Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2001. Том 42, № 6

УДК 519.9+532.5

КАЧЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА ОТРЫВНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ПРАНДТЛЯ

Н. В. Хуснутдинова

Аннотация: Исследуется поведение решений системы дифференциальных уравнений пограничного слоя Прандтля за точкой отрыва пограничного слоя. Получены условия на положительный градиент давления, обеспечивающие последующее за отрывом присоединение пограничного слоя к обтекаемой поверхности. Доказана возможность управления пограничным слоем при помощи чередования отсоса и вдува. Библиогр. 8.

1. Уравнения пограничного слоя Прандтля

Одной из основных математических моделей, описывающих стационарный поток вязкой несжимаемой жидкости около обтекаемой поверхности, является следующая начально-краевая задача для системы уравнений пограничного слоя Прандтля [1, гл. 2]:

$$uu_x + vu_y = \nu u_{yy} - p_x, \quad u_x + v_y = 0, \quad (x, y) \in D, \tag{1.1}$$

$$u|_{x=0} = u_0(y), \quad u|_{y=0} = (v - v_0(x))|_{y=0} = 0, \quad \lim_{y\to\infty} u(x, y) = U(x). \tag{1.2}$$

Здесь $D = \{0 < x < A,\ 0 < y < \infty\}$, x — продольная координата вдоль обтекаемого тела, y — вдоль нормали к нему, (u, v) — вектор скорости течения, $\nu > 0$ — коэффициент вязкости жидкости, плотность жидкости ρ предполагается равной единице, $p(x)$ — давление, связанное со скоростью внешнего течения $U(x)$ уравнением Бернулли

$$2p(x) + U^2(x) = C = \text{const} > 0. \tag{1.3}$$

При $v_0(x) \equiv 0$ в (1.2) обтекаемая поверхность непроницаема, при $v_0(x) < 0$ или $v_0(x) > 0$ через пористую стенку $y = 0$ происходит соответственно отсос или вдув.

В дальнейшем через $C^{l+\alpha}[a, \infty)$, $\alpha > 0$, будем обозначать множество функций, ограниченных и непрерывных по Гёльдеру на $[a, \infty)$ вместе с производными до порядка l.

Предположения:

(a) $u_0(y) \in C^{2+\alpha}[0, \infty)$, $\alpha \in (0, 1)$, $U(x) \in C^2[0, \infty)$, $v_0(x) \in C^1[0, \infty)$; $0 < u_0(y) \le U(0)$, $u_0'(y) > 0$, $u_0''(y) \le 0$ при $y > 0$, $u_0(0) = 0$, $u_0'(0) > 0$;

$$\lim_{y\to\infty} u_0(y) = U(0), \quad \lim_{y\to\infty} \frac{U(0) - u_0(y) + |u_0''(y)|}{u_0'(y)} = \text{const} > 0;$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00622) и программы Университеты России (грант № 1788).

(б) $U(x) \geq \delta = \mathrm{const} > 0$, $U'(x) < 0$ при $x \in (0, \infty)$, $U'(0) = 0$, $|[U^2(x)]'| \leq \delta^2/(kx+1)^\lambda$, $x \in [x_1, \infty)$, где $\delta, k > 1, x_1 > 1, \lambda > 3$ — некоторые константы;

(в) выполнено условие согласования в точке (0,0): $\nu u_0''(y) - v_0(0)u_0'(y) = O(y^2)$ при $y \to 0$.

Предположения (а)–(в) обеспечивают существование в области D гладкого решения (u, v) задачи (1.1), (1.2) с условием $u(x, y) > 0$, $(x, y) \in D$, при некоторых A (см. [1, с. 28]).

Пусть A_0 — верхняя грань таких A. Если $A_0 < \infty$, то будем говорить, что *имеет место отрыв пограничного слоя*, а точку $x = A_0$ называть *точкой отрыва пограничного слоя*. При $A = \infty$ течение в пограничном слое называется *безотрывным*.

Экспериментальные данные показывают, что отрыв пограничного слоя возникает при отрицательном градиенте $U'(x)$ скорости внешнего течения в точке, где модуль градиента скорости достигает максимального значения (см. [2, с. 388; 3, с. 408]).

Этому наблюдению соответствует найденное в работе автора (см. [4, формула (1.5)]) интегральное условие на величину $|U'|$, гарантирующее отрыв пограничного слоя, в том числе и при строго положительной скорости $U(x)$ внешнего течения.

При отрыве пограничного слоя от поверхности тела около тела и за ним образуется область отрывного течения. Если область мала по сравнению с телом и ограничена разделяющей линией тока, а также точками отрыва и присоединения, то такой тип течения называется «отрывным» [5, т. 2, с. 8]. Измерения распределения давления на обтекаемой поверхности тела показывают, что в ряде случаев на участке, соответствующем зоне отрыва, оно почти постоянно и практически совпадает с давлением на внешней границе отделившегося пограничного слоя. В этих условиях в зоне отрыва пограничного слоя, примыкающей к обтекаемой поверхности, давление полагается постоянным, а жидкость неподвижной (см. [3, с. 424–426]). Области отрыва в таких течениях часто называют «застойными зонами» [5, т. 2, с. 10].

В пп. 2, 3 рассматривается предложенная в [4] модель пограничного слоя с отрывом у непроницаемой стенки ($v_0(x) \equiv 0$), учитывающая специфику таких течений: обратное присоединение пограничного слоя к поверхности тела происходит на некотором расстоянии за точкой отрыва с образованием ограниченных областей отрыва, вне которых выполняются уравнения Прандтля — Мизеса.

В п. 5 рассматривается классическая модель пограничного слоя Прандтля (1.1), (1.2) обтекания вязкой жидкостью пористой стенки с отсосом ($v_0(x) < 0$) и вдувом ($v_0(x) > 0$).

Установлено, что чередованием отсоса и вдува можно добиться безотрывного течения в пограничном слое у пористой стенки произвольной длины.

