Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2002. Том 43, № 1

УДК 510.64

О СВОЙСТВЕ БЕТА В РАСШИРЕНИЯХ ЛОГИК ЛУКАСЕВИЧА

Д. Е. Тишковский

Аннотация: Доказано, что необходимым условием того, чтобы консервативные аксиоматические расширения бесконечнозначной (или n-значной) логики Лукасевича обладали свойством определимости Бета, является наличие в языке этих расширений счетного множества (соответственно множества мощности n) неэквивалентных относительно данных расширений константных термов. Библиогр. 2.

В последнее время большое внимание уделяется так называемым нечетким логическим системам, характерными примерами которых являются бесконечнозначная и n-значные логики Лукасевича. Следующим простым примером легко опровергнуть интерполяционную теорему Крейга в бесконечнозначной логике Лукасевича. Рассмотрим формулу $(p \wedge \neg p) \supset (q \vee \neg q)$. Данная формула верна в логике Лукасевича. Но она не имеет интерполянта, так как интерполянт не должен содержать пропозициональных переменных, т. е. должен быть константным термом, а все константные термы эквивалентны в логике Лукасевича либо константе $\perp$ («ложь»), либо константе $\top$ («истина»). Исходя из данного примера, можно предположить, что для выполнимости в логике Лукасевича теоремы Крейга в языке логики не хватает пропозициональных констант.

В данной работе доказано, что необходимым условием того, чтобы консервативные аксиоматические расширения бесконечнозначной (или n-значной) логики Лукасевича обладали свойством определимости Бета, является наличие в языке этих расширений счетного множества (соответственно множества мощности n) неэквивалентных относительно данных расширений константных термов.

1. Определения

Пусть алфавит пропозиционального языка $\mathscr{L}_0$ включает в себя счетное множество пропозициональных переменных $p, q, r, \dots$, пропозициональные константы $\top$ и $\perp$, логические связки $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\supset$ и вспомогательные символы (,). Через For обозначим множество формул языка $\mathscr{L}_0$. Для любых формул A и B выражение $A \equiv B$ служит сокращением формулы $(A \supset B) \wedge (B \supset A)$.

Далее будем рассматривать только те пропозициональные языки, которые являются обогащением языка $\mathscr{L}_0$ новыми пропозициональными константами и логическими связками. Пропозициональные константы и логические связки всякого рассматриваемого языка будем называть *логическими символами*.

Работа выполнена при финансовой поддержке Гуманитарного научного фонда (код проекта 00–03–00108).

© 2002 Тишковский Д. Е.

Формулы без пропозициональных переменных будем называть *константными термами.*

Логикой будем называть всякое множество формул некоторого языка $\mathscr{L}$, замкнутое относительно *modus ponens* и пропозиционального правила подстановки. Через $\vdash_L$ будем обозначать обычное отношение выводимости в логике L.

Пусть множество функциональных символов алгебры $\mathscr{A}$ содержит множество логических символов языка $\mathscr{L}$. *Интерпретацией* v формул языка $\mathscr{L}$ в алгебре $\mathscr{A}$ называется произвольный гомоморфизм из алгебры всех формул языка $\mathscr{L}$ в указанную алгебру. Формула A называется *истинной* в данной алгебре при данной интерпретации v, если ее значение vA совпадает с $\top$. Формула A *общезначима* в данной алгебре, если она истинна в этой алгебре при любой интерпретации.

Пусть $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — произвольные алгебры, L — логика. Будем говорить, что $\mathscr{B}$ является *L-расширением* алгебры $\mathscr{A}$, если выполнены следующие условия:

1) множество функциональных символов алгебры $\mathscr{B}$ содержит множество логических символов языка логики L;

2) множество логических символов языка логики L содержит множество функциональных символов алгебры $\mathscr{A}$;

3) все формулы из L общезначимы в алгебре $\mathscr{B}$.

