Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2001. Том 42, № 6

УДК 517.946

ОБ ОСНОВНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОДНОГО УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

С. А. Терсенов

Аннотация: Рассматривается уравнение ультрапараболического типа

$$\sum_{k=1}^{m} b_k(t) u_{t_k} = \Lambda u + f.$$

Для решений задачи Коши и первой краевой задачи выводятся априорные оценки в специальных пространствах Гёльдера и при помощи метода продолжения по параметру доказывается существование решений этих задач. Библиогр. 7.

Введение

Пусть $b_k(t)$, $k = 1, \dots, m$, $t = (t_1, \dots, t_m)$, — ограниченные непрерывно дифференцируемые функции в $\mathbb{R}^m$. Пусть существуют постоянные $c_i > 0$, $i = 1, 2$, такие, что

$$c_1 < b_k(t) < c_2 \quad \forall t \in \mathbb{R}^m, \quad k = 1, \dots, m. \tag{1}$$

Рассмотрим в $\mathbb{R}^m$ уравнение

$$\sum_{k=1}^{m} b_k(t) \Lambda_{t_k} = 1 \tag{2}$$

и соответствующую характеристическую систему

$$\frac{d\tau_1}{b_1(\tau)} = \dots = \frac{d\tau_m}{b_m(\tau)}. \tag{3}$$

Предположим, что для любого $t \in \mathbb{R}^m$ существует характеристика, проходящая через t.

Пусть $\Pi = \{t : F(t) = 0\}$ — гладкая нехарактеристическая поверхность,

$$\sum_{k=1}^{m} b_k(t) F_{t_k} \neq 0, \quad \sum_{k=1}^{m} F_{t_k}^2 \neq 0.$$

Поверхность Π будем предполагать односвязной. Рассмотрим все характеристики, проходящие через Π. Они образуют в $\mathbb{R}^m$ некоторую область B, неограниченную в обе стороны от Π в силу (1).

Пусть $\Lambda(t)$ — решение уравнения (2) в B, удовлетворяющее условию

$$\Lambda|_{\Pi} = 0. \tag{4}$$

В силу монотонности вдоль характеристик функция $\Lambda(t)$ сохраняет знак по обе стороны от Π. Обозначим через G ту часть B, где $\Lambda(t) > 0$, через G^- — где $\Lambda(t) < 0$, через G_T — часть G, на которой $0 < \Lambda(t) < T$, и через B_T — часть B, где $\Lambda(t) < T$.

Пусть Ω — ограниченная в $\mathbb{R}^n$ область с границей S. Введем обозначения: $Q = \Omega \times G$, $Q_T = \Omega \times G_T$, $Q_0 = \Omega \times \Pi$, $D = \mathbb{R}^n \times G$, $D_T = \mathbb{R}^n \times G_T$, $D_0 = \mathbb{R}^n \times \Pi$, $S_T = S \times G_T$, $S_0 = S \times \Pi$, $E_T = \mathbb{R}^n \times B_T$, $E_T^{n-1} = \mathbb{R}^{n-1} \times B_T$.

В области D_T рассмотрим ультрапараболическое уравнение

$$\sum_{k=1}^{m} b_k(t) u_{t_k} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t) u_{x_i} + a(x,t) u = f(x,t), \qquad (5)$$

$$\nu_1 |\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x,t) \xi_i \xi_j \le \nu_2 |\xi|^2, \quad \nu_i > 0,$$

и для него две краевые задачи.

Первая краевая задача. Найти решение u уравнения (5) в Q_T, непрерывное в $\overline{Q}_T$ и удовлетворяющее

1) начальному условию $u(x,t)|_{Q_0} = \varphi$,

2) краевому условию $u(x,t)|_{S_T} = \psi$.

Задача Коши. Найти решение u уравнения (5) в D_T, ограниченное в $\overline{D}_T$ и удовлетворяющее начальному условию

$$u\,|_{D_0} = \varphi(x,t).$$

Замечание. Если $m = 1$, $b_1 \equiv 1$ и коэффициенты уравнения (5) удовлетворяют условию Гёльдера, то решения этих задач имеют непрерывные производные по t, удовлетворяющие условию Гёльдера. Следующий пример показывает, что если $m \ge 2$ и коэффициенты недифференцируемы по t_k, то не существует непрерывно дифференцируемых по t_k решений.

Пример. Рассмотрим следующую задачу Коши. Пусть $\Pi = \{t_1, t_2 : t_1 + t_2 = 0\}$ и

$$u_{t_1} + u_{t_2} - 2a^2(t_1 - t_2) u_{xx} = 0 \text{ в } \mathbb{R} \times \{t_1 + t_2 > 0\}, \quad u|_{\mathbb{R}\times\Pi} = w(t_1 - t_2)\cos x,$$

где функции w, a лишь непрерывны по Гёльдеру. Покажем, что задача не имеет дифференцируемых по t_1, t_2 решений. Допустим, что это не так. После замены $\tau_1 = t_1 + t_2$, $\tau_2 = t_1 - t_2$ задача примет вид

$$u_{\tau_1} - a^2(\tau_2) u_{xx} = 0 \text{ в } \mathbb{R} \times \{\tau_1 > 0\}, \quad u|_{\tau_1 = 0} = w(\tau_2)\cos x.$$

При любом τ_2 единственным непрерывным решением этой задачи будет функция $u = e^{-a^2(\tau_2)\tau_1} w(\tau_2)\cos x$, или $u = e^{-(t_1+t_2)a^2(t_1-t_2)} w(t_1 - t_2)\cos x$, недифференцируемая по t_1, t_2.

