*Сибирский математический журнал*
*Январь—февраль, 2002. Том 43, № 1*

*УДК 517.986.7:517.983.23*

# О ФУНКЦИЯХ, ПЕРЕВОДЯЩИХ ГЕНЕРАТОРЫ $C_0$–ПОЛУГРУПП В ГЕНЕРАТОРЫ ГОЛОМОРФНЫХ ПОЛУГРУПП

**А. Р. Миротин**

**Аннотация:** Даны условия на функцию класса Шенберга $\mathscr{T}$, при которых она переводит генераторы равномерно ограниченных полугрупп класса $C_0$ в генераторы голоморфных полугрупп. Это обобщает результат Иосиды, Балакришнана и Като, относящийся к дробным степеням операторов. Функциональное исчисление генераторов $C_0$-полугрупп, использующее класс $\mathscr{T}$, построено в предшествующих работах автора. Библиогр. 12.

Замечательная теорема Иосиды, Балакришнана и Като [1–3] (см. также [4, гл. IX]) утверждает, что дробная степень генератора равномерно ограниченной полугруппы класса $C_0$ в банаховом пространстве $X$ является генератором голоморфной полугруппы в $X$. Мы обобщаем этот результат, используя $\mathscr{T}$-исчисление генераторов $C_0$-полугрупп, построенное в [5] (многомерный вариант $\mathscr{T}$-исчисления позднее появился в [6]). Далее $\mathrm{Gen}(X)$ и $\mathrm{Hol}(X)$ обозначают множества генераторов равномерно ограниченных $C_0$-полугрупп и голоморфных полугрупп в банаховом пространстве $X$ соответственно, все рассматриваемые меры — это меры Радона.

Приведем некоторые необходимые определения и факты из [5]. Будем говорить, что функция $\psi : (-\infty; 0) \to (-\infty; 0]$ *принадлежит классу* $\mathscr{T}$, если она обладает абсолютно монотонной производной. Отметим, что (с точностью до аффинных замен переменных) этот класс содержит положительные и отрицательные дробные степени, логарифм, арккосинус, а также полилогарифмы всех порядков [7] и представляет собой конус, устойчивый относительно операции композиции. Каждая функция из $\mathscr{T}$ имеет интегральное представление

$$\psi(s) = c_0 + c_1 s + \int_0^\infty (e^{us} - 1)\, d\mu(u) \quad (s < 0), \tag{1}$$

причем $c_0 = \psi(0)$, $c_1 = \psi'(-\infty)$, и положительная мера $\mu$, сосредоточенная на $(0, +\infty)$, определяется по $\psi$ однозначно. Кроме того, для любого $t \geq 0$ функция $g_t(s) = e^{t\psi(s)}$ абсолютно монотонна и ограничена на $(-\infty; 0)$, а потому имеет интегральное представление

$$g_t(s) = \int_0^\infty e^{sr}\, d\nu_t(r),$$

где $\nu_t$ — ограниченная положительная мера на $[0; \infty)$, также определяемая по $\psi$ однозначно.

Если оператор $A \in \mathrm{Gen}(X)$ порождает полугруппу $T$, то для любой функции $\psi \in \mathscr{T}$ с интегральным представлением (1) положим при $x \in D(A)$

$$\psi(A)x = c_0x + c_1Ax + \int_0^\infty (T(u) - I)x\, d\mu(u),$$

где $I$ — единичный оператор в $X$. Известно [5, теорема 1; 6, теорема 4.1], что $\psi(A)$ расширяется до генератора равномерно ограниченной полугруппы ($x \in X$)

$$g_t(A)x = \int_0^\infty T(r)x\, d\nu_t(r), \tag{2}$$

который также обозначается через $\psi(A)$.

Поскольку дробные степени принадлежат $\mathscr{T}$, естественно поставить вопрос: для каких еще функций $\psi$ из $\mathscr{T}$ включение $\psi(A) \in \mathrm{Hol}(X)$ справедливо при всех $A \in \mathrm{Gen}(X)$? Ниже получен ответ на этот вопрос в виде подходящей оценки некоторого зависящего от параметра повторного интеграла, связанного с $\psi$, и установлено, что это условие нельзя ослабить. Рассмотрены примеры, показывающие эффективность найденного условия. Отметим, что более ограничительное достаточное условие было указано в [8].

