sum_{k=1}^{N}\Omega^{(N)}_{-1,-n,-k}(\theta)h^{(N)}_{-k}(\xi,\eta). \tag{7}$$

Мы уже учли то, что $\Omega^{(N)}_{-1,-n,k}(\theta) = 0$ при $n \geq 1$, $k \geq 0$. Положим $\xi = 1$, $\cos\theta = \mu$, $-\sin\theta\cdot\eta = t$. Тогда

$$\begin{gathered}\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\cdot\eta = \frac{1+(\mu+t)}{2\cos\frac{\theta}{2}}, \quad \sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\cdot\eta = \frac{1-(\mu+t)}{2\sin\frac{\theta}{2}},\\ \eta = -\frac{t}{\sin\theta} = -\frac{t}{\sqrt{1-\mu^2}}.\end{gathered} \tag{8}$$

Подставляя соотношения (8) в (7), получим

$$\begin{aligned}&i^{N+1}\sqrt{\frac{(2N+1)!}{2(N+n)!(N-n)!}}\left\{\frac{[1+(\mu+t)]^{N+n}[1-(\mu+t)]^{N-n}}{2^{2N}\cos^{N+n}\frac{\theta}{2}\cdot\sin^{N-n}\frac{\theta}{2}}\right.\\ &\qquad\qquad\left. - (-1)^n\frac{[1+(\mu+t)]^{N-n}[1-(\mu+t)]^{N+n}}{2^{2N}\cos^{N-n}\frac{\theta}{2}\cdot\sin^{N+n}\frac{\theta}{2}}\right\}\\ &= i^{N+1}\sum_{k=1}^{N}\Omega^{(N)}_{-1,-n,-k}(\theta)\sqrt{\frac{(2N+1)!}{2(N+k)!(N-k)!}}\left[\frac{(-1)^{N-k}t^{N-k}}{\sin^{N-k}\theta} - \frac{(-1)^N t^{N+k}}{\sin^{N+k}\theta}\right]\end{aligned}$$

или после сокращений

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2^N\sqrt{(N+n)!(N-n)!}}\left\{\frac{[1+(\mu+t)]^{N+n}[1-(\mu+t)]^{N-n}}{\cos^n\frac{\theta}{2}\sin^{-n}\frac{\theta}{2}}\right.\\ &\qquad\qquad\left. - (-1)^n\frac{[1+(\mu+t)]^{N-n}[1-(\mu+t)]^{N+n}}{\cos^{-n}\frac{\theta}{2}\sin^n\frac{\theta}{2}}\right\}\\ &\qquad\qquad = \sum_{k=1}^{n}\frac{\Omega^{(N)}_{-1,-n,-k}(\theta)}{\sqrt{(N+k)!(N-k)!}}\left[\frac{(-1)^{N-k}t^{N-k}}{\sin^{-k}\theta} - \frac{(-1)^N t^{N+k}}{\sin^k\theta}\right].\end{aligned}$$

Перепишем еще раз, используя замены

$$\sin\theta = \sqrt{1-\mu^2}, \quad \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}}, \tag{9}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2^N\sqrt{(N+n)!(N-n)!}}\left\{\left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^{\frac{n}{2}}[1+(\mu+t)]^{N+n}[1-(\mu+t)]^{N-n}\right.\\ &\qquad\qquad\left. - (-1)^n\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\frac{n}{2}}[1+(\mu+t)]^{N-n}[1-(\mu+t)]^{N+n}\right\}\\ &= \sum_{k=1}^{N}\frac{\Omega^{(N)}_{-1,-n,-k}(\theta)}{\sqrt{(N+k)!(N-k)!}}\left[(-1)^{N-k}(1-\mu^2)^{k/2}t^{N-k} - \frac{(-1)^N t^{N+k}}{(1-\mu^2)^{k/2}}\right].\end{aligned} \tag{10}$$

Выпишем формулу Тейлора в нужной нам форме. Пусть $f(z)$ — полином степени $2N$, тогда

$$f(\mu+t)=\sum_{k=-N}^{k=N}\frac{t^{N-k}}{(N-k)!}\,\frac{d^{N-k}}{d\mu^{N-k}}f(\mu)$$
$$\equiv\frac{t^N}{N!}\,\frac{d^N}{d\mu^N}f(\mu)+\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{t^{N-k}}{(N-k)!}\,\frac{d^{N-k}}{d\mu^{N-k}}f(\mu)+\frac{t^{N+k}}{(N+k)!}\,\frac{d^{N+k}}{d\mu^{N+k}}f(\mu)\right].$$