2. Модель пограничного слоя с отрывом

Чтобы сформулировать основные результаты, перейдем к переменным Мизеса:

$$x = x, \quad \psi = \psi(x, y), \quad \psi(x, 0) = 0, \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

и введем новую неизвестную функцию $\omega(x, \psi) \equiv u^2(x, y)$. В результате этого область D перейдет в область $R = \{0 < x < A,\ 0 < \psi < \infty\}$, а краевая задача

(1.1), (1.2) при $v_0(x) \equiv 0$ с учетом (1.3) примет вид

$$\omega_x = \nu\sqrt{\omega}\omega_{\psi\psi} + 2UU', \quad (x,\psi) \in R, \tag{2.1}$$

$$\omega|_{x=0} = \omega_0(\psi), \quad \omega|_{\psi=0} = 0, \quad \lim_{\psi\to\infty} \omega(x,\psi) = U^2(x), \tag{2.2}$$

где

$$\omega_0\left(\int\limits_0^y u_0(t)\,dt\right) \equiv u_0^2(y), \quad y \geq 0,$$

при этом в силу предположений (а), (в) $\omega_0(\psi)$ удовлетворяет условиям:

(г) $\omega_0(\psi) \in C^1[0,\infty) \cap C^{2+\alpha}(0,\infty)$, $0 < \omega_0(\psi) \leq U^2(0)$, $\omega_0'(\psi) > 0$, $\omega_0''(\eta) \leq 0$ при $\psi > 0$, $\omega_0(0) = 0$, $\omega_0'(0) > 0$;

$$\lim_{\psi\to\infty} \omega_0(\psi) = U^2(0), \quad \lim_{\psi\to\infty} \frac{U^2(0) - \omega_0(\psi) + |\omega_0''(\psi)|}{\omega_0'(\psi)} = \text{const} > 0,$$

$$\nu\sqrt{\omega_0}\omega_0''(\psi) = O(\psi) \quad \text{при } \psi \to 0.$$

Для описания процесса отрыва пограничного слоя с последующим его присоединением к обтекаемой поверхности воспользуемся предложенной в [4] моделью пограничного слоя с отрывом, которая состоит в отыскании неотрицательного решения $\omega(x,\psi)$ следующей краевой задачи:

$$\omega_x = \nu\sqrt{\omega}\omega_{\psi\psi} + \varphi(x;\omega), \quad (x,\psi) \in R, \tag{2.3}$$

$$\omega|_{x=0} = \omega_0(\psi), \quad \omega|_{\psi=0} = 0, \tag{2.4}$$

где $\varphi(x;\omega) \equiv 2U(x)U'(x)$ при $\omega > 0$, $\varphi(x;0) = 0$.

Отметим, что если существует положительное в области R решение задачи (2.3), (2.4), то $\varphi(x;\omega) \equiv 2UU'$ и, как следует из теоремы 2.1.14 в [1], $\lim\limits_{\psi\to\infty} \omega(x,\psi) = U^2(x)$, $x \in [0,A)$, т. е. это решение является также решением задачи (2.1), (2.2). Обратно, положительное при $(x,\psi) \in R$ решение задачи (2.1), (2.2) удовлетворяет, очевидно, и задаче (2.3), (2.4).

Таким образом, при выполнении предположений (а)–(в) гладкое положительное решение задачи (2.3), (2.4) существует в области R при $A \leq A_0$. При произвольном $A > A_0$ такие решения могут отсутствовать. В этом случае существуют неотрицательные обобщенные решения задачи (2.3), (2.4), обращающиеся в нуль во внутренних точках области R (см. [4, теорема 2.1]). В п. 4 будет доказано, что точки, в которых обобщенное решение обращается в нуль, не являются изолированными, а в совокупности образуют ограниченную область — *локальную застойную зону*, примыкающую к оси $\psi = 0$, $x \geq A_0$.

Следуя [4], дадим определение обобщенного решения задачи (2.3), (2.4) в области $R_0 = \{0 < x < \infty, 0 < \psi < \infty\}$.

Обобщенным решением краевой задачи (2.3), (2.4) *в области* R_0 назовем непрерывную неотрицательную и ограниченную при $(x,\psi) \in \overline{R}_0$ ($\overline{R}_0$ — замыкание области R_0) функцию $\omega(x,\psi)$, удовлетворяющую условиям (2.4) и обладающую следующими свойствами:

1) существует ограниченная в R_0 обобщенная производная ω_ψ, при этом обобщенная производная $\frac{\partial\omega^{3/4}}{\partial\psi}$ суммируема с квадратом в любой ограниченной подобласти $\overline{R}_0$;

2) для любой непрерывно дифференцируемой финитной в $\overline{R}_0$ функции $f(x,\psi)$, равной нулю при $\psi=0$, выполняется интегральное тождество

$$\iint\limits_{R_0}\left[\omega f_x-\frac{8}{9}\nu\left(\frac{\partial\omega^{3/4}}{\partial\psi}\right)^2 f-\nu\sqrt{\omega}\omega_\psi f_\psi+\varphi(x;\omega)f\right]dxd\psi$$

$$+\int\limits_0^\infty \omega_0(\psi)f(0,\psi)\,d\psi=0.$$

Существование обобщенного решения задачи (2.3), (2.4) доказано в работе [4] с помощью предельного при $\varepsilon\to 0$ перехода в семействе гладких положительных в области $R_\varepsilon=\{0<x<\infty,\ 0<\psi<\frac{1}{\varepsilon}\}$ решений $\omega(x,\psi,\varepsilon)\in C^{3+\alpha}(\overline{R}_\varepsilon)$ следующих краевых задач:

$$\omega_x=\nu\sqrt{\omega}\omega_{\psi\psi}+2UU'\frac{\omega-\varepsilon}{\omega+\varepsilon},\quad (x,\psi)\in R_\varepsilon, \tag{2.5}$$

$$\omega|_{x=0}=\omega_{0\varepsilon}(\psi),\quad \omega|_{\psi=0}=\varepsilon,\quad \omega|_{\psi=1/\varepsilon}=\omega_0(1/\varepsilon). \tag{2.6}$$

Здесь $\overline{R}_\varepsilon$ — замыкание области $R_\varepsilon, \{\omega_{0\varepsilon}(\psi)\}\in C^4[0,\frac{1}{\varepsilon}]$ — множество функций, равномерно сходящихся при $\varepsilon\to 0$ к $\omega_0(\psi)$, $0<\psi<\infty$, и удовлетворяющих условиям:

(д) $\omega_0(\psi)\le\omega_{0\varepsilon}(\psi)\le\omega_0(\frac{1}{\varepsilon})$, $\omega_{0\varepsilon}(\psi)\equiv\omega_0'(0)\psi+\varepsilon$ при $\psi\in[0,\varepsilon]$, $\omega_{0\varepsilon}(\psi)\equiv\omega_0(\frac{1}{\varepsilon})$ при $\psi\in[\frac{1}{\varepsilon}-\varepsilon,\frac{1}{\varepsilon}]$, $\varepsilon\in[0,\varepsilon_1]$, где ε_1 — некоторое достаточно малое число ($\varepsilon_1\ll 1$), $0<\omega_{0\varepsilon}'(\psi)\le\omega_0'(0)$, $\omega_{0\varepsilon}''(\psi)\le 0$ при $\psi\in[0,\frac{1}{\varepsilon}]$.

3. Область положительности решений

Теорема 1. *При выполнении предположений* (б), (г) *решение* $\omega(x,\psi)$ *задачи* (2.3), (2.4) *положительно в некоторой области* $G_F=\{0<x<\infty, F(x)<\psi<\infty\}$, *где* $F(x)\in C[0,\infty)$, $F(0)=F(x_0)=0$, $F(x)>0$ *при* $x\in(0,x_0)$, $F(x)\equiv 0$ *при* $x\ge x_0$, *и является в этой области классическим решением уравнения Прандтля — Мизеса* (2.1).