Для функции $f$ и меры $\mu$ на $\mathbb{R}_+$ положим (предполагается, что интеграл существует)

$$J(f, \mu) = \sup_{\phi \in S} \left| \int_0^\infty \int_0^\infty (f(r-u) - f(r))\phi(r)\, dr d\mu(u) \right|,$$

где $S$ — единичная сфера пространства $C_{00}(\mathbb{R}_+)$ непрерывных на $\mathbb{R}_+$ функций с компактным носителем, наделенного sup-нормой.

**Теорема.** *Пусть $\psi \in \mathscr{T}$, $\psi(0) = \psi'(-\infty) = 0$, и $r \mapsto e^{t\psi(-r)}$ — преобразование Лапласа функции $f_t \in L_1(\mathbb{R}_+)(t \geq 0)$. Если при некотором $C > 0$ справедлива оценка $J(f_t, \mu) < C/t$ для $0 < t < 1$, то $\psi$ отображает* $\mathrm{Gen}(X)$ *в* $\mathrm{Hol}(X)$.

*Обратно, если $\psi$ отображает* $\mathrm{Gen}(X)$ *в* $\mathrm{Hol}(X)$ *для любого банахова пространства $X$, то $J(f_t, \mu) < C/t$ для $0 < t < 1$.*

Доказательство необходимости легко выводится из следующей леммы, имеющей самостоятельный интерес и устанавливающей связь между $\mathscr{T}$-исчислением и исчислением Хилле — Филлипса [9, гл. XV]. Пусть $a$ — ограниченная комплексная мера на $\mathbb{R}_+$ и

$$g(s) = \int_0^\infty e^{sr}\, da(r) = (\mathscr{L}a)(-s) \quad (s \leq 0)$$

(здесь и ниже $\mathscr{L}$ обозначает преобразование Лапласа). Тогда для оператора $A \in \mathrm{Gen}(X)$, порождающего полугруппу $T$, в [9] полагают (ср. с (2))

$$g(A)x = \int_0^\infty T(r)x da(r) \quad (x \in X)$$

(наши обозначения отличаются от обозначений в [9]). Далее мы будем рассматривать наиболее важный для приложений случай, когда $da(r) = f(r)\, dr$, где $f$ принадлежит пространству $L^1(\mathbb{R}_+)$ функций из $L^1(\mathbb{R})$, сосредоточенных на $\mathbb{R}_+$.

**Лемма 1.** *Пусть функция $g$ на $(-\infty;0)$ имеет вид $g(s) = (\mathscr{L}f)(-s)$, где $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$, и пусть $\psi \in \mathscr{T}$ имеет интегральное представление (1) с $c_0 = c_1 = 0$. Если $J(f,\mu) < \infty$, то*

*1) функция $h(s) := \psi(s)g(s)$ представима в виде $(\mathscr{L}b)(-s)$, где $b$ — ограниченная комплексная мера на $\mathbb{R}_+$ полной вариации $\|b\| = J(f,\mu)$;*

*2) для любого оператора $A \in \mathrm{Gen}(X)$, порождающего полугруппу $T$ с оценкой $\|T(t)\| \le M$, справедливы соотношения $h(A) = \psi(A)g(A)$, $\|h(A)\| \le MJ(f,\mu)$.*

Доказательство леммы 1. Учитывая, что $f$ сосредоточена на $\mathbb{R}_+$ для $u \ge 0$ имеем

$$(e^{su}-1)g(s) = (e^{su}-1)\int\limits_0^\infty e^{sr}f(r)\,dr = \int\limits_0^\infty e^{s(r+u)}f(r)\,dr - \int\limits_0^\infty e^{sr}f(r)\,dr$$
$$= \int\limits_u^\infty e^{sr}f(r-u)\,dr - \int\limits_0^\infty e^{sr}f(r)\,dr = \int\limits_0^\infty e^{sr}(f(r-u)-f(r))\,dr.$$

Таким образом, если $\psi(s) = e^{su}-1$, то $h(s) = (\mathscr{L}b^u)(-s)$, где $db^u(r) = (f(r-u)-f(r))\,dr$ — ограниченная мера на $\mathbb{R}_+$.