Канонической алгеброй $\mathscr{A}_\omega$ бесконечнозначной логики Лукасевича называется алгебра

$$\mathscr{A}_\omega \rightleftharpoons \langle \mathbb{Q}[0,1], \wedge, \vee, \neg, \supset, \bot, \top \rangle,$$

где $\mathbb{Q}[0,1]$ — множество всех рациональных чисел отрезка $[0,1]$ вещественной прямой, и для всех $a, b \in \mathbb{Q}[0,1]$

1) $\bot \rightleftharpoons 0$ и $\top \rightleftharpoons 1$;

2) $a \wedge b \rightleftharpoons \min(a,b)$;

3) $a \vee b \rightleftharpoons \max(a,b)$;

4) $a \supset b \rightleftharpoons \min(1, 1-a+b)$;

5) $\neg a \rightleftharpoons 1-a$.

Канонической алгеброй n-значной логики Лукасевича ($n < \omega$) называется подалгебра $\mathscr{A}_n$ алгебры $\mathscr{A}_\omega$, порожденная множеством

$$\mathbb{Q}_n[0,1] \rightleftharpoons \left\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}.$$

Бесконечнозначной и n-значной *логиками Лукасевича* [1] называются множества формул языка $\mathscr{L}_0$, общезначимых в алгебре $\mathscr{A}_\omega$ и соответственно в алгебре $\mathscr{A}_n$. Бесконечнозначную логику Лукасевича будем обозначать через $\L_\omega$, а n-значную логику Лукасевича — через $\L_n$.

Пусть A — формула, $r_1, \dots, r_k$ — *различные* пропозициональные переменные. Будем писать $A(r_1, \dots, r_k)$ вместо A, если все пропозициональные переменные из A содержатся среди $r_1, \dots, r_k$. Если q — пропозициональная переменная, то через $A(q, r_1, \dots, r_k)$ будем обозначать формулу, полученную из $A(p, r_1, \dots, r_k)$ заменой символа p на q. Пусть далее $p, q, r_1, \dots, r_k$ — *различные* пропозициональные переменные.

Говорим, что формула $A(p, r_1, \dots, r_k)$ *неявно определяет* переменную p в логике L, если выполнено $A(p, r_1, \dots, r_k), A(q, r_1, \dots, r_k) \vdash_L p \equiv q$. Формула $A(p, r_1, \dots, r_k)$ *явно определяет* переменную p в логике L, если существует такая формула $B(r_1, \dots, r_k)$, что $A(p, r_1, \dots, r_k) \vdash_L p \equiv B(r_1, \dots, r_k)$. Логика L обладает *свойством Бета* (в [2] это свойство называется свойством Бета B2), если любая формула $A(p, r_1, \dots, r_k)$, определяющая в логике L переменную p неявно, определяет в логике L эту же переменную p явно.

2. Вспомогательные леммы

Пусть A и B — формулы. Введем следующее обозначение:

$$A \supset_0 B \rightleftharpoons B, \quad A \supset_{m+1} B \rightleftharpoons A \supset (A \supset_m B).$$

Для каждого $n \geq 0$ пусть $A_n(p)$ — формула

$$A_n(p) \rightleftharpoons ((p \supset_n \perp) \supset p) \equiv (p \supset_{n+1} \perp).$$

Лемма 2.1. *Для любой интерпретации переменных $v : \mathrm{For} \to A_\omega$ при $n \geq 1$*

$$v(p \supset_n \perp) = \begin{cases} n(1 - vp), & \text{если } vp \geq \frac{n-1}{n}, \\ 1 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство проводится индукцией по $n \geq 1$. При $n = 1$ имеем $v(p \supset_n \perp) = v(p \supset \perp) = vp \supset v\perp = vp \supset 0 = 1 - vp$, что обеспечивает базис индукции.

Предположим, что утверждение леммы верно при $n \leq m$. Докажем, что утверждение леммы верно и при $n = m + 1$.

1. Пусть $vp \geq \frac{m}{m+1}$ или, в другой записи, $vp \geq m(1 - vp)$. Тогда $vp \geq \frac{m-1}{m}$. По индукционной гипотезе $v(p \supset_m \perp) = m(1 - vp)$. Следовательно,

$$vp \geq v(p \supset_m \perp).$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} v(p \supset_{m+1} \perp) &= vp \supset v(p \supset_m \perp) \\ &= 1 - vp + v(p \supset_m \perp) = (1 - vp) + m(1 - vp) = (m + 1)(1 - vp), \end{aligned}$$

что и требовалось.