Доказательство. Для построения функции $F(x)$ воспользуемся ее представлением в виде

$$F(x)=x(2M-x)\quad \text{при } x\in[0,M];$$

$$F(x)\equiv F_1(x)=M^2-\int\limits_M^x(1-e^{-2(t-M)})[2\beta(t-M/2)+1]^{-1}\,dt\quad \text{при } x\in[M,x_0],$$

$$F(x)\equiv 0 \text{ при } x>x_0,\ \text{где } x_0 \text{ определяется из равенства } F_1(x_0)=0.$$

При любых положительных параметрах M и β точка $x_0=x_0(M,\beta)$ существует, так как $F_1(M)>0$, $F_1(\infty)<0$. По построению $F(x)\in C^2[0,x_0]\cap C[0,\infty)$, $|F'''(x)|\le K$, $x\in[0,x_0]$, $|F'(x)|\le 2M$ при $x\in[0,\infty)$ (K — некоторая постоянная). Постоянные $M>1$, $\beta>1$ будут выбраны ниже.

С помощью замены переменных $x=x$, $\eta=\psi-F(x)$ преобразуем области $G_F, R_\varepsilon\cap G_F=\{0<x<\infty,\ F(x)<\psi<\frac{1}{\varepsilon}\}$ в области $P_0=\{0<x<\infty,\ 0<\eta<\infty\}$, $P_\varepsilon=\{0<x<\infty,\ 0<\eta<\frac{1}{\varepsilon}-F(x)\}$, а решения $\omega(x,\psi)$, $\omega(x,\psi,\varepsilon)$ задач (2.3), (2.4) и (2.5), (2.6) — в решения $w(x,\eta)\equiv\omega(x,\eta+F)$, $w(x,\eta,\varepsilon)\equiv\omega(x,\eta+F,\varepsilon)$ следующих краевых задач:

$$L(w)\equiv\nu\sqrt{w}w_{\eta\eta}+F'(x)w_\eta-w_x=-2UU',\quad (x,\eta)\in P_0, \tag{3.1}$$

$$w|_{x=0} = \omega_0(\eta), \quad w|_{\eta=0} = \omega(x, F(x)); \tag{3.2}$$

$$L_\varepsilon(w) \equiv \nu\sqrt{w}w_{\eta\eta} + F'(x)w_\eta - w_x + 2UU'\frac{w-\varepsilon}{w+\varepsilon} = 0, \quad (x,\eta) \in P_\varepsilon, \tag{3.3}$$

$$w|_{x=0} = \omega_{0\varepsilon}(\eta), w|_{\eta=0} = \omega(x, F(x), \varepsilon), w|_{\eta=\frac{1}{\varepsilon}-F} = \omega_0(1/\varepsilon). \tag{3.4}$$

Поскольку $\omega(x,\psi,\varepsilon) \in C^{3+\alpha}(\overline{R}_\varepsilon)$, $F(x) \in C^2[0,x_0] \cup C^2[x_0,\infty)$, $|F'(x)| \le 2M$, $x \in [0,\infty)$, то $w(x,\eta,\varepsilon) \in C^{2+\alpha}(\Pi_i)$, $i = 1,2$; $\Pi_1 = \{0 < x < x_0,\ 0 < \eta < \frac{1}{\varepsilon} - F\}$, $\Pi_2 = \{x_0 < x < \infty,\ 0 < \eta < \frac{1}{\varepsilon} - F\}$.

Чтобы доказать положительность решения $\omega(x,\psi)$ задачи (2.3), (2.4) в области G_F, построим для решений $w_\varepsilon(x,\eta) \equiv w(x,\eta,\varepsilon)$ регуляризованных краевых задач (3.3), (3.4) «барьеры снизу» $\sigma_\varepsilon(x,\eta)$ такие, что

$$w_\varepsilon(x,\eta) \ge \sigma_\varepsilon(x,\eta) > \lim_{\varepsilon\to 0}\sigma_\varepsilon(x,\eta) = \sigma(x,\eta), \quad (x,\eta) \in P_\varepsilon,$$

причем $\sigma(x,\eta) > 0$, $\sigma'_\eta(x,\eta) > 0$ при $\eta > 0$, $\sigma(x,0) = 0$.

Функцию $\sigma_\varepsilon(x,\eta)$ представим в виде $\sigma_\varepsilon(x,\eta) = \Phi(x)f(\eta+\varepsilon)$, где

$$\Phi(x) \equiv U^2(x) \quad \text{при } x \in [0, M/2],$$

$$\Phi(x) \equiv U^2(M/2)[2\beta(x - M/2) + 1]^{-2} \quad \text{при } x \in [M/2, \infty).$$

По построению $\Phi(x)$ принадлежит $C[0,\infty)$. Потребуем, чтобы функция $f(\eta)$ была дважды непрерывно дифференцируемой при $\eta \ge 0$ и удовлетворяла условиям $f(\eta) = a_1\eta + a_2\eta^{4/3}$ при $\eta \le 1$, $f(1) \le f(\eta) < 1$, $|f'| + |f''| \le a_3$ при $\eta \ge 1$, $f'(\eta) > 0$ при $\eta \ge 0$, $f'(\eta) \to 0$, $f''(\eta) \to 0$ при $\eta \to \infty$,

$$\lim_{\eta\to\infty} f(\eta) = 1, \quad \lim_{\eta\to\infty}\frac{1 - f(\eta) + |f''(\eta)|}{f'(\eta)} = a_4, \tag{3.5}$$

где $a_i = \mathrm{const} > 0$, $i = 1,2,3,4$; $a_1 + a_2 < 1$, $\varepsilon \le \varepsilon_1$. Выберем a_i, ε_1 так, чтобы на параболической границе

$$\gamma_\varepsilon = \{x = 0,\ 0 \le \eta \le 1/\varepsilon;\ \eta = 0,\ x \ge 0;\ \eta = 1/\varepsilon - F,\ x \ge 0\}$$

области P_ε для разности $z = w_\varepsilon(x,\eta) - \sigma_\varepsilon(x,\eta)$ выполнялось неравенство

$$[w_\varepsilon(x,\eta) - \sigma_\varepsilon(x,\eta)] \ge 0, \quad (x,\eta) \in \gamma_\varepsilon. \tag{3.6}$$

Это возможно при $a_i \ll 1$, $\varepsilon_1 \ll 1$ в силу оценки $w_\varepsilon(x,\eta) \equiv \omega(x,\eta+F,\varepsilon) \ge \varepsilon$, вытекающей согласно принципу максимума для $\omega(x,\psi,\varepsilon)$ из уравнения (2.5) и условий (д) из п. 2 на граничные данные (2.6) (см. также [4, (2.7)]).