Имея в виду цель настоящей работы, отметим статьи [1–5], где для некоторых уравнений такого типа даются постановки и исследуется разрешимость в различных классах функций задачи Коши и первой краевой задачи.

В предлагаемой статье вводятся пространства функций, аналогичные пространствам $H^{(l)}$ из [6], в которых изучаются указанные задачи.

В § 4–6 доказываются априорные оценки для решений. В § 7 по схеме, предложенной в [6], будет доказано существование решений этих задач в случае уравнения

$$\sum_{k=1}^{m} b_k(t) u_{t_k} - \Delta u = f(x,t),$$

что позволяет методом параметрикса доказать существование решений этих задач в общем случае уравнения (5).

§ 1. Вспомогательные утверждения

Рассмотрим систему (3), записав ее в виде

$$\frac{d\tau}{dz} = b(\tau), \quad b = (b_1, \dots, b_m), \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_m). \tag{1.1}$$

Пусть вектор-функция $\tau(z,t) = \tau(z; \Lambda(t), t)$ — решение системы (1.1), удовлетворяющее условию

$$\tau(z,t)|_{z=\Lambda(t)} = t, \quad t \in B. \tag{1.2}$$

Будем считать, что для любой точки $t \in B$ функция $\tau(z,t)$ продолжима по z на все $\mathbb{R}$. Вектор-функция $\tau(z,t)$ для любого z непрерывно дифференцируема по t, и (см. [7])

$$\sum_{k=1}^{m} b_k(t) \frac{\partial \tau_s(z;t)}{\partial t_k} = 0, \quad s = 1, \dots, m, \tag{1.3}$$

где $\partial/\partial t_k$ — полная производная по t_k функции $\tau_s(z,t) \equiv \tau_s(z; \Lambda(t), t)$.

При $m = 1$, $b_1 = 1$, $t = 0$ имеем $\Lambda(t) = t$, $\tau(z,t) = z$. При фиксированном z множество точек $t \in B$ таких, что $\Lambda(t) = z$, обозначим через Π_z ($\Pi_0 = \Pi$).

Нетрудно доказать следующее утверждение.

Лемма 1.1. 1. *Для любого $t \in B$ точка $\tau(z,t)$ принадлежит Π_z.*

2. *Существует постоянная $M > 0$, не зависящая от характеристик, такая, что для любых t, t' из одной и той же характеристики выполнены неравенства*

$$|\Lambda(t) - \Lambda(t')| \le M|t - t'|, \quad |\tau(z,t) - t| \le M|\Lambda(t) - z|, \quad |\tau(z,t) - \tau(t)| \le M|z|, \tag{1.4}$$

где $\tau(t) = \tau(0,t) \in \Pi$.

При любом z точка $\tau(z,t) \in \Pi_z$ является проекцией точки $t \in B$ на Π_z вдоль характеристики, проходящей через t, и если t и t' лежат на одной характеристике, то $\tau(z,t) = \tau(z,t')$. В силу леммы 1.1 при любом $t \in B$ если $z > 0$, то $\tau(z,t) \in G$, и если $z < 0$, то $\tau(z,t) \in G^-$.

Пусть $f(t)$ — функция, определенная в B. Обозначим через $\partial_t f(t)$ производную по направлению, касательному к характеристике в точке t, умноженную на $\sqrt{\sum b_k^2}$. Если $f(t)$ — дифференцируемая по t_k функция, то

$$\partial_t f(t) = \sum_{k=1}^{m} b_k(t) \frac{\partial f}{\partial t_k}.$$

В терминах касательной производной условие (1.3) примет вид

$$\partial_t \tau(z,t) = 0. \tag{1.5}$$

Легко видеть, что если $f(t)$ — дифференцируемая по t_k функция, то

$$\frac{\partial^s}{\partial z^s} f(\tau(z,t)) = \partial_\tau^s f(\tau(z,t)). \tag{1.6}$$

§ 2. Потенциалы

1. Рассмотрим при $\Lambda(t) - z > 0$ функцию

$$\Gamma(x-\xi, \Lambda(t)-z) = (4\pi(\Lambda(t)-z))^{-(n/2)} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(\Lambda(t)-z)}\right),$$

$x = (x_1, \dots, x_n)$, $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\xi' = (\xi_1', \dots, \xi_{n-1}')$. Так как $\partial_t \Lambda = 1$, то Γ как функция от (x,t) есть решение уравнения

$$\partial_t u - \Delta u = 0, \tag{2.1}$$

где Δ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$. Как и в случае $m = 1$, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_t^r D_x^s \Gamma(x-\xi, \Lambda(t)-z)\, d\xi = \begin{cases} 1, & r+s=0, \\ 0, & r+s \geq 1, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$|\partial_t^r D_x^s \Gamma(x-\xi, \Lambda(t)-z)| \leq c_{rs}(\Lambda(t)-z)^{-n/2-r-s/2} \exp\left(-c\frac{|x-\xi|^2}{\Lambda(t)-z}\right) \tag{2.3}$$

(постоянные c_{rs}, c см. в [6, гл. 4, § 2]).