Используя эту формулу для разложения левой части (10) по степеням $t$ и приравнивая слева и справа коэффициенты при степени $t^{N-k}$, получим

$$\Omega^{(N)}_{-1,-n,-k}(\theta)=\frac{(-1)^{N-k}}{2^N(1-\mu^2)^{k/2}}\sqrt{\frac{(N+k)!}{(N-k)!(N-n)!(N+n)!}}$$
$$\times\left\{\left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{d^{N-k}}{d\mu^{N-k}}[(1+\mu)^{N+n}(1-\mu)^{N-n}]\right.$$
$$\left.-(-1)^n\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{d^{N-k}}{d\mu^{N-k}}[(1+\mu)^{N-n}(1-\mu)^{N+n}]\right\}.$$

Вычислим ненулевые элементы матрицы $\Omega^{(N)}_{-1}(\theta)$, стоящие на центральной строке. Они определяются следующей производящей функцией:

$$h^{(N)}_0\left(\cos\frac{\theta}{2}\cdot\xi-\sin\frac{\theta}{2}\cdot\eta,\ \sin\frac{\theta}{2}\cdot\xi+\cos\frac{\theta}{2}\cdot\eta\right)=\sum_{k=0}^{N}\Omega^{(N)}_{-1,0,k}(\theta)h^{(N)}_k(\xi,\eta).$$

Подставляя соотношения (8) в это тождество, имеем

$$\frac{i^N\sqrt{(2N+1)!}}{N!}\,\frac{[1+(\mu+t)]^N[1-(\mu+t)]^N}{2^N\cos^N\frac{\theta}{2}\cdot 2^N\sin^N\frac{\theta}{2}}$$
$$=i^N\Omega^{(N)}_{-1,0,0}(\theta)\frac{\sqrt{(2N+1)!}}{N!}\,\frac{(-1)^Nt^N}{\sin^N\theta}$$
$$-i^N\sum_{k=1}^{N}\Omega^{(N)}_{-1,0,k}(\theta)\sqrt{\frac{(2N+1)!}{2(N+k)!(N-k)!}}\left[\frac{(-1)^{N-k}t^{N-k}}{\sin^{N-k}\theta}+\frac{(-1)^Nt^{N+k}}{\sin^{N+k}\theta}\right]$$

или после упрощений

$$\frac{1}{2^NN!}[1-(\mu+t)^2]^N=\Omega^{(N)}_{-1,0,0}(\theta)\frac{(-1)^Nt^N}{N!}$$
$$-\sum_{k=1}^{N}\frac{\Omega^{(N)}_{-1,0,k}(\theta)}{\sqrt{2(N+k)!(N-k)!}}\left[(-1)^{N-k}(1-\mu^2)^{k/2}t^{N-k}+\frac{(-1)^Nt^{N+k}}{(1-\mu^2)^{k/2}}\right].$$

Приравнивая в этом равенстве коэффициенты при $t^N$ и $t^{N-k}$, находим

$$\Omega^{(N)}_{-1,0,0}(\theta)=\frac{(-1)^N}{2^N\cdot N!}\frac{d^N}{d\mu^N}(1-\mu^2)^N,$$

$$\Omega^{(N)}_{-1,0,k}(\theta)=-\frac{(-1)^{N-k}}{2^N\cdot N!}\sqrt{\frac{2\cdot(N+k)!}{(N-k)!}}\,\frac{1}{(1-\mu^2)^{k/2}}\,\frac{d^{N-k}}{d\mu^{N-k}}(1-\mu^2)^N.$$

В силу равенства (6) имеем

$$\Omega^{(N)}_{-1,n,0}(\theta) = -\frac{(-1)^N}{2^N\cdot N!}\sqrt{\frac{2\cdot(N+n)!}{(N-n)!}}\,\frac{1}{(1-\mu^2)^{n/2}}\,\frac{d^{N-n}}{d\mu^{N-n}}(1-\mu^2)^N.$$

Теперь вычислим элементы матрицы $\Omega^{N)}_{-1}(\theta)$ с положительными номерами $(n\geq 1)$:

$$h^{(N)}_n\left(\cos\frac{\theta}{2}\cdot\xi-\sin\frac{\theta}{2}\cdot\eta,\sin\frac{\theta}{2}\cdot\xi+\cos\frac{\theta}{2}\cdot\eta\right)=\sum_{k=0}^{N}\Omega^{(N)}_{-1,n,k}(\theta)h^{(N)}_k(\xi,\eta).$$