В областях $H_1 = \{0 < x < \frac{M}{2}, 0 < \eta < \frac{1}{\varepsilon}\}$, $H_2 = \{\frac{M}{2} < x < x_0, 0 < \eta < \frac{1}{\varepsilon}\}$, $H_3 = \{x_0 < x < \infty, 0 < \eta < \frac{1}{\varepsilon}\}$ функция $z = w_\varepsilon(x,\eta) - \sigma_\varepsilon(x,\eta)$ удовлетворяет линейному параболическому уравнению

$$L_0(z) \equiv \nu\sqrt{w_\varepsilon}z_{\eta\eta} + F'(x)z_\eta - z_x + dz = -L_\varepsilon(\sigma_\varepsilon),$$

где

$$L_0(w_\varepsilon - \sigma_\varepsilon) = L_\varepsilon(w_\varepsilon) - L_\varepsilon(\sigma_\varepsilon), \quad d = \nu\sigma''_{\varepsilon\eta\eta}(\sqrt{w_\varepsilon} + \sqrt{\sigma_\varepsilon})^{-1} + \frac{4UU'\varepsilon}{(w_\varepsilon+\varepsilon)(\sigma_\varepsilon+\varepsilon)}.$$

Выберем параметры M, β настолько большими, чтобы правая часть выражения

$$L_\varepsilon(\sigma_\varepsilon) = \nu\Phi\sqrt{\Phi f}f'' + F'(x)\Phi f' - \Phi'_x f + 2UU'\frac{\sigma_\varepsilon - \varepsilon}{\sigma_\varepsilon + \varepsilon}$$

на каждом из промежутков $0 \le x \le \frac{M}{2}$, $\frac{M}{2} \le x \le M$, $M \le x \le x_0$, $x > x_0$ стала положительной.

На промежутке $0 \le x \le \frac{M}{2}$, где $\Phi(x) \equiv U^2(x)$, $F'(x) = 2(M-x) \ge M$, имеем

$$L_\varepsilon(\sigma_\varepsilon) > \nu U^3(x)\sqrt{f}f'' + U^2(x)Mf' + 2UU'(1-f). \tag{3.7}$$

Поскольку $f'(\eta+\varepsilon) > 0$ при $\eta \ge 0$, $|f''(\eta)| < a_3$, $U(x) \ge \delta > 0$ и функции $1 - f(\eta+\varepsilon)$, $f'(\eta+\varepsilon)$, $f''(\eta+\varepsilon)$ стремятся к нулю при $\eta \to \infty$ в силу (3.5) с одинаковым порядком, то правая часть неравенства (3.7) больше нуля при достаточно больших $M \ge M_1$, где M_1 зависит, очевидно, лишь от данных задачи (2.1), (2.2). При этом если $M_1 \ge 2x_1$, что без ограничения общности в дальнейшем предполагается, то на остальных промежутках согласно условию (б) на $|2UU'|$ будут выполняться неравенства

$$L_\varepsilon(\sigma_\varepsilon) > \frac{U^2(M/2)}{[2\beta(x-M/2)+1]^3}\{\nu U(M/2)\sqrt{f}f'' + 4\beta f\} - \frac{\delta^2}{(kx+1)^\lambda} \tag{3.8}$$

при $x \in [M/2, M] \cup (x_0, \infty)$,

$$L_\varepsilon(\sigma_\varepsilon) > \frac{U^2(M/2)}{[2\beta(x-M/2)+1]^3}\{\nu U(M/2)\sqrt{f}f'' - f' + 4\beta f\} - \frac{\delta^2}{(kx+1)^\lambda} \tag{3.9}$$

при $x \in [M, x_0]$.

При $\eta \le \eta_0 \ll 1$, $\varepsilon \le \varepsilon_0 \le \varepsilon_1 < \eta_0$ выражения в фигурных скобках правых частей неравенств (3.8), (3.9) больше единицы, так как $U(\frac{M}{2}) \ge \delta > 0$, $\sqrt{f}f'' \to \infty$ при $(\eta+\varepsilon) \to 0$. Если $(\eta+\varepsilon) \in [\eta_0+\varepsilon_0, \frac{1}{\varepsilon_0} - F]$, то $f(\eta+\varepsilon) \ge f(\eta_0+\varepsilon_0) > a_1(\eta_0+\varepsilon_0) > 0$ и, следовательно, выражения в фигурных скобках будут больше единицы при достаточно больших $\beta \ge \beta_0$. При этом β_0, очевидно, не зависит от величины постоянной M.

Поскольку последнее слагаемое в неравенствах (3.8), (3.9) является бесконечно малой величиной при $x \to \infty$ порядка выше, чем у первого слагаемого, то при $\beta \le k$ ($\beta \ge \beta_0$) правые части неравенств (3.8), (3.9) строго положительны, а при $\beta > k$ они положительны, очевидно, при $M > M_2 = \frac{1}{k}\big[\big(\frac{\beta}{k}\big)^{\frac{3}{\lambda-3}} - 1\big] > \frac{1}{k}\big[\big(\frac{\beta M+1}{kM+1}\big)^{\frac{3}{\lambda-3}} - 1\big]$.

Подчеркнем, что величины β_0 и M_2 зависят только от данных задачи (2.1), (2.2) и не зависят от ε.

Таким образом, при $M \ge \max(M_1, M_2)$, $\beta \ge \beta_0$ с учетом (3.6) имеем

$$(w_\varepsilon - \sigma_\varepsilon)|_{\gamma_\varepsilon} \ge 0, \quad L_0(w_\varepsilon - \sigma_\varepsilon) < 0 \quad \text{при } (x,\eta) \in H_1 \cup H_2 \cup H_3.$$

Отсюда, применяя принцип максимума, последовательно в каждой из областей H_1, H_2, H_3, приходим к заключению о неотрицательности $z = w_\varepsilon(x,\eta) - \sigma_\varepsilon(x,\eta)$ в замыкании этих областей, т. е.

$$w_\varepsilon(x,\eta) \ge \sigma_\varepsilon(x,\eta), \quad (x,\eta) \in \overline{P}_\varepsilon. \tag{3.10}$$

Так как множество $\{w_\varepsilon(x,\eta)\}$ решений задач (3.3), (3.4) относительно компактно в пространстве $C^\alpha\{0 \le x \le N,\ 0 \le \eta \le N\}$ (N — любое число, см. [4, с. 1200]), то, выделяя в нем сходящуюся подпоследовательность $\{w_{\varepsilon_k}(x,\eta)\}$ и переходя по ней к пределу при $\varepsilon_k \to 0$ в неравенстве (3.10), получим

$$w(x,\eta) \ge \sigma(x,\eta) > 0 \quad \text{при } (x,\eta) \in P_0,$$

$$\omega(x,\psi) \ge \sigma(x,\psi - F(x)) > 0 \quad \text{при } (x,\psi) \in G_F,$$

т. е. функция $\omega(x,\psi)$ положительна в области G_F и, следовательно, в этой области уравнение (2.3) выполняется в обычном смысле (см. [4, теорема 2.1]). Теорема 1 доказана.

4. Существование локальных застойных зон

Теорема 2. *Обобщенное решение* $\omega(x,\psi)$ *задачи* (2.3), (2.4) *не может иметь изолированных нулей в области* $Q_0 = \{0 < x < x_0,\ 0 < \psi < F(x)\}$.