1. Пусть $\varphi(x,t)$ — ограниченная непрерывная на D_0 функция. Рассмотрим $\varphi(x, \tau(t))$ как продолжение функции $\varphi(x,t)$ на D. Функция $\varphi(x,\tau(t))$ постоянна относительно t вдоль каждой фиксированной характеристики и

$$\partial_t^s \varphi(x, \tau(t)) = 0, \quad s = 1, 2, \dots.$$

В силу этого потенциал

$$g(x,t;\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-\xi, \Lambda(t)) \varphi(\xi, \tau(t))\, d\xi \tag{2.4}$$

является решением уравнения (2.1) в D, удовлетворяющим условию

$$u|_{D_0} = \varphi(x,t).$$

В силу (2.2)

$$|g(x,t;\varphi)| \leq \max_{D_0} |\varphi(x,t)|. \tag{2.5}$$

2. Пусть $f(x,t)$ — непрерывная по t и удовлетворяющая условию Гёльдера по x функция на $\mathbb{R}^n \times B$. Рассмотрим потенциал

$$g_1(x,t;f) = \int\limits_{-\infty}^{\Lambda(t)} dz \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-\xi, \Lambda(t)-z) f(\xi, \tau(z,t))\, d\xi.$$

Для сходимости интеграла в последнем равенстве достаточно, чтобы $f(x,\tau(z,t)) = O(|z|^{-k})$, $k > 2$, при $z \to -\infty$, а так как $\Lambda(\tau(z,t)) = z$, то достаточно, чтобы $f(x,t) = O(|\Lambda(t)|^{-k})$. В силу (1.5)

$$\partial_t f(x, \tau(z,t)) = 0. \tag{2.6}$$

При условии (2.6) имеем

$$\partial_t g_1 = f(x,t) + \int\limits_{-\infty}^{\Lambda(t)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \Gamma(x-\xi, \Lambda(t)-z)}{\partial \Lambda} [f(\xi, \tau(z,t)) - f(x, \tau(z,t))]\, d\xi dz,$$

$$D_x^2 g_1 = \int\limits_{-\infty}^{\Lambda(t)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} D_x^2 \Gamma(x-\xi, \Lambda(t)-z)[f(\xi, \tau(z,t)) - f(x, \tau(z,t))]\, d\xi dz,$$

т. е. функция g_1 является решением уравнения

$$\partial_t u - \Delta u = f \tag{2.7}$$

в $\mathbb{R}^n \times B$.

3. Обозначим через $\mathbb{R}^n_+$ полупространство в $\mathbb{R}^n$, на котором $x_n > 0$. Пусть $\psi(x', t)$ — непрерывная в $\mathbb{R}^{n-1} \times B$ функция и $\psi(x', t) = O(|\Lambda(t)|^{-k})$, $k > 2$. Рассмотрим потенциал

$$g_2(x, t; \psi) = -2 \int\limits_{-\infty}^{\Lambda(t)} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial \Gamma(x'-\xi', x_n, \Lambda(t)-z)}{\partial x_n} \psi(\xi', \tau(z,t))\, d\xi' dz, \tag{2.8}$$

где $\Gamma(x'-\xi', x_n, \Lambda(t)-z) = \Gamma(x-\xi, \Lambda(t)-z)|_{\xi_n=0}$.

Функция g_2 является решением уравнения (2.1) ($\partial_t \psi(x, \tau(z,t)) = 0$) и удовлетворяет краевому условию

$$g_2|_{x_n=0} = \psi(x', t), \quad |g_2(x, t; \psi)| \le \max_{\mathbb{R}^{n-1} \times B} |\psi(x', t)|. \tag{2.9}$$

§ 3. Пространства Гёльдера. Оценки потенциалов

1. Пространства Гёльдера. Вводимые ниже пространства аналогичны пространствам $H^{l,l/2}$ (см. [6, гл. 1, § 1). Обозначим через Q_T одну из областей Q_T, D_T, S_T, E_T, E_T^{n-1}. Пусть l — произвольное не целое число. Через $[l]$ обозначим целую часть l.