2. Пусть $vp < \frac{m}{m+1}$, т. е. $vp < m(1 - vp)$.

(a) Предположим, что $vp < \frac{m-1}{m}$. Тогда по индукционной гипотезе

$$v(p \supset_m \perp) = 1.$$

Отсюда

$$v(p \supset_{m+1} \perp) = vp \supset v(p \supset_m \perp) = vp \supset 1 = 1.$$

(b) Пусть $vp \geq \frac{m-1}{m}$. Тогда по индукционному предположению $v(p \supset_m \perp) = m(1 - vp)$. Так как $vp < m(1 - vp)$, имеем

$$v(p \supset_{m+1} \perp) = vp \supset v(p \supset_m \perp) = 1.$$

Лемма 2.2. *Для всякой интерпретации $v : \mathrm{For} \to \mathscr{A}_\omega$ при $n \geq 0$ верна эквивалентность*

$$\mathscr{A}_\omega \models v(A_n(p)) = 1 \iff vp = \frac{n}{n+1}.$$

Доказательство. Пусть $vp = \frac{n}{n+1}$. Тогда по лемме 2.1 имеем

$$v(p \supset_n \perp) = n(1 - vp) = \frac{n}{n+1}.$$

Следовательно,

$$v(A_n(p)) = v(p \supset_n \bot) \supset vp \equiv vp \supset v(p \supset_n \bot) = 1.$$

Обратно, пусть $v(A_n(p)) = 1$.

1. Пусть $vp \geq v(p \supset_n \bot)$. Тогда $v(A_n(p)) = 1 \equiv 1 - vp + v(p \supset_n \bot)$. Если $vp < \frac{n-1}{n}$, то по лемме 2.1 $v(p \supset_n \bot) = 1$. Отсюда

$$1 > \frac{n-1}{n} > vp \geq v(p \supset_n \bot) = 1,$$

что невозможно. Значит, $vp \geq \frac{n-1}{n}$. Тогда по лемме 2.1 $v(p \supset_n \bot) = n(1 - vp)$. Отсюда

$$1 - vp + v(p \supset_n \bot) = (n+1)(1 - vp)$$

и, поскольку $v(A_n(p)) = 1$, получаем $vp = \frac{n}{n+1}$.

2. Пусть $vp < v(p \supset_n \bot)$. Тогда

$$v(A_n(p)) = 1 - v(p \supset_n \bot) + vp \equiv 1.$$

Если $vp < \frac{n-1}{n}$, то по лемме 2.1 $v(p \supset_n \bot) = 1$. Но тогда, учитывая $v(A_n(p)) = 1$, получаем $vp = 1$, что несовместно с $vp < \frac{n-1}{n}$. Таким образом, $vp \geq \frac{n-1}{n}$. По лемме 2.1 $v(p \supset_n \bot) = n(1 - vp)$. Значит,

$$1 = 1 - v(p \supset_n \bot) + vp = (n+1)(1 - vp),$$

и, следовательно, $vp = \frac{n}{n+1}$.

Лемма 2.3. *$A_n(p)$ неявно определяет p в $Ł_\omega$.*

Доказательство. Пусть $v(A_n(p)) = v(A_n(p')) = 1$ в $\mathscr{A}_\omega$. Тогда по лемме 2.2 $vp = vp' = \frac{n}{n+1}$ и, значит, $v(p \equiv p') = 1$. Поскольку v произвольно, имеем $A_n(p), A_n(p') \models_{\mathscr{A}_\omega} p \equiv p'$. Так как $Ł_\omega$ полна относительно $\mathscr{A}_\omega$, получаем $A_n(p), A_n(p') \vdash_{Ł_\omega} p \equiv p'$, что и требовалось доказать.

Используя те же рассуждения, что и в доказательстве леммы 2.3, нетрудно получить следующее аналогичное утверждение для конечнозначных логик Лукасевича.