Доказательство. Сначала для решений $\omega_\varepsilon(x,\psi)$ регуляризованных краевых задач (2.5), (2.6) установим справедливость неравенств

$$\varepsilon \le \omega_\varepsilon(x,\psi) \le \omega_0(1/\varepsilon), \quad (x,\psi) \in R_\varepsilon, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial \omega_\varepsilon}{\partial \psi} \ge 0, \quad (x,\psi) \in R_\varepsilon. \tag{4.2}$$

Неравенства (4.1) выполняются, очевидно, при $\varepsilon \le \varepsilon_1 \ll 1$ на границе $S_\varepsilon = \{x = 0,\ 0 \le \psi \le \frac{1}{\varepsilon};\ \psi = 0,\ x \ge 0;\ \psi = \frac{1}{\varepsilon},\ x \ge 0\}$ области R_ε в силу условий (д) из п. 2. В области R_ε неотрицательные при $(x,\psi) \in S_\varepsilon$ функции $z = \omega_\varepsilon(x,\psi) - \varepsilon$, $r = \omega_0(\frac{1}{\varepsilon}) - \omega_\varepsilon(x,\psi)$ удовлетворяют соответственно линейным параболическим уравнениям

$$\nu\sqrt{\omega_\varepsilon} z_{\psi\psi} - z_x + \frac{2UU'}{\omega_\varepsilon + \varepsilon} z = 0,$$

$$\nu\sqrt{\omega_\varepsilon} r_{\psi\psi} - r_x + \frac{2UU'}{\omega_\varepsilon + \varepsilon} r = 2UU' \frac{\omega_0(\frac{1}{\varepsilon}) - \varepsilon}{\omega_\varepsilon + \varepsilon} < 0,$$

из которых по принципу максимума вытекает неотрицательность $z(x,\psi)$, $r(x,\psi)$ в области R_ε, т. е. справедливость (4.1).

Поскольку $\varepsilon = \min\limits_{R_\varepsilon} \omega_\varepsilon(x,\psi)$, $\omega_0(1/\varepsilon) = \max\limits_{R_\varepsilon} \omega_\varepsilon(x,\psi)$, $\omega'_{0\varepsilon}(\psi) > 0$, $\psi \in [0, 1/\varepsilon]$, то $q = \omega_{\varepsilon\psi}(x,\psi) \ge 0$ при $(x,\psi) \in S_\varepsilon$. В области R_ε функция $q(x,\psi,\varepsilon)$ удовлетворяет однородному параболическому уравнению

$$q_x = \nu\sqrt{\omega_\varepsilon} q_{\psi\psi} + \frac{\nu q q_\psi}{2\sqrt{\omega_\varepsilon}} + \frac{4\varepsilon UU'}{(\omega_\varepsilon + \varepsilon)^2} q, \quad \text{где } U'(x) \le 0.$$

Отсюда согласно принципу максимума получаем, что $q = \frac{\partial \omega_\varepsilon}{\partial \psi} \ge 0$ при $(x,\psi) \in R_\varepsilon$. Оценка (4.2) доказана.

Предположим теперь, что $\omega(x_1,\psi_1) = 0$ при $(x_1,\psi_1) \in Q_0$.

Возможны два варианта: либо $\omega(x_1,\psi) = 0$ при $\psi \in [0,\psi_1]$, либо в некоторой точке $\psi_0 \in (0,\psi_1)$ неотрицательная функция $\omega(x_1,\psi)$ имеет локальный положительный максимум (так как $\omega(x_1,0) = \omega(x_1,\psi_1) = 0$). В последнем случае существует окрестность $(\psi_0 - \delta, \psi_0 + \delta)$ точки ψ_0, в которой производная $\omega_\psi(x_1,\psi)$ меняет знак. Так как из семейства $\{\omega_\varepsilon(x,\psi)\}$ можно выбрать сходящуюся к $\omega(x,\psi)$ подпоследовательность $\omega_{\varepsilon_k}(x,\psi)$ такую, что производные $\frac{\partial \omega_{\varepsilon_k}}{\partial \psi}$ $*$-слабо сходятся при $\varepsilon_k \to 0$ к обобщенной производной $\omega'_\psi(x,\psi)$ (см. [4, лемма 2]), то при $\varepsilon_k \ll 1$ в указанной выше окрестности точки ψ_0 производные $\frac{\partial \omega_{\varepsilon_k}}{\partial \psi}$ также меняют знак, что противоречит оценке (4.2).

Таким образом, доказано, что если $\omega(x_1,\psi_1) = 0$, то

$$\omega(x_1,\psi) \equiv 0 \quad \text{при } \psi \in [0,\psi_1]. \tag{4.3}$$

С другой стороны, из [4, лемма 3.2, п. 3] следует, что если $\omega(x_1,\psi) = 0$ при $0 \le \psi_0 - l \le \psi \le \psi_0 + l$, $0 < l < \frac{\psi_1}{2}$, то для любого $\psi_0 \in [\frac{\psi_1}{2}, \psi_1]$, $l \le \psi_1 - \psi$

$$\omega(x,\psi_0) = 0 \quad \text{при } x_1 \le x \le x_2,\ x_2 = x_1 + h,$$

$$h = \frac{l^2}{24\nu m}, \quad m = \max_{x \geq x_1} \left\{ \frac{U(x)}{U(0)} \left[\omega_0 \left(\int_{x_1}^{x} \sqrt{6\nu |U'(\tau)|}\, d\tau \right) \right]^{1/2} \right\}.$$

Значит,

$$\omega(x,\psi) \equiv 0 \quad \text{при } x \in \left[x_1, x_1 + \frac{(\psi_1 - \psi)^2}{24\nu m} \right], \quad \psi \in [\psi_1/2, \psi_1]. \tag{4.4}$$

В частности,

$$\omega(x, \psi_1/2) \equiv 0 \quad \text{при } x \in [x_1, x_3], \quad x_3 = x_1 + \frac{\psi_1^2}{96\nu m}.$$

Отсюда аналогично (4.3) имеем

$$\omega(x,\psi) \equiv 0 \quad \text{при } x \in [x_1, x_3],\ \psi \in [0, \psi_1/2]. \tag{4.5}$$

Объединяя (4.4) и (4.5), окончательно получим

$$\omega(x,\psi) \equiv 0 \quad \text{при } (x,\psi) \in Q = \{x_1 < x < x_3,\ \psi_1 - \sqrt{24\nu m(x - x_1)}\},$$

где Q — локальная застойная зона. Таким образом, точка (x_1, ψ_1) не является изолированной. Утверждение теоремы 2 доказано.

Следствие. *В силу теоремы* 1 *все локальные застойные зоны задачи* (2.3), (2.4) *расположены в ограниченной области* $\{A_0 < x < x_0,\ 0 < \psi < F(x)\}$, *примыкающей к оси* $\psi = 0$.