Пусть $\psi$ имеет представление (1) с $c_0 = c_1 = 0$. По доказанному выше

$$h(s) = \int\limits_0^\infty (e^{su}-1)g(s)\,d\mu(u) = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty e^{sr}\,db^u(r)\right)d\mu(u). \tag{3}$$

Для $\phi \in C_{00}(\mathbb{R}_+)$ положим

$$b(\phi) := \int\limits_0^\infty b^u(\phi)\,d\mu(u) = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty (f(r-u)-f(r))\phi(r)\,dr d\mu(u).$$

В силу конечности $J(f,\mu)$ этот интеграл существует и $\|b\| = J(f,\mu)$. Таким образом, $b$ — ограниченная мера на $\mathbb{R}_+$, причем

$$b = \int\limits_0^\infty b^u\,d\mu(u),$$

где интеграл понимается в слабом смысле, а пространство мер Радона наделено широкой топологией (см. например, [10, гл. VI]).

Покажем, что для любой функции $q \in C^1(\mathbb{R}_+)$, которая ограничена вместе со своей производной, справедливо равенство

$$b(q) = \int\limits_0^\infty b^u(q)\,d\mu(u). \tag{4}$$

Для этого рассмотрим последовательность функций $\eta_m \in C_{00}(\mathbb{R}_+) \cap C^1(\mathbb{R}_+)$ такую, что $0 \le \eta_m \le 1$, $\eta_m$ сосредоточена на $[0;m+1]$, $\eta_m = 1$ на $[0;m]$ и производные $\eta_m'$ ограничены в совокупности, и пусть $q_m := q\eta_m$. Тогда

$q_m \in C_{00}(\mathbb{R}_+) \cap C^1(\mathbb{R}_+)$, $q_m \to q$ $(m \to \infty)$ поточечно на $\mathbb{R}_+$, причем последовательности $(q_m)$ и $(q'_m)$ ограничены в совокупности. Если положить $p_m(u) := b^u(q_m)$, то

$$p_m(u) = \int\limits_0^\infty (f(r-u) - f(r))q_m(r)\,dr$$
$$= \int\limits_u^\infty f(r-u)q_m(r)\,dr - \int\limits_0^\infty f(r)q_m(r)\,dr = \int\limits_0^\infty f(r)(q_m(r+u) - q_m(r))\,dr. \quad (5)$$

Пусть

$$p(u) := b^u(q).$$

Тогда $p_m(u) \to p(u)$ поточечно на $\mathbb{R}_+$ $(m \to \infty)$ по теореме Лебега о мажорированной сходимости. Выберем число $C_1 > 0$ так, что $|q'_m(\xi)| \le C_1$ при всех $\xi \ge 0$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда $|q_m(r+u) - q_m(r)| \le C_1 u$ при всех $r, u \ge 0$, $m \in \mathbb{N}$. Кроме того, существует такое $C_2 > 0$, что $|q_m(r+u) - q_m(r)| \le C_2 u$ при всех $r, u \ge 0$, $m \in \mathbb{N}$. Функция $w$, определяемая как $w(u) = u$ при $0 \le u \le 1$, $w(u) = 1$ при $u \ge 1$, $\mu$-интегрируема по лемме 3.1 из [6], и при $C = \max\{C_1, C_2\} \int\limits_0^\infty |f(r)|\,dr$ из (5) следует оценка $|p_m(u)| \le Cw(u)$. Поэтому $\mu(p_m) \to \mu(p)$ $(m \to \infty)$ снова в силу теоремы Лебега.

С другой стороны, при $m \to \infty$

$$\mu(p_m) = \int\limits_0^\infty b^u(q_m)\,d\mu(u) = b(q_m) \to b(q),$$

поскольку $q_m \to q$ поточечно и ограниченно на $\mathbb{R}_+$ и мера $b$ ограничена. Таким образом, $\mu(p) = b(q)$, что доказывает (4). В частности, полагая в (4) $q(r) = e^{sr}$ $(s \le 0)$, получаем из (3) $h(s) = (\mathscr{L}b)(-s)$, что доказывает утверждение 1 леммы 1.