Обозначим через $\mathscr{H}^{l,l/2}(\overline{Q}_T)$ банахово пространство непрерывных в $\overline{Q}_T$ функций $u(x,t)$ с непрерывными производными $\partial_t^r D_x^s u$ при $2r + s \le [l]$, снабженное нормой

$$|u|^{(l)}_{Q_T} = \langle u \rangle^{(l)}_{Q_T} + \sum_{i=0}^{[l]} \langle u \rangle^{(i)}_{Q_T}, \tag{3.1}$$

где

$$\langle u \rangle^{(0)}_{Q_T} = \max_{Q_T} |u|, \quad \langle u \rangle^{(i)}_{Q_T} = \sum_{2r+s=i} \max \bigl|\partial_t^r D_x^s u\bigr|^{(0)}_{Q_T},$$

$$\langle u \rangle^{(l)}_{Q_T} = \langle u \rangle^{(l)}_{x,Q_T} + \langle u \rangle^{(l/2)}_{t,Q_T}, \quad \langle u \rangle^{(l)}_{x,Q_T} = \sum_{2r+s=[l]} \bigl\langle \partial_t^r D_x^s u \bigr\rangle^{(l-[l])}_{x,Q_T},$$

$$\langle u \rangle^{(l/2)}_{t,Q_T} = \sum_{0<l-2r-s<2} \bigl\langle \partial_t^r D_x^s u \bigr\rangle^{(l-2r-s)/2}_{t,Q_T}.$$

Здесь $\langle u \rangle^{(\alpha)}_x$ — коэффициент Гёльдера функции u по x, определяемый, как обычно, и $\langle u \rangle^{(\alpha)}_t$ — коэффициент Гёльдера функции u по t, определяемый следующим образом. Пусть X — произвольная характеристика в G или B. Тогда

$$\langle u \rangle^{(\alpha)}_{t,Q_T} = \sup_X \sup_{t,t' \in X, x \in \Omega} \frac{|u(x,t) - u(x,t')|}{|t-t'|^\alpha},$$

т. е. находим коэффициент Гёльдера u по t, когда t, t' находятся на данной характеристике X, а затем берем максимум по X.

Через $\mathscr{H}^l(\overline{Q}_0)$ обозначим банахово пространство непрерывных в $\overline{Q}_0$ функций $\varphi(x,t)$ с непрерывными производными $D_x^s\varphi$, $s \le [l]$, снабженное нормой

$$|\varphi|_{Q_0}^{(l)} = \sum_{i=0}^{[l]} \langle\varphi\rangle_{Q_0}^{(i)} + \langle\varphi\rangle_{x,Q_0}^{(l)}, \tag{3.2}$$

где

$$\langle\varphi\rangle_{Q_0}^{(0)} = \max_{Q_0}|\varphi|, \quad \langle\varphi\rangle_{Q_0}^{(i)} = \sum_i \big|D_x^i\varphi\big|_{Q_0}^{(0)}, \quad \langle\varphi\rangle_{x,Q_0}^{(l)} = \sum_{[l]} \big\langle D_x^{[l]}\varphi\big\rangle_{x,Q_0}^{(l-[l])}.$$

2. Единственность решений. Обозначим через $C^{(2,1)}(Q_T)$ множество функций u, имеющих непрерывные производные $\partial_t^r D_x^s u$, $2r+s \le 2$. Пусть $u \in C^{(2,1)}(Q_T)$. Если в точке $(x,t) \in Q_T$ функция u достигает отрицательного минимума (положительного максимума), то $\partial_t u \le 0$ ($\partial_t u \ge 0$). Используя этот факт, обычным путем можно доказать, что если $u \in C^{(2,1)}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ — решение уравнения (5), где $f \equiv 0$ и $u|_{\Gamma_T} = 0$, то $u \equiv 0$ в $\overline{Q}_T$, где $\Gamma_T = Q_0 \cup S_T$. Аналогично доказывается единственность решения $u \in C^{(2,1)}(D_T)$ задачи Коши.

3. Оценки потенциалов. Рассмотрим потенциалы $g(x,t)$, $g_1(x,t)$, $g_2(x,t)$, введенные в § 2. Имеют место неравенства

$$\langle g;\varphi\rangle_{D_T}^{(l)} \le c\langle\varphi\rangle_{x,D_0}^{(l)}, \tag{3.3}$$

$$\langle g_1; f\rangle_{E_T}^{(l)} \le c\langle f\rangle_{E_T}^{(l-2)}, \tag{3.4}$$

$$\langle g_2;\psi\rangle_{E_T}^{(l)} \le c\langle\psi\rangle_{E_T^{n-1}}^{(l)}, \tag{3.5}$$

где $c > 0$ не зависит от T и g, g_1, g_2. Доказательство этих неравенств с некоторыми изменениями аналогичны доказательству их в случае $m = 1$ (см. [6, гл. 4, § 2]).

Сделаем замечание по поводу получения оценок коэффициентов Гёльдера по t. Функции $\varphi(x,\tau(t))$, $f(x,\tau(z,t))$, $\psi(x',\tau(z,t))$ постоянны относительно t, когда t находится на одной и той же характеристике. Тогда модуль разности потенциалов в точках t, t' оценивается через коэффициент Гёльдера плотности потенциала, умноженный на соответствующую степень $|\Lambda(t) - \Lambda(t')|$ и в силу (1.4) на степень $|t - t'|$.