5. Управление пограничным слоем Прандтля с помощью чередования отсоса и вдува

Одним из практических способов управления пограничным слоем является отсасывание жидкости внутрь пористой стенки или ее вдувание в пограничный слой (см. [2, с. 352]). В математической постановке предотвращающее отрыв свойство отсоса ($v_0(x) < 0$) доказано в работе [6]. С другой стороны, при $v_0(x) \equiv \varepsilon > 0$, $x \in [0, \infty)$, где ε — сколь угодно малое число, установлено, что отрыв пограничного слоя наступает всегда [7].

В следующей теореме утверждается, что безотрывное течение в пограничном слое Прандтля может быть реализовано чередованием промежутка отсасывания жидкости внутрь стенки с промежутком вдувания этой массы жидкости в пограничный слой.

Теорема 3. *Пусть выполняются предположения* (а)–(в) *и*
(е) $u_0''(y) \equiv 0$ *при* $y \in [0, y_0] \cup [\frac{1}{y_0}, \infty)$, y_0 *— некоторая постоянная.*

Тогда существует функция $v_0(x)$, *удовлетворяющая условиям:* $v_0(x) < 0$ *при* $x \in [0, x^0]$, $v_0(x) > 0$ *при* $x \in [x^0, x^1]$, $v_0(x) \equiv 0$ *при* $x \geq x^1$, $\int_0^{x^1} v_0(t)\, dt = 0$, *и такая, что краевая задача* (1.1), (1.2) *разрешима в области* $D = \{0 < x < A,\ 0 < y < \infty\}$ *при любом* $A > x^1$, *при этом* $u(x,y), v(x,y)$ *обладают свойствами:* $u(x,y)$ *непрерывна и ограничена в* $\overline{D}$, $u(x,y) > 0$ *при* $y > 0$, $u_y \geq m > 0$ *при* $y \in [0, y_1]$, *где* m, y_1 *— некоторые постоянные;* u_y, u_{yy} *непрерывны и ограничены в* D; u_x, v, v_y *непрерывны и ограничены в любой ограниченной части* $\overline{D}$.

Доказательство. С помощью замены переменных

$$x = x, \quad \psi = \psi(x,y); \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v - v_0(x) = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \psi(x,0)) = 0$$

и введением новой неизвестной функции $w(x,\psi) \equiv u^2(x,y)$ преобразуем краевую задачу (1.1), (1.2) к виду

$$L(w) \equiv \nu\sqrt{w}w_{\psi\psi} - v_0(x)w_\psi - w_x = -2UU', \quad (x,\psi) \in R, \tag{5.1}$$

$$w|_{x=0} = w_0(\psi), \quad w|_{\psi=0} = 0, \quad \lim_{\psi\to\infty} w(x,\psi) = U^2(x), \tag{5.2}$$

где $R = \{0 < x < A,\ 0 < \psi < \infty\}$, $w_0\left(\int\limits_0^y u_0(t)\,dt\right) \equiv u_0^2(y)$.

Как уже отмечалось, гладкое положительное решение $w(x,\psi)$ задачи (5.1), (5.2) при предположениях (а)–(в) и произвольно заданной функции $v_0(x)$ существует в области R при $A \le A_0$, где A_0 — некоторая постоянная (теорема 2.1.14 из [1]). Чтобы такое решение продолжить на любой промежуток $0 < x < A$ $(A > A_0)$, функцию $v_0(x)$ зададим соотношениями

$$v_0(x) \equiv v_1(x) < 0 \quad \text{при } x \in \left(0, \frac{2}{3}M\right); \quad v_0(x) \equiv v_2(x) \ge 0 \quad \text{при } x \in \left[\frac{2}{3}M, \infty\right);$$

$$v_1(x) = -x(2M-3x), \quad v_2(x) = \frac{(1-e^{-2M(\beta M+1)(x-\frac{2}{3}M)})\rho(\frac{4x-3x^1}{x^1})}{[3\beta(x-\frac{M}{3})+1]}$$

при $x \in [\frac{2}{3}M, x^1]$, $v_2(x) \equiv 0$ при $x \in [x^1,\infty)$, где $\rho(\xi)$ — срезающая функция, $\rho(\xi) \equiv 1$ при $\xi \le 0, \rho(\xi) \equiv 0$ при $\xi \ge 1$, $\rho(\xi) = 30\int\limits_\xi^1 t^2(1-t)^2\,dt$ при $0 < \xi < 1$ $\left(\int\limits_0^1 t^2(1-t)^2\,dt = \frac{1}{30}\right)$, $x^1 = x^1(M,\beta)$ — значение, определяемое равенством $\int\limits_0^{x^1} v_0(t)\,dt \equiv 0$. Очевидно, $x^1 = x^1(M,\beta) > \frac{8}{9}M$, так как $v_0(x) < 0$ при $x \in (0,\frac{2}{3}M)$ и $v_0(x) > 0$ при $x > \frac{2}{3}M$.

По построению $v_0(x) \in C^1[0,\infty)$. Параметры M,β будут выбраны ниже.

Решение задачи (5.1), (5.2) получим предельным при $\varepsilon \to 0$ переходом, выделяя сходящуюся подпоследовательность в семействе положительных в области $R_\varepsilon = \{0 < x < A,\ 0 < \psi < \frac{1}{\varepsilon}\}$ $(A > M)$ решений $w_\varepsilon(x,\psi) \equiv w(x,\psi,\varepsilon)$ краевых задач для уравнения (5.1) с условиями

$$w|_{x=0} = w_0(\psi+\varepsilon), \quad w|_{\psi=0} = w_0(\varepsilon)e^{\mu(\varepsilon)x}, \quad w|_{\psi=\frac{1}{\varepsilon}} = w_0(\varepsilon+1/\varepsilon)e^{\mu(\varepsilon+1/\varepsilon)x}, \tag{5.3}$$

где $\mu(\psi) = \nu w_0''(\psi)]/\sqrt{w_0(\psi)}$, причем согласно предположению (е) теоремы 3
(ж) $\mu(\varepsilon) \equiv 0$ при $\varepsilon \in [0,\varepsilon_1] \cup [\frac{1}{\varepsilon_1},\infty)$, $\varepsilon \le \varepsilon_1 \ll 1$.

Лемма 1. *Если положительное решение $w_\varepsilon(x,\psi)$ задачи (5.1), (5.3) в области R_ε существует, то при $\varepsilon \le \varepsilon_1 \ll 1$ выполняется априорная оценка*

$$w_\varepsilon(x,\psi) \ge \sigma_\varepsilon(x,\psi) > \lim_{\varepsilon\to 0}\sigma_\varepsilon(x,\psi) = \sigma(x,\psi), \quad (x,\psi) \in R_\varepsilon, \tag{5.4}$$

где $\sigma(x,\psi) > 0$ при $\psi > 0$, $\sigma(x,0) = 0$.