Для доказательства второго утверждения фиксируем непрерывный линейный функционал $\lambda \in X'$ и вектор $x \in D(A)$ и положим $q(r) = \lambda(T(r)x)$. Тогда производная $q'(r) = \lambda(T'(r)x) = \lambda(T(r)Ax)$ — непрерывная функция на $\mathbb{R}_+$, причем $|q(r)| \le \|\lambda\|M\|x\|$, $|q'(r)| \le \|\lambda\|M\|Ax\|$. При таком $q$ из (4) следует равенство

$$\int\limits_0^\infty \lambda(T(r)x)\,db(r) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \lambda(T(r)x)\,db^u(r)d\mu(u) = \int\limits_0^\infty \lambda\left(\int\limits_0^\infty T(r)x\,db^u(r)\right)d\mu(u),$$

откуда по определению слабого интеграла

$$\int\limits_0^\infty T(r)x\,db(r) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty T(r)x\,db^u(r)d\mu(u),$$

при этом внутренний интеграл в правой части существует даже в смысле Бохнера и

$$\int_0^\infty T(r)x db^u(r) = \int_0^\infty T(r)x(f(r-u)-f(r))\,dr$$

$$= \int_u^\infty T(r)xf(r-u)\,dr - \int_0^\infty T(r)xf(r)\,dr = \int_0^\infty T(r+u)xf(r)\,dr - \int_0^\infty T(r)xf(r)\,dr$$

$$= \int_0^\infty (T(u)-I)T(r)xf(r)\,dr = (T(u)-I)g(A)x.$$

Поэтому при $x \in D(A)$

$$h(A)x := \int_0^\infty T(r)x\,db(r) = \int_0^\infty (T(u)-I)g(A)x\,d\mu(u) = \psi(A)g(A)x.$$

Поскольку оператор $h(A)$ ограничен, а оператор $\psi(A)g(A)$ замкнут как произведение замкнутого и ограниченного операторов, последнее равенство справедливо при всех $x \in X$.

Наконец, так как $\|b\| = J(f,\mu)$, то

$$\|h(A)\| = \int_0^\infty \|T(r)\|\,d|b|(r) \le M\|b\| = MJ(f,\mu),$$

что и завершает доказательство леммы 1.

Завершение доказательства теоремы. Достаточность. Поскольку $\psi(A)$ — генератор полугруппы $g_t(A)$, то $(d/dt)g_t(A)x = \psi(A)g_t(A)x$, и лемма 1 дает оценку

$$\left\|\frac{d}{dt}g_t(A)\right\| \le MJ(f_t,\mu) \le \frac{MC}{t}, \quad 0 < t < 1,$$

что и обеспечивает голоморфность полугруппы $g_t(A)$ в силу критерия голоморфности из [4, с. 351].

Необходимость. Пусть $\psi$ отображает $\mathrm{Gen}(X)$ в $\mathrm{Hol}(X)$ для любого банахова пространства $X$. Рассмотрим пространство $X = C_0(\mathbb{R}_+)$ непрерывных функций на $\mathbb{R}_+$, исчезающих на бесконечности, с sup-нормой, и пусть $(T(r)x)(v) = x(v+r)$ — оператор (одностороннего) сдвига в $X$ (генератор $A$ в этом случае является оператором дифференцирования с надлежащим образом выбранной областью определения). Тогда

$$y(v) := g_t(A)x(v) = \int_0^\infty (T(r)x)(v)f_t(r)\,dr = \int_0^\infty x(v+r)f_t(r)\,dr. \tag{6}$$

Далее,

$$\psi(A)y(v) = \int_0^\infty (T(u)-I)y(v)\,d\mu(u) = \int_0^\infty (y(v+u)-y(v))\,d\mu(u). \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует, что

$$\psi(A)g_t(A)x(v) = \int\limits_0^\infty \left( \int\limits_0^\infty x(v+u+r)f_t(r)\,dr - \int\limits_0^\infty x(v+r)f_t(r)\,dr \right) d\mu(u). \qquad (8)$$