Мы не будем приводить здесь доказательства неравенств (3.3)–(3.5), тем более что они довольно длинные.

4. Продолжение функций. В дальнейшем область Ω совпадает с $\mathbb{R}^n$ или является ограниченной областью в $\mathbb{R}^n$ с границей $S = \partial\Omega$. Если $S \in H^l$ (см. [6, гл. 1, § 1]), то функция из $\mathscr{H}^l(\overline{Q}_0)$ может быть продолжена по x на D_0 с сохранением нормы. То же самое можно сделать с функцией из $\mathscr{H}^{l,l/2}(\overline{Q})$, продолжая ее в D. Рассмотрим функцию $f(x,t) = F(x,\Lambda(t),\tau(t)) \in \mathscr{H}^{l,l/2}(\overline{D})$. Так как $\partial_t\tau(t) = 0$, то

$$\partial_t f = \frac{\partial F(x,\Lambda(t),\tau(t))}{\partial\Lambda}.$$

В потенциалах g_1, g_2 мы пользуемся функцией $f(x,\tau(z,t))$. Поскольку $\Lambda(\tau(z,t)) = z$, $\tau(\tau(z,t)) = \tau(t)$, имеем $f(x,\tau(z,t)) = F(x,z,\tau(t))$, где $z > 0$. Продолжение функции F на значения $z < 0$ с сохранением гладкости и нормы строится известным способом (см. [6, гл. 4, § 4]). Используя такое продолжение, можно построить решение задачи Коши

$$\partial_t u - \Delta u = F(x, \Lambda(t), \tau(t)) \text{ в } D, \quad u|_{D_0} = \varphi(x,t), \tag{3.6}$$

которое дается формулой

$$u = g(x,t;\varphi - f^*) + g_1(x,t;F), \tag{3.7}$$

где

$$f^*(x,\tau(t)) = \int\limits_{-\infty}^{0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-\xi,-z) F(\xi,z,\tau(t))\, d\xi dz. \tag{3.8}$$

Для сходимости несобственных интегралов на $(-\infty, t)$ можно вместо $F(x,z,\tau(t))$ взять функцию $F(x,z,\tau(t))\zeta(z)$, где $\zeta(z) \in C^\infty$, $\zeta(z) = 0$ для $z < -2T$ и $\zeta(z) = 1$ для $z > -T$ с $T > 0$ достаточно большим. В силу оценок (3.3), (3.4) для функции (3.7) имеем

$$\langle u\rangle_D^{(l+2)} \le c\big(\langle F\rangle_D^{(l)} + \langle\varphi\rangle_{D_0}^{(l+2)}\big). \tag{3.9}$$

В § 4–6 рассмотрим первую краевую задачу и задачу Коши в пространствах Гёльдера $\mathscr{H}^{l,l/2}$ и получим априорные оценки решений этих задач.

§ 4. Априорные оценки

Первая краевая задача. Пусть $\partial\Omega = S \in H^{l+2}$ (см. [6, гл. 4, § 4]), коэффициенты a_{ij}, a_i, a, f уравнения (5) принадлежат $\mathscr{H}^{l,l/2}(\overline{Q}_T)$. Рассмотрим задачу

$$Lu = f \text{ в } Q_T, \quad u|_{Q_0} = \varphi, \quad u|_{S_T} = \psi, \tag{4.1}$$

где $\varphi \in \mathscr{H}^{l+2}(\overline{Q}_0)$, $\psi \in \mathscr{H}^{l+2,l/2+1}(\overline{S}_T)$. Пусть существует решение u из пространства $\mathscr{H}^{l+2,l/2+1}(\overline{Q}_T)$. Тогда на S_0 должны выполняться некоторые условия согласования для функций f, φ, ψ. Рассмотрим функции

$$u_k(x,t) = \partial_t^k u\big|_{Q_0}, \quad k = 0,1,\dots,[l/2]+1.$$

Имеем $u_0(x,t) = \varphi(x,t)$ и из уравнения (5)

$$u_{k+1}(x,t) = \partial_t^k \Bigg[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} - au\Bigg]\Bigg|_{Q_0} + \partial_t^k f\big|_{Q_0}.$$

Условия согласования имеют вид

$$u_k|_{S_0} = \partial_t^k \psi\big|_{S_0}, \quad k = 0,1,\dots,[l/2]+1. \tag{4.2}$$

Задача Коши. Пусть коэффициенты $a_{i,j}$, a_i, a, f уравнения (5) принадлежат $\mathscr{H}^{l,l/2}(\overline{D}_T)$. Рассмотрим задачу

$$Lu = f \text{ в } D_T, \quad u|_{D_0} = \varphi(x,t), \tag{4.3}$$

где $\varphi \in \mathscr{H}^{l+2}(\overline{D}_0)$.

В § 4–6 мы докажем следующие теоремы.