Подставляя соотношения (8) в это тождество, получим

$$\begin{aligned}
-\,i^N\sqrt{\frac{(2N+1)!}{2(N+n)!(N-n)!}}&\left\{\frac{[1+(\mu+t)]^{N+n}[1-(\mu+t)]^{N-n}}{2^N\cos^{N+n}\frac{\theta}{2}\cdot 2^N\sin^{N-n}\frac{\theta}{2}}\right.\\
+(-1)^n\,&\left.\frac{[1+(\mu+t)]^{N-n}[1-(\mu+t)]^{N+n}}{2^N\cos^{N-n}\frac{\theta}{2}\cdot 2^N\sin^{N+n}\frac{\theta}{2}}\right\}=i^N\Omega^{(N)}_{-1,n,0}(\theta)\frac{\sqrt{(2N+1)!}}{N!}\,\frac{(-1)^Nt^N}{\sin^N\theta}\\
&-\,i^N\sum_{k=1}^{N}\Omega^{(N)}_{-1,n,k}(\theta)\sqrt{\frac{(2N+1)!}{2(N+k)!(N-k)!}}\left[\frac{(-1)^{N-k}t^{N-k}}{\sin^{N-k}\theta}+\frac{(-1)^Nt^{N+k}}{\sin^{N+k}\theta}\right]
\end{aligned}$$

или после упрощений

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^N\sqrt{2(N+n)!(N-n)!}}&\left\{\left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^{\frac{n}{2}}[1+(\mu+t)]^{N+n}[1-(\mu+t)]^{N-n}\right.\\
+(-1)^n\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\frac{n}{2}}&\left.[1+(\mu+t)]^{N-n}[1-(\mu+t)]^{N+n}\right\}=-\frac{(-1)^Nt^N}{N!}\Omega^{(N)}_{-1,n,0,}(\theta)\\
&+\sum_{k=1}^{N}\frac{\Omega^{(N)}_{-1,n,k,}(\theta)}{\sqrt{2(N+k)!(N-k)!}}\left[(-1)^{N-k}(1-\mu^2)^{k/2}t^{N-k}+\frac{(-1)^Nt^{N+k}}{(1-\mu^2)^{k/2}}\right].
\end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при степени $t^{N-k}$, приходим к равенству

$$\begin{aligned}
\Omega^{(N)}_{-1,n,k,}(\theta)=\frac{(-1)^{N-k}}{2^N(1-\mu^2)^{k/2}}&\sqrt{\frac{(N+k)!}{(N-k)!(N+n)!(N-n)!}}\\
&\left[\left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{d^{N-k}}{d\mu^{N-k}}(1+\mu)^{N+n}(1-\mu)^{N-n}\right.\\
&\left.+(-1)^n\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{d^{N-k}}{d\mu^{N-k}}(1+\mu)^{N-n}(1-\mu)^{N+n}\right].
\end{aligned}$$

## § 3. Классическое представление в пространстве ортогональных полиномов

Как мы уже отмечали, выражение

$$x_{-1}h^{(1)}_{-1}(\xi,\eta)+x_0h^{(1)}_0(\xi,\eta)+x_1h^{(1)}_1(\xi,\eta)$$

является инвариантом. Обозначим

$$\Phi^{-1}_1(x_{-1},x_0,x_1)=\frac{x_{-1}}{\sqrt{6}},\quad \Phi^0_1(x_{-1},x_0,x_1)=\frac{x_0}{\sqrt{6}},\quad \Phi^1_1(x_{-1},x_0,x_1)=\frac{x_1}{\sqrt{6}}.$$

Выражение

$$\left[\Phi_1^{-1}(x_{-1},x_0,x_1)h_{-1}^{(1)}(\xi,\eta)+\Phi_1^{0}(x_{-1},x_0,x_1)h_{0}^{(1)}(\xi,\eta)+\Phi_1^{1}(x_{-1},x_0,x_1)h_{1}^{(1)}(\xi,\eta)\right]^N$$

тоже является инвариантом. Определим полиномы $\Phi_N^n(x_{-1},x_0,x_1)$ с помощью следующей производящей функции:

$$\left[\Phi_1^{-1}(x_{-1},x_0,x_1)h_{-1}^{(1)}(\xi,\eta)+\Phi_1^{0}(x_{-1},x_0,x_1)h_{0}^{(1)}(\xi,\eta)+\Phi_1^{1}(x_{-1},x_0,x_1)h_{1}^{(1)}(\xi,\eta)\right]^N = N!\sum_{n=-N}^{n=N}\Phi_N^n(x_{-1},x_0,x_1)h_n^N(\xi,\eta). \quad (11)$$