Но так как $f_t$ сосредоточена на $\mathbb{R}_+$, то

$$\int\limits_0^\infty x(v+u+r)f_t(r)\,dr = \int\limits_u^\infty x(v+r)f_t(r-u)\,dr = \int\limits_0^\infty x(v+r)f_t(r-u)\,dr.$$

Поэтому (8) принимает вид

$$\psi(A)g_t(A)x(v) = \int\limits_0^\infty \left( \int\limits_0^\infty (f_t(r-u) - f_t(r))x(v+r)\,dr \right) d\mu(u). \qquad (9)$$

В силу критерия голоморфности из [4, с. 351] существует такая константа $C > 0$, что

$$\left\| \frac{d}{dt} g_t(A)x \right\| = \|\psi(A)g_t(A)x\| \le \frac{C}{t}\|x\| \quad (0 < t < 1),$$

т. е. при всех $x \in C_0(\mathbb{R}_+)$ имеем с учетом (9)

$$\sup_{v\ge 0} \left| \int\limits_0^\infty \left( \int\limits_0^\infty (f_t(r-u) - f_t(r))x(v+r)\,dr \right) d\mu(u) \right| \le \frac{C}{t}\|x\|.$$

В частности, при всех $x$ с $\|x\| = 1$ и $v \ge 0$

$$\left| \int\limits_0^\infty \left( \int\limits_0^\infty (f_t(r-u) - f_t(r))x(v+r)\,dr \right) d\mu(u) \right| \le \frac{C}{t}.$$

При $v = 0$ и $x \in C_{00}(\mathbb{R}_+)$, $\|x\| = 1$, получаем $J(f_t, \mu) \le C/t$, что и завершает доказательство теоремы.

Для функции $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ и меры $\mu$ на $\mathbb{R}_+$ положим

$$k(f,\mu) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty |f(r-u) - f(r)|\,dr d\mu(u).$$

**Следствие** [8]. *Если в предположениях теоремы $k(f_t, \mu) \le C/t$ при $0 < t < 1$ с некоторой константой $C > 0$, то $\psi(A) \in \mathrm{Hol}(X)$ для любого оператора $A$ из* $\mathrm{Gen}(X)$.

Это сразу вытекает из первого утверждения следующей леммы.

**Лемма 2.** 1. $J(f,\mu) \le k(f,\mu)$.
2. *Если $k(f,\mu) < \infty$, то*

$$J(f,\mu) = \int\limits_0^\infty \left| \int\limits_0^\infty (f(r-u) - f(r))\,d\mu(u) \right| dr.$$

Доказательство. 1. Очевидно.

2. Так как при всех $\phi \in C_{00}(\mathbb{R}_+)$ справедливо неравенство

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |(f(r-u) - f(r))\phi(r)|\, dr d\mu(u) \leq \|\phi\| k(f,\mu) < \infty,$$

к повторному интегралу в определении $J(f,\mu)$ применима теорема Фубини — Тонелли (о перемене порядка интегрирования). В силу этой теоремы и [11, теорема 12.13]

$$J(f,\mu) = \sup_{\|\phi\|=1} \left| \int_0^\infty \left( \int_0^\infty (f(r-u) - f(r))\, d\mu(u) \right) \phi(r)\, dr \right|$$
$$= \int_0^\infty \left| \int_0^\infty (f(r-u) - f(r))\, d\mu(u) \right| dr.$$

Лемма 2 доказана.

**Утверждение 1.** *Если функция $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ неотрицательна и не возрастает, то для любой меры $\mu$ на $\mathbb{R}_+$*

$$k(f,\mu) = 2 \int_0^\infty \int_0^u f(r)\, dr d\mu(u).$$

Доказательство. В самом деле,

$$\int_0^\infty |f(r-u) - f(r)|\, dr = \int_0^u f(r)\, dr + \int_u^\infty (f(r-u) - f(r))\, dr$$
$$= \int_0^u f(r)\, dr + \int_0^\infty f(r)\, dr - \int_u^\infty f(r)\, dr = 2 \int_0^u f(r)\, dr.$$