Теорема 4.1. *Если $u(x,t) \in \mathscr{H}^{l+2,l/2+1}(\overline{Q}_T)$ — решение задачи (4.1) и выполняются условия (4.2), то*

$$|u|_{Q_T}^{(l+2)} \le c_1\big(|f|_{Q_T}^{(l)} + |\varphi|_{Q_0}^{(l+2)} + |\psi|_{S_T}^{(l+2)}\big). \tag{4.4}$$

Теорема 4.2. *Если $u(x,t) \in \mathscr{H}^{l+2,l/2+1}(\overline{D}_T)$ — решение задачи* (4.3), *то*

$$|u|_{D_T}^{(l+2)} \le c_2\bigl(|f|_{D_T}^{(l)} + |\varphi|_{D_0}^{(l+2)}\bigr), \tag{4.5}$$

где постоянные $c_i > 0$, $i = 1,2$, зависят только от коэффициентов уравнения (5), *а также от l и n.*

Рассмотрим множество $\mathscr{H}_0^{l,l/2}(\overline{Q}_T)$, состоящее из функций в $\mathscr{H}^{l,l/2}(\overline{Q}_T)$ удовлетворяющих нулевым начальным условиям:

$$\partial_t^s u\big|_{Q_0} = 0, \quad s = 0,1,\dots,[l/2].$$

Предположим, что $u \in \mathscr{H}^{l+2,l/2+1}(\overline{Q}_T)$ (или $u \in \mathscr{H}^{l+2,l/2+1}(\overline{D}_T)$ — решение задачи (4.1) (или (4.3)). Рассмотрим функции

$$u_k(x,t) = \partial_t^k u\big|_{Q_0}, \quad k = 0,1,\dots,[l/2]+1.$$

Как и выше, $u_0(x,t) = \varphi(x,t)$,

$$u_{k+1}(x,t) = \partial_t^k\left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_ix_j} - \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} - au\right]\Bigg|_{Q_0} + \partial_t^k f\big|_{Q_0}, \quad k = 0,1,\dots,[l/2].$$

В случае задачи (4.3) функции u_k будут определены на D_0, а в случае задачи (4.3) — на Q_0. В последнем случае продолжим функции u_k по x на $\mathbb{R}^n$ с сохранением нормы и обозначим продолженные функции через $\varphi_k \in \mathscr{H}^{l+2-2k}(\overline{D}_0)$.

Лемма 4.1. *Существует функция $w \in \mathscr{H}^{l+2,l/2+1}(\overline{D})$ такая, что*

$$\partial_t^k w|_{D_0} = \varphi_k, \quad k = 0,1,\dots,[l/2]+1, \tag{4.6}$$

$$\langle w\rangle_D^{(l+2)} \le c_1 \sum_{k=0}^{[l/2]+1} \langle\varphi_k\rangle_{x,D_0}^{(l+2-2k)} \tag{4.7}$$

и при любом T

$$|w|_{D_T}^{(l+2)} \le c_2 \sum_{k=0}^{[l/2]+1} |\varphi_k|_{D_0}^{(l+2-2k)}. \tag{4.8}$$

Доказательство. Введем функции

$$\sum_{s=0}^k c_k^s(-1)^s\Delta^s\varphi_{k-s} = \psi_k \in H^{l+2-2k}(\overline{D}_0), \quad k = 0,1,\dots,[l/2]+1. \tag{4.9}$$

Тогда условия (4.6) будут эквивалентны условиям

$$(\partial_t - \Delta)^k w|_{D_0} = \psi_k, \quad k = 0,1,\dots,[l/2]+1.$$

Обозначим $N = [l/2]+1$. Пусть w_N — решение задачи

$$\partial_t w_N - \Delta w_N = 0 \text{ в } D, \quad w_N|_{D_0} = \psi_N,$$

w_{N-1} — решение задачи

$$\partial_t w_{N-1} - \Delta w_{N-1} = w_N \text{ в } D, \quad w_{N-1}\,|_{D_0} = \psi_{N-1},$$

и т. д. Пусть w — решение задачи

$$\partial_t w - \Delta w = w_1 \text{ в } D, \quad w\,|_{D_0} = \psi_0.$$

Имеем
$$w_N = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-\xi, \Lambda(t))\psi_N(\xi, \tau(t))\, d\xi = F_N(x, \Lambda(t), \tau(t)).$$
Легко видеть, что все w_s, $s = 0, \dots, [l/2]$ ($w = w_0$) имеют вид $F_N(x, \Lambda(t), \tau(t))$. Тогда решения задач можно построить по формуле (3.7) и в силу (3.9) получим
$$\langle w_N \rangle_D^{(l+2-2N)} \le c \langle \psi_N \rangle_{x,D_0}^{(l+2-2N)},$$
$$\langle w_{N-1} \rangle_D^{(l+1-2N)} \le c\big(\langle \psi_{N-1} \rangle_{x,D_0}^{(l+1-2N)} + \langle \psi_N \rangle_{x,D_0}^{(l+2-2N)}\big),$$
и т. д., наконец,
$$\langle w \rangle_D^{(l+2)} \le c \sum_{s=0}^{N} \langle \psi_s \rangle_{x,D_0}^{(l+2-2s)},$$
и в силу (4.9) придем к (4.7).

