Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2002. Том 43, № 1

УДК 512.542

О ВЛИЯНИИ ИНДЕКСОВ НОРМАЛИЗАТОРОВ СИЛОВСКИХ ПОДГРУПП НА СТРОЕНИЕ КОНЕЧНОЙ p–РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ

Мио Лон, Го Вэньбинь

Аннотация: Исследуются конечные p-разрешимые группы в зависимости от индексов нормализаторов силовских подгрупп. Получены оценки p-длины таких групп, а при малых значениях индексов найдена нильпотентная длина разрешимой группы. Библиогр. 11.

В 1988 г. А. С. Кондратьев [1] установил 2-нильпотентность конечной группы при условии, что индексы нормализаторов силовских подгрупп нечетны. В [2] рассмотрены конечные группы с индексами нормализаторов силовских подгрупп, не делящимися на фиксированное простое число p. При $p \neq 3$ такие группы оказались p-нильпотентными, а при $p = 3$ они могут быть простыми. Доказательства этих работ использует классификацию конечных простых групп.

В настоящей заметке исследуются конечные p-разрешимые группы в зависимости от индексов нормализаторов силовских подгрупп. Получены оценки p-длины таких групп, а при малых значениях индексов найдена нильпотентная длина разрешимой группы.

Рассматриваются только конечные группы. Используются стандартные обозначения, соответствующие [3, 4]. Напомним наиболее часто используемые: $p, q, r, \dots$ — всегда простые различные числа; G_p — силовская p-подгруппа группы G; $G_{\{p,q\}}$ — $\{p,q\}$-холлова подгруппа группы G; $N_G(G_p)$ — нормализатор силовской p-подгруппы в группе G; $[A]B$ — полупрямое произведение с нормальной подгруппой A; $H \leq G$ — H-подгруппа группы G; $M < \cdot G$ — M-максимальная подгруппа группы G; $N \cdot\triangleleft G$ — N-минимальная нормальная подгруппа группы G; $M_G = \bigcap_{x\in G} M^x$ — ядро подгруппы M в группе G; $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G; $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G; $O_p(G)$ — наибольшая нормальная p-подгруппа группы G; $\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп; $\mathfrak{U}$ — класс всех сверхразрешимых групп; $\mathfrak{F}_p$ — совокупность всех p-подгрупп из класса $\mathfrak{F}$; $\mathfrak{F}_{p'}$ — совокупность всех p'-подгрупп из класса $\mathfrak{F}$.

Лемма 1 [4, теорема I.6.4]. *Если $N \triangleleft G$, то G_pN/N — силовская p-подгруппа фактор-группы G/N и $N_{G/N}(G_pN/N) = N_G(G_p)N/N$.*

Лемма 2 [3, лемма VI.4.12]. *Пусть $G = [A]B$ и $H \leq B$. Тогда $N_G(H) = (N_G(H) \cap A)(N_G(H) \cap B)$ и $N_G(H) \cap A = C_A(H)$.*

Partially suppored by the National Natural Science Foundation of China (N 10171086), JS QLGC and 333 GC Fund.

Лемма 3. *Пусть $G = [A]B$, $B < \cdot G$ и $B_G = 1$. Если $H \leq B$ и $H_B \neq 1$, то $N_G(H) = N_B(H)$.*

Доказательство. По предыдущей лемме $N_G(H) = C_A(H)N_B(H)$. Так как $C_A(H) \leq C_A(H_B)$, то $\langle C_A(H), B\rangle \leq N_G(H_B)$. Если $C_A(H) \neq 1$, то $H_B \triangleleft G$ и $1 \neq H_B \leq B_G = 1$; противоречие. Поэтому $C_A(H) = 1$ и $N_G(H) = N_B(H)$.

Если в группе G имеется максимальная подгруппа M с единичным ядром $M_G = \bigcap\limits_{x \in G} M^x$, то группу G называют *примитивной*, а подгруппу M — ее *примитиватором* [5].