**Утверждение 2.** *Пусть функция $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ неотрицательна, непрерывна на $\mathbb{R}_+$, а также возрастает при $0 < r < r_0$ и убывает при $r > r_0$. Если для $u > 0$ мы обозначим через $r(u)$ (единственный) корень уравнения $f(r-u) = f(r)$, то $u < r(u) < r_0 + u$, и для любой меры $\mu$ на $\mathbb{R}_+$*

$$k(f,\mu) = 2 \int_0^\infty \int_{r(u)-u}^{r(u)} f(r)\, dr d\mu(u).$$

Доказательство. Существование, единственность и свойства $r(u)$ сразу следуют из свойств функции $f$. Далее,

$$|f(r-u) - f(r)| = \begin{cases} f(r), & 0 < r \leq u, \\ f(r) - f(r-u), & u < r \leq r(u), \\ f(r-u) - f(r), & r > r(u). \end{cases}$$

Поэтому, используя доказательство утверждения 1, имеем

$$\int_0^\infty |f(r-u)-f(r)|\,dr = \int_0^u f(r)\,dr + \int_u^{r(u)} (f(r)-f(r-u))\,dr + \int_{r(u)}^\infty (f(r-u)-f(r))\,dr$$

$$= \int_0^u f(r)\,dr + \int_u^\infty (f(r-u)-f(r))\,dr + \int_{r(u)}^u (f(r-u)-f(r))\,dr + \int_u^{r(u)} (f(r)-f(r-u))\,dr$$

$$= 2\int_0^u f(r)\,dr + 2\int_u^{r(u)} (f(r)-f(r-u))\,dr = 2\int_0^{r(u)} f(r)\,dr - 2\int_u^{r(u)} f(r-u)\,dr$$

$$= 2\int_0^{r(u)} f(r)\,dr - 2\int_0^{r(u)-u} f(r)\,dr = 2\int_{r(u)-u}^{r(u)} f(r)\,dr,$$

что и доказывает наше утверждение.

Пример 1. Оператор $-\log(I-A)$ принадлежит $\mathrm{Hol}(X)$ при любом $A \in \mathrm{Gen}(X)$.

Действительно, функция $\psi(s) = -\log(1-s)$, $s<0$, принадлежит $\mathscr{T}$, причем $d\mu(u) = u^{-1}e^{-u}\,du$ [5, пример 2]. При этом

$$g_t(s) = (1-s)^{-t} = \Gamma(t)^{-1}\int_0^\infty e^{sr} r^{t-1} e^{-r}\,dr,$$

что легко проверить по таблицам преобразования Лапласа. Поэтому $f_t(r) = \Gamma(t)^{-1} r^{t-1} e^{-r}$ $(r>0)$. Очевидно, что $f_t$ удовлетворяет всем условиям утверждения 1. Поэтому $(0<t<1)$

$$k(f_t,\mu) = 2\int_0^\infty \left(\int_0^u \Gamma(t)^{-1} r^{t-1} e^{-r}\,dr\right) u^{-1}e^{-u}\,du$$

$$\le 2\Gamma(t)^{-1}\int_0^\infty \left(\int_0^u r^{t-1}\,dr\right) u^{-1}e^{-u}\,du = \frac{2}{t}.$$

Утверждение теперь вытекает из следствия.

Пример 2. Оператор $-(-A)^{1/2}$ принадлежит $\mathrm{Hol}(X)$ при всех $A\in \mathrm{Gen}(X)$.

В самом деле, функция $\psi(s) = -(-s)^{1/2}$ принадлежит $\mathscr{T}$, причем $d\mu(u) = 2^{-1}\pi^{-1/2}u^{-3/2}\,du$ [5, пример 1]. Известно [4, с. 358, 369], что $g_t(s) = (\mathscr{L} f_t)(-s)$, где $f_t(r) = 2^{-1}\pi^{-1/2} t r^{-3/2} e^{-t^2/4r}$. Легко проверить, что функция $f_t$ удовлетворяет всем условиям утверждения 2 с $r_0 = t^2/6$, $f_t(r_0) = C_1/t^2$ (здесь и ниже $C_i = \mathrm{const}$). Поэтому

$$k(f_t,\mu) = \int_0^{r_0}\left(\int_{r(u)-u}^{r(u)} f_t(r)\,dr\right) d\mu(u) + 2\int_{r_0}^\infty \left(\int_{r(u)-u}^{r(u)} f_t(r)\,dr\right) d\mu(u). \qquad (10)$$