Доказательство. Положим

$$\sigma_\varepsilon(x,\psi) \equiv \Phi(x)f(\psi+\varepsilon), \quad \Phi(x) = U^2(x) \quad \text{при } x \in [0, M/3],$$

$$\Phi(x) = U^2(M/3)[3\beta(x-M/3)+1]^{-2} \quad \text{при } x \in [M/3,\infty),$$

$$f(\psi) = (a_1\psi + a_2\psi^{\frac{4}{3}})[1-\rho_0(\psi-1)] + \rho_0(\psi-1)\frac{w_0(\psi)}{U^2(0)},$$

где $a_1 + a_2 < w_0(1)/U^2(0)$, $\rho_0(\xi)$ — срезающая функция: $\rho_0(\xi) \equiv 0$ при $\xi \le 0$, $\rho_0(\xi) \equiv 1$ при $\xi \ge 1$, $\rho_0(\xi) = 30\int\limits_0^{\xi} t^2(1-t)^2\,dt$ при $0 < \xi < 1$. По построению $f(\eta) \in C^2[0,\infty)$, $\Phi(x) \in C[0,\infty)$, $\Phi(x) \in C^1[0, \frac{M}{3}] \cup C^1[\frac{M}{3}, A)$.

Постоянные a_i, $i = 1,2$, ε_1 выберем настолько малыми, чтобы при $\varepsilon \le \varepsilon_1$ выполнялись неравенства

$$a_1(1+\varepsilon) + a_2(1+\varepsilon)^{4/3} \le w_0(1+\varepsilon)/U^2(0), \quad w_\varepsilon(x,\psi) \ge \sigma_\varepsilon(x,\psi) \quad \text{при } (x,\psi) \in S_\varepsilon, \tag{5.5}$$

что возможно в силу предположений (г), (б), (ж).

В областях

$$Q_1 = \{0 < x < M/3,\ 0 < \psi < 1/\varepsilon\}, \quad Q_2 = \{M/3 < x < A,\ 0 < \psi < 1/\varepsilon\}$$

разность $z = w_\varepsilon(x,\psi) - \sigma_\varepsilon(x,\psi)$ удовлетворяет линейному параболическому уравнению

$$L_0(z) \equiv \nu\sqrt{w_\varepsilon}z_{\psi\psi} - v_0(x)z_\psi - z_x + dz = -L(\sigma_\varepsilon) - 2UU',$$

где $L_0(w_\varepsilon - \sigma_\varepsilon) = L(w_\varepsilon) - L(\sigma_\varepsilon)$, $d = \nu\sigma''_{\varepsilon\psi\psi}(\sqrt{w_\varepsilon} + \sqrt{\sigma_\varepsilon})^{-1}$.

Выберем параметры M, β так, чтобы правая часть выражения

$$L(\sigma_\varepsilon) + 2UU' = \nu\Phi\sqrt{\Phi f}f'' - v_0(x)\Phi f' - \Phi'_x f + 2UU' \tag{5.6}$$

стала положительной на промежутках $0 \le x \le \frac{M}{3}$, $\frac{M}{3} \le \frac{2M}{3}$, $\frac{2M}{3} \le x \le x^1$, $x^1 \le x < \infty$.

При $0 \le x \le \frac{M}{3}$ имеем $v_0(x) = -x(2M-3x) \le -Mx$, $\Phi(x) \equiv U^2(x)$ и, следовательно,

$$L(\sigma_\varepsilon) + 2UU' > \nu U^3(x)\sqrt{f}f'' + U^2(x)Mxf' + 2UU'(1-f). \tag{5.7}$$

Так как $|2UU'| \le K_1 x$ (K_1 — некоторая константа), $f'(\psi) > 0$ при $\psi \ge 0$, $\sqrt{f}f'' \to \infty$ при $\psi \to 0$ и функции $[1-f(\psi)]$, $f'(\psi)$, $f''(\psi)$ стремятся к нулю, когда $\psi \to \infty$ с одинаковым порядком (см. условие (г)), то положительность правой части неравенства (5.7) обеспечивается за счет достаточно большой постоянной $M \ge 3x_1$ (см. (б)), нижняя грань M_0 которой, очевидно, зависит лишь от данных задачи (1.1), (1.2).

Оценивая снизу правую часть (5.6) на остальных промежутках, с учетом условий (б) на $2UU'$ придем к следующим неравенствам:

$$L(\sigma_\varepsilon) + 2UU' > \frac{U^2(\frac{M}{3})}{[3\beta(x-\frac{M}{3})]^3}\{\nu U(M/3)\sqrt{f}f'' + 6\beta f\} - \frac{\delta^2}{(kx+1)^\lambda} \tag{5.8}$$

при $x \in [\frac{M}{3}, \frac{2M}{3}] \cup [x^1, \infty)$,

$$L(\sigma_\varepsilon) + 2UU' > \frac{U^2(\frac{M}{3})}{[3\beta(x-\frac{M}{3})]^3}\{\nu U(M/3)\sqrt{f}f'' - f' + 6\beta f\} - \frac{\delta^2}{(kx+1)^\lambda} \tag{5.9}$$

при $x \in [\frac{2M}{3}, x^1]$.

Так как $\sqrt{f}f'' \to \infty$ при $(\psi+\varepsilon) \to 0$, то существуют такие числа $\psi_0 \ll 1$, $\varepsilon_0 \le \psi_0$, что при $\psi + \varepsilon \le \psi_0 + \varepsilon_0$ суммы в фигурных скобках правых частей (5.8), (5.9) станут больше единицы, а при $\psi + \varepsilon > \psi_0 + \varepsilon_0$, поскольку

$f(\psi+\varepsilon) \geq f(\psi_0+\varepsilon_0) \geq a_1(\psi_0+\varepsilon_0) > 0$, эти суммы будут больше единицы при достаточно большой постоянной β, нижняя грань β_0 которой зависит лишь от данных задачи (2.1), (2.2) и не зависит от M, ε. Очевидно, если $k-\beta>0$, то правые части неравенств (5.8), (5.9) будут больше нуля. Если $k-\beta<0$, то для положительности правых частей этих неравенств постоянную M следует подчинить дополнительному неравенству $M \geq M_1 = \frac{1}{k}[(\frac{\beta}{k})^{\frac{3}{\lambda-3}}-1] > \frac{1}{k}[(\frac{\beta M+1}{kM+1})^{\frac{3}{\lambda-3}}-1]$. При этом в любом случае постоянные M_1, β_0 зависят лишь от данных задачи (1.1), (1.2) и не зависят от ε.