Лемма 4 [3, теорема II.3.2; 5, теорема I.8]. *Пусть G — примитивная группа с примитиватором M, и пусть $|G : M| = p^n$, где p — простое число. Тогда*

(1) *$\Phi(G) = 1$;*

(2) *$F(G) = C_G(F(G)) = O_p(G)$, и $F(G)$ является элементарной абелевой подгруппой порядка p^n;*

(3) *в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа, совпадающая с $F(G)$;*

(4) *$G = [F(G)]M$ и $O_p(M) = 1$;*

(5) *фактор-группа G/F изоморфна подгруппе группы $GL(n, p)$.*

Лемма 5. *Пусть $G = [F]M$ — примитивная группа с примитиватором M, и пусть $|G : M| = p^n$. Если $q \neq p$ и Q — силовская q-подгруппа из M, то*

$$|M : N_M(Q)| = \frac{|G : N_G(Q)|}{|F : C_F(Q)|}.$$

Кроме того, если $O_q(M) \neq 1$, то $C_F(Q) = 1$.

Доказательство. По лемме 2 имеем $N_G(Q) = [C_F(Q)]N_M(Q)$. Поэтому

$$|M : N_M(Q)| = \frac{|G : F|}{|N_G(Q) : C_F(Q)|} = \frac{|G : N_G(Q)|}{|F : C_F(Q)|}.$$

Если $O_q(M) \neq 1$, то $O_q(M) = Q_M$ и $C_F(Q) = 1$ по лемме 3.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если $\mathfrak{F}$ содержит всякую группу G, у которой $G/N \in \mathfrak{F}$ для $N \leq \Phi(G)$.

Лемма 6. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация и G — группа. Предположим, что $G \notin \mathfrak{F}$, но $G/N \in \mathfrak{F}$ для всех $N \triangleleft G$, $N \neq 1$. Тогда G — примитивная группа.*

Доказательство. По условию леммы $\Phi(G) = 1$ и в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа. Пусть $N \cdot\triangleleft G$ и M — максимальная подгруппа группы G, не содержащая N. Подгруппа M существует, поскольку $N \not\leq \Phi(G) = 1$. Предположим, что $M_G \neq 1$. Так как N — минимальная нормальная подгруппа и $N \not\leq M$, то $N \cap M_G = 1$. Но теперь в группе G имеется по крайней мере две минимальные нормальные подгруппы; противоречие. Поэтому допущение неверно и $M_G = 1$. Значит, G — примитивная группа с примитиватором M.

Группой Шмидта называют ненильпотентную группу, у которой все собственные подгруппы нильпотентны.

Лемма 7. *Если G — p-разрешимая группа и p не делит $|G : N_G(G_q)|$ для всех $q \in \pi(G)$, то G p-нильпотентна.*

Доказательство. Предположим, что в группе G существует p-замкнутая pd-подгруппа Шмидта S. По теореме D5 из [6] подгруппа S содержится в некоторой холловой подгруппе $G_{\{p,q\}}$. По условию леммы $G_{\{p,q\}} = [G_q]G_p$ и S нильпотентна; противоречие. Значит, в группе G нет p-замкнутых pd-подгрупп Шмидта. По теореме IV.5.4 из [3] группа G p-нильпотентна. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть G — p-разрешимая группа и p^2 не делит $|G : N_G(G_q)|$ для всех $q \in \pi(G)$. Тогда G p-сверхразрешима.*

Доказательство проведем индукцией по порядку группы G. В силу леммы 1 условия теоремы переносятся на все фактор-группы группы G. По индукции все нетривиальные фактор-группы группы G p-сверхразрешимы. Так как класс всех p-сверхразрешимых групп образует насыщенную формацию, то по лемме 6 группа G примитивна, в частности, $\Phi(G) = O_{p'}(G) = 1$, в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа $F = F(G) = C_G(F) = O_p(G) = 1$ и $G = [F]M$. По лемме 5 имеем

$$|F : C_F(G_q)| = \frac{|G : N_G(G_q)|}{|M : N_M(G_q)|} = \frac{p^i n}{m},$$

где $i = 0, 1$; p не делит n, $G_q \leq M$ и $q \in \pi(G)$. Поскольку $F = C_G(F)$, то $C_F(G_q) \neq F$. Поэтому $|F : C_F(G_q)| = p$ и $|M : N_M(G_q)|$ не делится на p. По лемме 7 подгруппа M p-нильпотентна. Кроме того, $F = C_F(G_q) \times F_1$, где $|F_1| = p$. По теореме Машке подгруппу F_1 можно выбрать так, что $F_1 \triangleleft [F]G_q$.