Поскольку

$$\int\limits_{r(u)-u}^{r(u)} f_t(r)\,dr < f_t(r_0)u = C_1\frac{u}{t^2},$$

первое слагаемое в (10) меньше, чем

$$2^{-1}\pi^{-1/2}C_1t^{-2}\int\limits_0^{t^2/6} u^{-1/2}\,du = \frac{C_2}{t}.$$

Далее,

$$\int\limits_{r_0}^{\infty}\left(\int\limits_{r(u)-u}^{r(u)} f_t(r)\,dr\right)d\mu(u) \le \int\limits_{r_0}^{\infty}\left(\int\limits_0^u + \int\limits_u^{r(u)} f_t(r)\,dr\right)d\mu(u)$$
$$\le \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^u f_t(r)\,drd\mu(u) + \int\limits_{r_0}^{\infty}\int\limits_u^{r(u)} f_t(r)\,drd\mu(u),$$

причем по теореме Фубини

$$\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^u f_t(r)\,drd\mu(u) = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_r^{\infty} d\mu(u)f_t(r)\,dr = \frac{t}{4\pi}\int\limits_0^{\infty}\left(\int\limits_r^{\infty}u^{-3/2}du\right)\frac{e^{-t^2/4r}}{r^{3/2}}\,dr = \frac{C_3}{t}.$$

Наконец, поскольку $f_t(r)$ убывает при $r > r_0$, то при $u \ge r_0$

$$\int\limits_u^{r(u)} f_t(r)\,dr \le f_t(u)(r(u)-u) < r_0f_t(u).$$

Поэтому

$$\int\limits_{r_0}^{\infty}\int\limits_u^{r(u)} f_t(r)\,drd\mu(u) \le r_0\int\limits_{r_0}^{\infty} f_t(u)\,d\mu(u) = \frac{t^3}{24\pi}\int\limits_{t^2/6}^{\infty}\frac{e^{-t^2/4u}}{u\cdot u^2}\,du$$
$$\le \frac{t^3}{24\pi}\cdot\frac{6}{t^2}\int\limits_{t^2/6}^{\infty}\frac{e^{-t^2/4u}}{u^2}du = \frac{C_4}{t}.$$

С учетом полученных оценок из (10) следует, что условия следствия выполнены, что и требовалось доказать.

Пример 3. Оператор $-\operatorname{arch}(I-A)$ принадлежит $\mathrm{Hol}(X)$ при всех $A \in \mathrm{Gen}(X)$.

Действительно, функция $-\operatorname{arch}(1-s)$ принадлежит $\mathscr{T}$, причем $d\mu(u) = u^{-1}e^{-u}I_0(u)\,du$ [5, пример 3]. При этом $g_t(s) = (\mathscr{L}f_t)(-s)$, где

$$f_t(r) = tr^{-1}e^{-r}I_t(r), \quad r > 0,$$

что легко проверить по таблицам преобразования Лапласа ($I_t$ — функция Бесселя мнимого аргумента). Покажем с целью применения утверждения 1, что функция $f_t$ убывает, если $0 < t < 1$. В самом деле,

$$f_t'(r) = t\frac{I_t'(r) - I_t(r)(1 + \frac{1}{r})}{re^r}.$$

Поскольку $I_t'(r) = \frac{t}{r}I_t(r) + I_{t+1}(r)$ (см., например, [12, с. 246]), неравенство $f_t'(r) < 0$ равносильно неравенству $I_{t+1}(r) < I_t(r)\big(1 + \frac{1-t}{r}\big)$. Последнее же неравенство истинно, ибо функция $t \mapsto I_t(r)$ убывает $(r, t > 0)$ [12, с. 246]. Таким образом, в силу утверждения 1

$$k(f_t, \mu) = \int_0^\infty \left(\int_0^u tr^{-1}e^{-r}I_t(r)\,dr\right)u^{-1}e^{-u}I_0(u)\,du.$$

Так как (см., например, [12])

$$I_t(r) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!\Gamma(t+n+1)}\left(\frac{r}{2}\right)^{t+2n},$$