Докажем (4.8). Рассмотрим тождество
$$f(x,t) = \sum_{i=0}^{\sigma} \frac{1}{i!} \partial_t^i f(x, \tau(t)) \Lambda^i(t)$$
$$+ \frac{1}{(\sigma-1)!} \int\limits_0^{\Lambda(t)} (\Lambda(t)-z)^{\sigma-1} [\partial_\tau^\sigma f(x, \tau(z,t)) - \partial_\tau^\sigma f(x, \tau(t))]\, dz.$$
Для его доказательства нужно воспользоваться соотношением (1.6). В качестве f возьмем $\partial_t^r D_x^s w$, $2r+s < l+2$, и пусть σ — наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $l-2r-s < 2\sigma \le [l]+2-2r-s$. Так как $|\tau(z,t)-\tau(t)| \le M|z|$, то
$$\big|\partial_t^r D_x^s w\big|_{D_T}^{(0)} \le c_1(T) \sum_{i=0}^{\sigma} \big|D_x^s \varphi_{r+i}\big|_{D_0}^{(0)}$$
$$+ \big\langle \partial_t^{r+\sigma} D_x^s w \big\rangle_{t,D_T}^{((l+2-2r-2\sigma-s)/2)} \frac{1}{(\sigma-1)!} \int\limits_0^{\Lambda(t)} (\Lambda(t)-z)^{\sigma-1} z^{((l+2-2r-2\sigma-s)/2)}\, dz.$$
Отсюда
$$\big|\partial_t^r D_x^s w\big|_{D_T}^{(0)} \le c_1(T) \sum_{i=0}^{\sigma} \big|D_x^s \varphi_{r+i}\big|_{D_0}^{(0)} + c_2(T) \big\langle \partial_t^{r+\sigma} D_x^s w \big\rangle_{t,D_T}^{((l+2-2r-2\sigma-s)/2)}.$$
Оценивая второе слагаемое при помощи (4.7), получим
$$\big|\partial_t^r D_x^s w\big|_{D_T}^{(0)} \le c_1(T) \sum_{i=0}^{\sigma} \big|D_x^s \varphi_{r+i}\big|_{D_0}^{(0)} + c_2(T) \sum_{k=0}^{[l/2]+1} \langle \varphi_k \rangle_{x,D_0}^{((l+2-2k)}.$$
Используя это неравенство и (4.7), нетрудно получить (4.8).

В исследуемых задачах сделаем замену $v = u - w$. Тогда v будет решением уравнения
$$Lv = f - Lw = f_0.$$
В случае задачи Коши имеем $v \in \mathscr{H}_0^{l+2,l/2+1}(\overline{D}_T)$, $f_0 \in \mathscr{H}_0^{l,l/2}(\overline{D}_T)$, $\varphi \equiv 0$. В случае первой краевой задачи будет $v \in \mathscr{H}_0^{l+2,l/2+1}(\overline{Q}_T)$, $f_0 \in \mathscr{H}_0^{l,l/2}(\overline{Q}_T)$, $\varphi \equiv 0$. В силу условия согласования $(\psi - w)\,|_{S_T} = \psi_0 \in \mathscr{H}_0^{l+2,l/2+1}(\overline{S}_T)$.

Достаточно доказать теоремы 4.1, 4.2 для малых $\delta = T$.

Теорема 4.3. *Пусть* $u \in \mathscr{H}_0^{l+2,l/2+1}(\overline{Q}_\delta)$ *— решение задачи*

$$Lu = f \text{ в } Q_\delta, \quad u|_{Q_0} = 0, \quad u|_{S_\delta} = \psi, \quad f \in \mathscr{H}_0^{l,l/2}(\overline{Q}_\delta), \ \psi \in \mathscr{H}_0^{l+2,l/2+1}(\overline{S}_\delta).$$

Тогда

$$|u|_{Q_\delta}^{(l+2)} \leq c\big(|f|_{Q_\delta}^{(l)} + |\psi|_{S_\delta}^{(l+2)}\big), \tag{4.10}$$

где $\delta > 0$ *достаточно мало,* $c > 0$ *— постоянная, ограниченная при* $\delta \to 0$.

Теорема 4.4. *Пусть* $u \in \mathscr{H}_0^{l+2,l/2+1}(\overline{D}_\delta)$ *— решение задачи Коши*

$$Lu = f \text{ в } D_\delta, \quad u|_{D_0} = 0, \quad f \in \mathscr{H}_0^{l,l/2}(\overline{D}_\delta).$$

Тогда

$$|u|_{D_\delta}^{(l+2)} \leq c|f|_{D_\delta}^{(l)}, \tag{4.11}$$

где $c > 0$ *— постоянная, ограниченная при* $\delta \to 0$.