Если $C_{F_1 G_q}(F_1) \neq F_1$, то $C_{F_1 G_q}(F_1) \cap G_q \neq 1$ и элемент $x \in (C_{F_1 G_q}(F_1) \cap G_q)^{\#}$ централизует подгруппу F; противоречие. Следовательно, $C_{F_1 G_q}(F_1) = F_1$, и G_q изоморфна подгруппе группы автоморфизмов группы F_1. Так как $\operatorname{Aut} F_1$ — циклическая группа порядка $p - 1$, то G_q циклическая. Поэтому в M все силовские p'-подгруппы циклические. Поскольку M p-нильпотентна, то M дисперсивна и для наибольшего $r \in \pi(G) \setminus \{p\}$ силовская r-подгруппа G_r из M нормальна в M. По лемме 3 имеем $C_F(G_r) = 1$ и $|F| = p$. В силу того, что M p-сверхразрешима по индукции, G p-сверхразрешима. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $\omega = \{p \in \pi(G) \mid p^2$ не делит $|G : N_G(G_q)|$ для всех $q \in \pi(G)\}$. Если группа G ω-разрешима, то G ω-сверхразрешима.*

Следствие 2. *Если группа G разрешима и p^2 не делит $|G : N_G(G_q)|$ для всех p и $q \in \pi(G)$, то G сверхразрешима.*

Замечание. Как сообщил нам профессор В. А. Ведерников, утверждение следствия 2 можно получить на основе его теоремы 2 из [7].

Пример. В группе $PSL(2,5)$ нормализаторы силовских подгрупп имеют индексы 5, 10 и 6. Поэтому требование p-разрешимости в теореме 1 отбросить нельзя.

Напомним, что символом $l_p(G)$ обозначают p-длину группы G.

Теорема 2. *Пусть G — p-разрешимая группа, $\pi(G) = \{p, q_1, \dots, q_k\}$ и $|G : N_G(G_{q_i})| = p^{\alpha_i} m_i$, $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, p не делит m_i, $i = 1, 2, \dots, k$. Тогда $l_p(G) \leq 1 + (\alpha_1 + \dots + \alpha_k)/k$.*

Доказательство проведем индукцией по порядку группы G. В силу лемм 6 и 4 можно считать, что $O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$ и в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа $F = O_p(G) = F(G)$ и

$G = [F]M$ — примитивная группа. По лемме 5

$$|M : N_M(G_{q_i})| = \frac{|G : N_G(G_{q_i})|}{|F : C_F(G_{q_i})|} = \frac{p^{\alpha_i} m_i}{p^{\beta_i}}$$

делит $p^{\alpha_i - 1} m_i$. Здесь $p^{\beta_i} = |F : C_F(G_{q_i})|$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$. По индукции

$$l_p(M) \le 1 + \frac{\alpha_1 - 1 + \dots + \alpha_k - 1}{k} = 1 + \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_k}{k} - 1 = \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_k}{k}.$$

Так как $l_p(G) = 1 + l_p(M)$, теорема доказана.

Следствие. *Если G — p-разрешимая группа и p^n не делит $|G : N_G(G_q)|$ для всех $q \in \pi(G)$, то $l_p(G) \le n$.*

Доказательство. Сохраним обозначения теоремы 2. Пусть $\alpha = \max\limits_{1 \le i \le k} \alpha_i$. Тогда из теоремы 2 следует, что $l_p(G) \le 1 + \alpha$. Поскольку p^α делит индекс некоторой максимальной подгруппы, а $p^{\alpha+1}$ не делит индекс каждой максимальной подгруппы, то $\alpha < n$ и $l_p(G) \le n$.

Теперь рассмотрим строение разрешимых групп с ограниченными индексами нормализаторов силовских подгрупп. В силу следствия 2 теоремы 1 разрешимая группа с индексами нормализаторов силовских подгрупп, свободными от квадратов, является сверхразрешимой. При малых показателях простых делителей индексов нормализаторов силовских подгрупп строение разрешимых групп исследуется в следующих двух теоремах. Напомним, что через $n(G)$ обозначается нильпотентная длина группы G. Если $\mathfrak{F}$ — формация и G — группа, то пересечение всех нормальных подгрупп группы G, фактор-группы по которым принадлежат $\mathfrak{F}$, называют *$\mathfrak{F}$-корадикалом* группы G и обозначают через $G^{\mathfrak{F}}$ (см. [4, 5, 8]). Для любой формации $\mathfrak{F}$ и любой группы G ее $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ является наименьшей нормальной подгруппой, фактор-группа по которой принадлежит $\mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ — формация всех сверхразрешимых групп, то $\mathfrak{U}$-корадикал $G^{\mathfrak{U}}$ называют сверхразрешимым корадикалом группы G. Произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ состоит из всех конечных групп G, для которых $G/G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}$. Нам понадобятся также следующие леммы.