имеем

$$A(u) := \int_0^u tr^{-1}e^{-r}I_t(r)\,dr = t\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!\Gamma(t+n+1)2^{2n}2^t}\int_0^u r^{t-1}r^{2n}e^{-r}\,dr.$$

Но $\max\limits_{r>0} r^{2n}e^{-r} = (2n/e)^{2n}$. Следовательно,

$$A(u) \le t\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!\Gamma(t+n+1)2^{2n}}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\int_0^u r^{t-1}\,dr = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!\Gamma(t+n+1)}\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}u^t.$$

Поэтому

$$k(f_t, \mu) < \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!\Gamma(t+n+1)}\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}\int_0^\infty u^{t-1}e^{-u}I_0(u)\,du.$$

Далее, так как

$$I_0(u) = \sum_{l=0}^\infty \frac{(u/2)^{2l}}{(l!)^2},$$

то

$$\int_0^\infty u^{t-1}e^{-u}I_0(u)\,du = \sum_{l=0}^\infty \frac{1}{2^{2l}(l!)^2}\int_0^\infty u^{2l+t-1}e^{-u}\,du = \sum_{l=0}^\infty \frac{\Gamma(t+2l)}{2^{2l}(l!)^2}.$$

Тем самым

$$k(f_t, \mu) < \sum_{n=0}^\infty\sum_{l=0}^\infty \frac{(n/e)^{2n}}{n!2^{2l}(l!)^2}\cdot\frac{\Gamma(t+2l)}{\Gamma(t+n+1)}. \tag{11}$$

Заметим, что при $0 < t < 1$

$$\frac{\Gamma(t+2l)}{\Gamma(t+n+1)} = \frac{(t+2l)(t+2l-1)\dots t\Gamma(t)}{(t+n+1)(t+n)\dots(t+1)t\Gamma(t)}$$
$$< \frac{(2l+1)\dots 1}{(n+1)\dots 1t} = \frac{(2l+1)(2l)!}{(n+1)!t} < \frac{(2l+1)2^l l!}{(n+1)n!t}.$$

Из (11) теперь следует, что

$$k(f_t,\mu) < \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n/e)^{2n}}{(n+1)(n!)^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(2l+1)}{2^l l!}\frac{1}{t} = \frac{C}{t}$$

($C$ = const; первый из рядов в правой части сходится в силу формулы Стирлинга). Применение следствия завершает доказательство.

### *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Yosida K.* Fractional powers of infinitesimal generators and the analyticity of the semigroups generated by them // Proc. Japan Acad. 1960. V. 36. P. 86–89.
2. *Balakrishnan A. V.* Fractional powers of closed operators and semigroups generated by them // Pacific J. Math. 1960. V. 10. P. 419–437.
3. *Kato T.* Note on fractional powers of linear operators // Proc. Japan Acad. 1960. V. 36. P. 94–96.
4. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
5. *Миротин А. Р.* О $\mathscr{T}$-исчислении генераторов $C_0$-полугрупп // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 3. С. 571–582.
6. *Миротин А. Р.* Многомерное $\mathscr{T}$-исчисление от генераторов $C_0$-полугрупп // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11, № 2. С. 142–170.
7. *Миротин А. Р.* О функциях класса Шенберга $\mathscr{T}_n$ нескольких комплексных переменных // Междунар. конф. «Теория приближений и гармонический анализ»: Тез. докл. Тула, 1998. С. 179–180.
8. *Миротин А. Р.* Генераторы голоморфных полугрупп как функции генераторов $C_0$-полугрупп // Вестн. Белорусск. ун-та. Сер. 1. 2000. Т. 2. С. 61–65.
9. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
10. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления. М.: Наука, 1970.
11. *Хьюитт Э, Росс К.* Абстрактный гармонический анализ. М.: Наука, 1975. Т. 1.
12. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. М.: Наука, 1977.


*Статья поступила 1 августа 2000 г.*

*Миротин Адольф Рувимович*
*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины,*
*кафедра высшей математики*
*ул. Советская, 104, Гомель 246699, Беларусь*
amirotin@gsu.unibel.by