Следствие 2.4. *$A_n(p)$ неявно определяет p в $Ł_{n+2}$.*

3. Основной результат

Теорема 3.1. *Пусть L — аксиоматическое консервативное расширение логики $Ł_\omega$ ($Ł_n$, $n < \omega$). Если L обладает свойством Бета, то для всякого рационального числа a из $\mathbb{Q}[0,1]$ (соответственно из $\mathbb{Q}_n[0,1]$) существует константный терм t_a в языке логики L такой, что в любом L-расширении канонической алгебры Лукасевича $\mathscr{A}_\omega$ (соответственно $\mathscr{A}_n$) терм t_a интерпретируется как a.*

Доказательство. Докажем сначала утверждение теоремы для бесконечнозначной логики Лукасевича.

Пусть L — аксиоматическое консервативное расширение логики $Ł_\omega$. Тогда по лемме 2.3 $A_n(p)$ неявно определяет p в L. Так как L обладает свойством Бета, существует формула без пропозициональных переменных B_n такая, что $A_n(p) \vdash_L p \equiv B_n$.

Пусть $\mathscr{A}$ — L-расширение $\mathscr{A}_\omega$. Тогда, поскольку L — аксиоматическое расширение $Ł_\omega$, верно $A_n(p) \models_{\mathscr{A}} p \equiv B_n$.

Пусть интерпретация переменных v такова, что $vp = \frac{n}{n+1}$. Тогда по лемме 2.2 $v(A_n(p)) = 1$. Следовательно, $v(p \equiv B_n) = 1$, и, значит, $v(B_n) = \frac{n}{n+1}$. Поскольку B_n не содержит пропозициональных переменных, $v(B_n) = \frac{n}{n+1}$ при любой интерпретации v (т. е. B_n — константный терм, значением которого всегда является $\frac{n}{n+1}$ в $\mathscr{A}$).

Из B_n получаем константный терм $\neg B_n$, значением которого в $\mathscr{A}$ будет $\frac{1}{n+1}$. В силу того, что для любых a и b из $\mathscr{A}_\omega$ выполнено $\neg a \supset b = \min(1, a+b)$, из $\neg B_n$ легко получить константные термы, значением которых в $\mathscr{A}$ будут все $\frac{m}{n+1}$ $(1 \leq m \leq n)$.

Для логик $Ł_1$ и $Ł_2$ утверждение теоремы тривиально, ибо язык этих логик уже содержит необходимые пропозициональные константы $\top$ и $\bot$.

Корректное применение следствия 2.4 вместо леммы 2.3 и замена в вышеприведенном доказательстве утверждения теоремы о бесконечнозначной логике Лукасевича алгебры $\mathscr{A}_\omega$ алгеброй $\mathscr{A}_n$ для $n \geq 3$ дает доказательство утверждения теоремы о n-значных логиках Лукасевича.

Следствие 3.2. *Логики $Ł_\omega$ и $Ł_n$ $(n \geq 3)$ не обладают свойством Бета.*

Доказательство. Утверждение немедленно следует из теоремы, поскольку все константные термы в любой логике Лукасевича эквивалентны либо константе $\top$, либо константе $\bot$.

Замечание 3.3. Известно, что противоречивая логика $Ł_1$ и классическая пропозициональная логика $Ł_2$ обладают свойством Бета.

Таким образом, логики $Ł_1$ и $Ł_2$ являются единственными логиками в семействе логик Лукасевича, которые обладают свойством Бета.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wojcicki R.* On matrix representation of consequence operations of Łukasiewicz's sentential calculi // Selected Papers on Łukasiewicz Sentential Calculi. Ed. by R. Wojcicki. Warshawa: Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk, 1977. P. 101–112.
2. *Максимова Л. Л.* Модальные логики и многообразия модальных алгебр: свойства Бета, интерполяция и амальгамируемость // Алгебра и логика. 1992. Т. 31, № 2. С. 145–166.

Статья поступила 4 декабря 2000 г.

Тишковский Дмитрий Евгеньевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
tishkov@math.nsc.ru