Полиномы $\Phi_N^n(x_{-1},x_0,x_1)$, $n=-N,\dots,N$, являются однородными гармоническими, образуют базис в пространстве однородных гармонических полиномов и преобразуются по неприводимому представлению веса $N$. Получим явные формулы для этих полиномов. Напомним, что

$$h_{-1}^{(1)}(\xi,\eta)=-\frac{\sqrt{6}}{2}(\xi^2+\eta^2),\quad h_{0}^{(1)}(\xi,\eta)=i\sqrt{6}\xi\eta,\quad h_{1}^{(1)}(\xi,\eta)=i\frac{\sqrt{6}}{2}(\eta^2-\xi^2).$$

Мы будем использовать сферическую систему координат

$$x_{-1}=r\sin\theta\sin\varphi\quad x_0=r\cos\theta\quad x_1=r\sin\theta\cos\varphi.$$

Преобразуем левую часть производящей функции (11):

$$\Phi_1^{-1}(x_{-1},x_0,x_1)h_{-1}^{(1)}(\xi,\eta)+\Phi_1^{0}(x_{-1},x_0,x_1)h_{0}^{(1)}(\xi,\eta)+\Phi_1^{1}(x_{-1},x_0,x_1)h_{1}^{(1)}(\xi,\eta)$$
$$=-\frac{x_{-1}}{2}(\xi^2+\eta^2)+ix_0\xi\eta+i\frac{x_1}{2}(\eta^2-\xi^2)=\frac{i}{2}[(x_1+ix_{-1})\eta^2+2x_0\eta\xi-(x_1-ix_{-1})\xi^2]$$
$$=\frac{ir}{2}[\sin\theta e^{i\varphi}\eta^2+2\cos\theta\xi\eta-\sin\theta e^{-i\varphi}\xi^2].$$

Положим $\xi=1$, $t=\sin\theta e^{i\varphi}\eta$. Тогда

$$\Phi_1^{-1}(x_{-1},x_0,x_1)h_{-1}^{(1)}(1,\eta)+\Phi_1^{0}(x_{-1},x_0,x_1)h_{0}^{(1)}(1,\eta)+\Phi_1^{1}(x_{-1},x_0,x_1)h_{1}^{(1)}(1,\eta)$$
$$=\frac{ir}{2}\left[\eta t+2\cos\theta\cdot\eta-\frac{\sin^2\theta\cdot\eta}{t}\right]=\frac{ir\eta}{2t}[t^2+2\cos\theta\cdot t+\cos^2\theta-1]$$
$$=\frac{ir\eta}{2t}[t^2+2\mu t+\mu^2-1]=-\frac{ir\eta}{2t}[1-(t+\mu)^2].$$

Таким образом, для левой части производящей функции (11) при $\xi=1$ имеем

$$\left[\Phi_1^{-1}(x_{-1},x_0,x_1)h_{-1}^{(1)}(1,\eta)+\Phi_1^{0}(x_{-1},x_0,x_1)h_{0}^{(1)}(1,\eta)+\Phi_1^{1}(x_{-1},x_0,x_1)h_{1}^{(1)}(1,\eta)\right]^N$$
$$=\left(-\frac{ir\eta}{2t}\right)^N[1-(t+\mu)^2]^N=\left(-\frac{ir\eta}{2t}\right)^N\sum_{n=-N}^{n=N}\frac{1}{(N+n)!}\,\frac{d^{N+n}}{d\mu^{N+n}}(1-\mu^2)^Nt^{N+n}$$
$$=\left(\frac{-ir}{2}\right)^N\sum_{n=-N}^{n=N}\frac{(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}}{(N+n)!}e^{in\varphi}\frac{d^{N+n}}{d\mu^{N+n}}(1-\mu^2)^N\eta^{N+n}$$
$$=i^Nr^NN!\sum_{n=-N}^{N}\frac{(-1)^nP_N^n(\mu)e^{in\varphi}}{\sqrt{(2N+1)(N+n)!(N-n)!}}\eta^{N+n}.$$

Мы обозначили

$$P_N^n(\mu)=\frac{(-1)^{N+n}}{2^N\cdot N!}\sqrt{\frac{(2N+1)(N-n)!}{(N+n)!}}(1-\mu)^{\frac{n}{2}}\frac{d^{N+n}}{d\mu^{N+n}}(1-\mu^2)^N.$$