Лемма 8 [9, леммы 3, 4]. *Пусть K — сверхразрешимый корадикал неприводимой разрешимой подгруппы группы $GL(n, p)$. Тогда*

(1) *если $n = 2$, то K — метабелева 2-группа;*

(2) *если $n = 3$, то либо K — абелева группа порядка, делящего $(p-1)^2$, либо K — 3-замкнутая $\{2, 3\}$-подгруппа с метабелевыми силовскими подгруппами.*

Метанильпотентной называют группу, содержащую нильпотентную нормальную подгруппу, фактор-группа по которой нильпотентна.

Лемма 9. *Если G — метанильпотентная группа, то $l_p(G) \le 1$ для любого простого p.*

Доказательство. Пусть N — нильпотентная нормальная подгруппа группы G, фактор-группа по которой нильпотентна. Для любого простого p группа N равна $N_p \times N_{p'}$, где N_p — силовская p-подгруппа группы N, а $N_{p'}$ – ее дополнение. Так как $N_{p'} \lhd G$, то $G_p N_{p'} \lhd G$, где G_p — силовская p-подгруппа группы G, поэтому $l_p(G) \le 1$.

Лемма 10. *Если $G \in \mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$, то $l_p(G) \leq 1$ для всех $p > 2$.*

Доказательство. По индукции можно считать, что $O_{p'}(G) = 1$, в частности, $O_2(G) = 1$, поэтому $G \in \mathfrak{U}$ и $l_p(G) \leq 1$ по лемме 9.

Теорема 3. *Пусть в разрешимой группе G индексы нормализаторов всех силовских подгрупп не делятся на кубы простых чисел. Тогда*

(1) *$G \in \mathfrak{N}_{2'}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$ и $n(G) \leq 4$;*

(2) *$l_2(G) \leq 2$ и $l_p(G) \leq 1$ для любого простого $p > 2$.*

Доказательство. Вначале индукцией по порядку группы G докажем, что $G \in \mathfrak{N}_{2'}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$. В силу леммы 1 и индукции все нетривиальные фактор-группы группы G принадлежат $\mathfrak{N}_{2'}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$, а так как произведение $\mathfrak{N}_{2'}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$ является насыщенной формацией, то по лемме 6 можно считать, что G примитивна. Теперь $\Phi(G) = 1$ и в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа F, совпадающая с подгруппой Фиттинга группы G. Кроме того, $G = [F]M$ и $O_p(M) = 1$, где $p^n = |F|$.

Пусть $q \in \pi(F(M))$. Тогда $N_G(M_q) = N_M(M_q) \leq M$ по лемме 5. Поскольку M_q — силовская q-подгруппа группы G, по условию теоремы $n \leq 2$. Так как $F = C_G(F)$, то $M \cong G/F$ изоморфна подгруппе группы $\operatorname{Aut} F$.

Если $n = 1$, то $\operatorname{Aut} F$ — циклическая группа порядка $p - 1$ и G сверхразрешима, т. е. $G \in \mathfrak{U}$.

Пусть $n = 2$. Тогда $\operatorname{Aut} F = GL(2, p)$. По лемме 9 сверхразрешимый корадикал подгруппы M является 2-группой. Если $p = 2$, то $\operatorname{Aut} F \cong S_3$ и $G \in \mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$. Если $p \neq 2$, то $G \in \mathfrak{N}_{2'}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$. Итак, в любом случае $G \in \mathfrak{N}_{2'}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$.

Поскольку нильпотентная длина сверхразрешимой группы не превосходит 2, то из включения $G \in \mathfrak{N}_{2'}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$ следует, что $n(G) \leq 4$.

Так как $G \in \mathfrak{N}_{2'}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$, группа G обладает нормальным рядом $1 \triangleleft H \triangleleft G$ с метанильпотентными факторами $H \in \mathfrak{N}_{2'}\mathfrak{N}_2$ и $G/H \in \mathfrak{U}$. Из леммы 9 следует, что $l_p(G) \leq 2$ для любого простого p.