Таким образом, при $M \geq \max(M_0, M_1)$, $\beta \geq \beta_0$

$$L_0[w_\varepsilon(x,\psi) - \sigma_\varepsilon(x,\psi)] > 0, \quad (x,\psi) \in Q_1 \cup Q_2. \tag{5.10}$$

Из неравенств (5.5), (5.10) согласно принципу максимума, применяемому последовательно в областях Q_1 и Q_2, вытекает, что $z = w_\varepsilon(x,\psi) - \sigma_\varepsilon(x,\psi)$ неотрицательна в замыкании областей Q_1, Q_2, т. е.

$$w_\varepsilon(x,\psi) \geq \sigma_\varepsilon \geq \mathrm{const} > 0, \quad (x,\psi) \in \overline{R}_\varepsilon. \tag{5.11}$$

Лемма 2. *Гладкое положительное решение задачи* (5.1), (5.3) *существует в области R_ε при $0<\varepsilon\leq\varepsilon_1\ll 1$. Все производные этого решения, входящие в уравнение* (5.1), *удовлетворяют условию Гёльдера в замкнутой области $\overline{R}_\varepsilon$. В точках R_ε уравнение, которому удовлетворяет $w_\varepsilon(x,\psi)$, можно дифференцировать дважды по ψ и один раз по x.*

Приведем краткую схему доказательства, взятую из [1, лемма 2.1.7]).

Если решение задачи (5.1), (5.3) в области R_ε существует, то выполняется оценка $w_\varepsilon(x,\psi) \geq \sigma_\varepsilon(x,\psi) > 0$. В уравнении (5.1) коэффициент при $w_{\psi\psi}$ изменим для значений $w_\varepsilon < \sigma_\varepsilon$ так, чтобы он стал гладкой ограниченной и положительной функцией при каждом $\varepsilon>0$. Полученное уравнение является квазилинейным равномерно параболическим уравнением. Из известных в теории краевых задач результатов для таких уравнений следует существование решения задачи (5.1), (5.3) с указанными в лемме 2 свойствами.

Докажем, что

$$\left.\frac{\partial w_\varepsilon(x,\psi)}{\partial\psi}\right|_{\psi=0} \geq m_0 > 0, \quad x \in [0,A), \tag{5.12}$$

где константа m_0 не зависит от ε. Сначала убедимся, что при $0<\varepsilon\leq l^2$, $\psi\leq l$, $l^2+l\leq l_0$, где l_0 достаточно мало, функция $Q(x,\psi,\varepsilon) = w_0(\varepsilon)e^{\mu(\varepsilon)x} + l^{\frac{1}{12}}(\psi+\psi^{\frac{5}{4}})$ в области $\Pi_l \equiv \{0<x<A,\ 0<\psi<l\}$ является барьером снизу для $w_\varepsilon(x,\psi)$. В самом деле, при достаточно малых l ($l\to 0$)

$$Q(x,l,\varepsilon) = O(l^{\frac{13}{12}}), \quad \sigma_\varepsilon(x,l) = O(l), \quad l^{\frac{1}{8}}L(Q) = O(1).$$

Следовательно, при $l \ll 1$ имеем

$$L(Q) \geq -2UU', \quad (x,\psi)\in\Pi_l; \quad Q(x,l,\varepsilon) \leq \sigma_\varepsilon(x,l) \leq w_\varepsilon(x,l), \quad x\in[0,A),$$
$$Q(x,0,\varepsilon) = w_\varepsilon(x,0), \quad Q(0,\psi,\varepsilon) \leq w_0(\varepsilon+\psi), \quad \psi\in[0,l];$$
$$L(w_\varepsilon) - L(Q) \equiv L_0(w_\varepsilon - Q) \leq 0, \quad (x,\psi)\in\Pi_l.$$

В силу принципа максимума отсюда вытекает неотрицательность $w_\varepsilon(x,\psi) - Q(x,\psi,\varepsilon)$ всюду в области Π_l, и поскольку $w_\varepsilon(x,0) = Q(x,0,\varepsilon)$ при $x\in[0,A)$, то получаем также оценку

$$w'_{\varepsilon\psi}|_{\psi=0} \geq Q'_\psi|_{\psi=0} = l^{\frac{1}{12}} > 0, \quad x\in[0,A),$$

подтверждающую справедливость (5.12).

Теперь с учетом (5.11), (5.12) из оценок, доказанных в леммах 2.1.8–2.1.13 из [1], непосредственно вытекают следующие неравенства:

$$0 < w < M_1, \quad \left|\frac{\partial w}{\partial \psi}\right| \le M_1, \quad \left|\sqrt{w}\frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2}\right| \le M_1, \quad (x,\psi) \in R_\varepsilon; \tag{5.13}$$

$$\left|\frac{\partial w}{\partial x}\right| \le M_1 \psi^{1-\beta}, \quad \frac{\partial w}{\partial \psi} \ge m_1 > 0, \quad 0 \le \psi \le \psi_1,\ 0 < \beta < 1/2. \tag{5.14}$$

Здесь $w = w(x,\psi,\varepsilon) \equiv w_\varepsilon(x,\psi)$. Постоянные M_1, m_1, ψ_1 зависят от $w_0(\psi)$, $U(x)$, $v_0(x)$ и не зависят от ε. На основании оценок (5.13), (5.14) из семейства $\{w_\varepsilon(x,\psi)\}$ можно выбрать подпоследовательность $w_{\varepsilon_k}(x,\psi)$, сходящуюся при $\varepsilon_k \to 0$ в R равномерно относительно $\psi \le N$ и такую, что ее производные $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial \psi}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2}$ сходятся равномерно при $N^{-1} \le \psi \le N$, где N — любое число. Ясно, что предельная функция $w(x,\psi)$ обладает свойствами, отмеченными в лемме 2.1.5 из [1]: она положительна и ограничена в R, непрерывна в $\overline{R}$, удовлетворяет условиям (5.2), уравнению (5.1) при $(x,\psi) \in R$ и для нее справедливы оценки вида (5.13), (5.14).

Полагая

$$u = \sqrt{w}, \quad y = \int\limits_0^\psi [w(x,t)]^{-\frac{1}{2}}\,dt, \quad v_0(x) - v = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2}\sqrt{w}\int\limits_0^\psi w^{-\frac{3}{2}}(x,t)\frac{\partial w}{\partial x}\,dt,$$

получим, что в области D в силу (5.13), (5.14) существуют производные

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{2}\sqrt{w}\frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{w}}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)$$

и, следовательно, функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ удовлетворяют в области D системе уравнений (1.1), а на границе области D — условиям (1.2) и имеют гладкость, указанную в теореме 3. Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Олейник О. А., Самохин В. Н.* Математические методы в теории пограничного слоя. М.: Наука, 1997.
2. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
3. *Бетчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
4. *Хуснутдинова Н. В.* Об отрыве пограничного слоя при возрастающем давлении // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 5. С. 1195–1210.
5. *Чжен П.* Отрывные течения. М.: Мир, 1973. Т. 2.
6. *Хуснутдинова Н. В.* Математические вопросы управления пограничным слоем с помощью отсоса // Сиб. мат. журн. 1972. Т. 13, № 2. С. 485–489.
7. *Суслов А. И.* Об отрыве пограничного слоя при вдуве // Прикл. математика и механика. 1974. Т. 38, № 1. С. 166–169.
8. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

Статья поступила 24 августа 2000 г.

Хуснутдинова Нила Валеевна
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск 630090