Разложим правую часть равенства (11) при $\xi=1$ по степеням $\eta$:

$$\begin{aligned}
N!\Bigg\{\sum_{n=1}^{N}\big[\Phi_N^{-n}(x_{-1},x_0,x_1)h_{-n}^{(N)}(1,\eta)+\Phi_N^{n}(x_{-1},x_0,x_1)h_{n}^{(N)}(1,\eta)\big]&\\
+\Phi_N^{0}(x_{-1},x_0,x_1)h_{0}^{(N)}(1,\eta)\Bigg\}&\\
=i^N N!\sum_{n=1}^{N}\sqrt{\frac{(2N+1)!}{2(N+n)!(N-n)!}}\big[\Phi_N^{-n}(x_{-1},x_0,x_1)i(\eta^{N-n}-(-1)^n\eta^{N+n})&\\
-\Phi_N^{n}(x_{-1},x_0,x_1)(\eta^{N-n}+(-1)^n\eta^{N+n})\big]+i^N\sqrt{(2N+1)!}\Phi_N^0(x_{-1},x_0,x_1)\eta^N&\\
=i^N N!\sum_{n=1}^{N}\sqrt{\frac{(2N+1)!}{2(N+n)!(N-n)!}}\big[(-\Phi_N^{n}(x_{-1},x_0,x_1)+i\Phi_N^{-n}(x_{-1},x_0,x_1))\eta^{N-n}&\\
-(-1)^n(\Phi_N^{n}(x_{-1},x_0,x_1)+\Phi_N^{-n}(x_{-1},x_0,x_1))\eta^{N+n}\big]&\\
+i^N\sqrt{(2N+1)!}\Phi_N^0(x_{-1},x_0,x_1)\eta^N.&
\end{aligned}$$

Таким образом, мы получили следующее разложение по степеням $\eta$ левой и правой частей равенства (11):

$$\begin{aligned}
r^N\sum_{n=-N}^{N}\frac{(-1)^nP_N^n(\mu)e^{in\varphi}}{\sqrt{(2N+1)(N+n)!(N-n)!}}\eta^{N+n}&\\
=\sum_{n=1}^{N}\sqrt{\frac{(2N+1)!}{2(N+n)!(N-n)!}}\big[\big(-\Phi_N^{n}(x_{-1},x_0,x_1)+i\Phi_N^{-n}(x_{-1},x_0,x_1)\big)\eta^{N-n}&\\
-(-1)^n\big(\Phi_N^{n}(x_{-1},x_0,x_1)+i\Phi_N^{-n}(x_{-1},x_0,x_1)\big)\eta^{N+n}\big]&\\
+\frac{\sqrt{(2N+1)!}}{N!}\Phi_N^0(x_{-1},x_0,x_1)\eta^N.&
\end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при степенях $\eta^{N+n}$ и $\eta^N$, получим

$$\Phi_N^{-n}(x_{-1},x_0,x_1)=-\frac{\sqrt{2}r^N\sin n\varphi}{\sqrt{(2N+1)(2N+1)!}}P_N^n(\cos\theta),$$

$$\Phi_N^{0}(x_{-1},x_0,x_1)=\frac{r^N}{\sqrt{(2N+1)(2N+1)!}}P_N^0(\cos\theta),$$

$$\Phi_N^{n}(x_{-1},x_0,x_1)=-\frac{\sqrt{2}r^N\cos n\varphi}{\sqrt{(2N+1)(2N+1)!}}P_N^n(\cos\theta).$$

Построенные полиномы $\Phi_N^n(x_{-1},x_0,x_1)$, $n=-N,\dots,N$, как было указано, образуют базис в пространстве однородных гармонических полиномов и преобразуются по неприводимому представлению веса $N$ по тем же формулам, что и базисные спинорные полиномы $h^{(N)}(\xi,\eta)$. В частности, если координаты

$(x_{-1}, x_0, x_1)$ повернуть вокруг оси $x_{-1}$ на угол $\theta$, то полиномы $\Phi_N^n(x_{-1}, x_0, x_1)$ преобразуются с помощью матрицы $\Omega_{-1}^{(N)}(\theta)$, а именно

$$\Phi_N^n(x_{-1}, x_0\cos\theta + x_1\sin\theta, -x_0\sin\theta + x_1\cos\theta) = \sum_{k=-N}^{k=N} \Omega_{-1,n,k}^{(N)}(\theta)\Phi_N^k(x_{-1}, x_0, x_1).$$

Выписанная формула является обобщением теоремы сложения $[2, 4]$.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я.* Представления группы вращений и группы Лоренца. М.: Физматгиз, 1958.
2. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1991.
3. *Годунов С. К., Михайлова Т. Ю.* Представления группы вращений и сферические функции. Новосибирск: Научная книга, 1998.
4. *Гобсон Е. В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: Изд-во иностр. лит., 1952.


*Статья поступила 14 сентября 2001 г.*

*Гордиенко Валерий Михайлович*
*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090*
gordienk@math.nsc.ru