Для доказательства оценки $l_p(G) \leq 1$ при $p > 2$ воспользуемся индукцией по порядку группы G. По лемме 6 можно считать, что $\Phi(G) = O_{p'}(G) = 1$, а подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ группы G — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, которая является элементарной абелевой p-группой, и существует дополнение M к подгруппе F в группе G, т. е. $G = [F]M$ — примитивная группа. Теперь для $q \in \pi(F(M))$ из леммы 5 получаем, что

$$|F| = \frac{|G : N_G(M_q)|}{|M : N_G(M_q)|}.$$

В силу того, что M_q — силовская q-подгруппа группы G, по условию теоремы $|F| = p^n$ и $n \leq 2$.

Если $|F| = p$, то G сверхразрешима и $l_p(G) \leq 1$. Пусть $|F| = p^2$. Тогда фактор-группа G/F изоморфна подгруппе полной линейной группы $GL(2, p)$, порядок которой равен $(p^2-1)(p^2-p)$. Поэтому порядок силовской p-подгруппы G_p группы G равен p^3. Если G_p абелева, то $l_p(G) \leq 1$ [3, с. 753]. Если G_p неабелева, то она изоморфна метациклической группе $M_3(p) = \langle a, b \mid a^{p^2} = p^b = 1,\ a^b = a^{1+p}\rangle$ либо группе экспоненты p [3, с. 93]. Согласно лемме 1 из [10] первый случай невозможен, а по теореме Холла — Хигмена [11] во втором случае $l_p(G) \leq 1$. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть в разрешимой группе G индексы нормализаторов всех силовских подгрупп не делятся на четвертые степени простых чисел. Тогда*
(1) $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$ *и* $n(G) \leq 5$;
(2) $l_p(G) \leq 2$ *для всех* p.

Доказательство проведем индукцией по порядку группы G. Повторяя рассуждения теоремы 3, достаточно рассмотреть случай, когда $|F| = p^3$ и фактор-группа G/F изоморфна подгруппе группы $GL(3,p)$. В силу леммы 8 сверхразрешимый корадикал группы G/F принадлежит $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_2$ и $G/F \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$. Поэтому $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$ и (1) доказано.

Из лемм 9 и 10 следует, что $l_p(G) \leq 2$ для всех $p > 2$. Для получения оценки $l_2(G) \leq 2$ применим индукцию. По индукции $O_{2'}(G) = \Phi(G) = 1$ и $F = F(G)$ — элементарная абелева 2-подгруппа порядка 2^n, где $n \leq 3$. Если $n = 1$, то $F = G$. Если $n = 2$, то G/F изоморфна подгруппе группы $GL(2,2) \simeq S_3$ и $l_2(G) \leq 2$. Если $n = 3$, то G/F изоморфна подгруппе группы $GL(3,2)$. Так как разрешимые подгруппы группы $GL(3,2)$ без неединичных нормальных 2-подгрупп имеют нечетный порядок или изоморфны S_3, то $l_2(G) \leq 2$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кондратьев А. С.* Критерий 2-нильпотентности конечных групп // Подгрупповая структура групп. Свердловск, 1988. С. 82–84.
2. *Chigira N.* Number of Sylow subgroups and p-nilpotence of finite groups // J. Algebra. 1998. V. 201. P. 71–85.
3. *Huppert B.* Endliche Gruppen I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967.
4. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
5. *Gaschutz W.* Lectures of subgroups of Sylow type in finite soluble groups. Canberra: Australian National Univ., 1979. (Notes on Pure Math; 11).
6. *Hall Ph.* Theorems like Sylow's // Proc. London Mat. Soc. 1956. V. 6, N 3. P. 286–304.
7. *Ведерников В. А.* О π-свойствах конечных групп // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. Минск: Наука и техника, 1986. С. 13–19.
8. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
9. *Грибовская Е. Е., Монахов В. С.* Конечные группы с индексами максимальных подгрупп, не делящимися на p^4. Гомель, 2000. 12 с. (Препринт/Гомельский гос. университет; № 91).
10. *Монахов В. С.* О произведении двух групп с циклическими подгруппами индекса 2 // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.мат.навук. 1996. Т. 3. С. 21–24.
11. *Hall P., Higman G.* The p-length of a p-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem // Proc. London Math. Soc. 1956. V. 7, N 3. P. 1–42.

Статья поступила 31 января 2001 г.

Мио Лон (Miao Long)
Department of Mathematics, University of Science and Technology of China,
Hefei 230026, P. R. China
Го Вэньбинь (Guo Wenbin)
Department of Mathematics, Xuzhou Normal University, Xuzhou 221009, P. R. China
yzgwb@pub.yz.jsinfo.net