Мы рассмотрим два случая: Ω — ограниченная в $\mathbb{R}^n$ область с границей $S \in H^{l+2}$ (см. [6]) или $\Omega \equiv \mathbb{R}^n$. При заданном $\lambda > 0$ (см. [6, гл. 4, § 4]) рассмотрим подобласти $\omega^{(k)} \subset \Omega^{(k)}$, осуществляющие покрытие Ω (конечное, если Ω — ограниченная область, и счетное при $\Omega \equiv \mathbb{R}^n$), обладающее следующими свойствами.

1. $\omega^{(k)} \subset \Omega^{(k)}$, $\bigcup \omega^{(k)} = \bigcup \Omega^{(k)} = \Omega$.

2. Для любой точки $x \in \Omega$ существует $\omega^{(k)}$ такое, что $x \in \omega^{(k)}$ и расстояние от x до $\Omega \setminus \omega^{(k)}$ не меньше λd ($d > 0$).

3. Существует такое N_0, не зависящее от λ, что пересечение любых $N_0 + 1$ подобластей $\Omega^{(k)}$ пусто.

4. Множества $\omega^{(k)}$ и $\Omega^{(k)}$ ($k = 1, \dots, p$), отстающие от границы S на положительное расстояние, являются n-мерными кубами с центром в точках $\xi^{(k)}$ и линейными размерами λ и 2λ соответственно. Подобласти $\omega^{(k)} \subset \Omega^{(k)}$ ($k = p+1, \dots, q$) — это подобласти, примыкающие к S и в местной системе координат $(y_1, \dots, y_n)$ с вершиной в точке $\xi^{(k)} \in S^{(k)} \subset S$ (y_n направлен вдоль внутренней нормали) определяемые неравенствами

$$|y_s| \leq \frac{\lambda}{2}, \quad s = 1, \dots, n-1, \quad 0 < y_n - F(y') < \lambda,$$

$$|y_s| < \lambda, \quad s = 1, \dots, n-1, \quad 0 < y_n - F(y') < 2\lambda$$

соответственно. Здесь $y_n = F(y') \in H^{l+2}$ — уравнение поверхности $S^{(k)}$ (см. [6]).

Сделаем замену

$$z_s = y_s, \quad s = 1, \dots, n-1, \quad z_n = y_n - F(y').$$

Тогда область $\Omega^{(k)}$ отобразится на куб K: $|z_s| < \lambda$, $s = 1, \dots, n-1$, $|z_n| < 2\lambda$. Рассмотрим функцию $\zeta^{(k)}(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, обладающую свойствами

$$0 \leq \zeta^{(k)} \leq 1, \quad \zeta^{(k)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \omega^{(k)}, \\ 0, & x \in (\Omega \setminus \Omega^k), \ \big|D_x^s \zeta^{(k)}\big| \leq \frac{c_s}{\lambda^s}. \end{cases} \tag{4.12}$$

В силу свойства 3 подобластей $\Omega^{(k)}$ имеем

$$1 \leq \sum_k [\zeta^{(k)}(x)]^2 \leq N_0. \tag{4.13}$$

Функция

$$\eta^{(k)}(x)=\frac{\zeta^{(k)}(x)}{\sum\limits_k[\zeta^{(k)}(x)]^2}$$

будет удовлетворять условиям

$$\eta^{(k)}(x)=0 \text{ в } \Omega\setminus\Omega^{(k)},\quad \bigl|D_x^s\eta^{(k)}\bigr|\le\frac{c_s}{\lambda^s},\quad \sum_k\eta^{(k)}(x)\zeta^{(k)}(x)=1. \tag{4.14}$$

§ 5. Вспомогательные неравенства

Легко заметить, что $\langle u\rangle^{(l)}_{Q_\delta}$ — норма на $\mathscr{H}_0^{l,l/2}(\overline{Q}_\delta)$ и $\langle u\rangle^{(l)}_{Q_\delta}\le|u|^{(l)}_{Q_\delta}$. В дальнейшем мы покажем, что эти нормы в $\mathscr{H}_0^{l,l/2}(\overline{Q}_\delta)$ эквивалентны.

Лемма 5.1. *Пусть $u\in\mathscr{H}_0^{l,l/2}(\overline{Q}_\delta)$.*

1. *Пусть $\Omega'\subset\Omega$, $Q'_\delta=\Omega'\times G_\delta$. Тогда для любого натурального $i<l$ справедливо неравенство*

$$\langle u\rangle^{(i)}_{Q'_\delta}\le c\delta^{(l-i)/2}\langle u\rangle^{(l/2)}_{t,Q'_\delta}, \tag{5.1}$$

2. *Пусть $Q^{(k)}_\delta=\Omega^{(k)}\times G_\delta$, $\delta=\kappa\lambda^2$, $\kappa<1$. Введем норму*

$$\|u\|^{(l)}_{Q_\delta}=\sup_k\langle u\rangle^{(l)}_{Q^{(k)}_\delta}. \tag{5.2}$$

Тогда

$$\|u\|^{(l)}_{Q_\delta}\le\langle u\rangle^{(l)}_{Q_\delta}\le c\|u\|^{(l)}_{Q_\delta}, \tag{5.3}$$

где $c>0$ не зависит от λ и δ.

3. *Пусть $\delta=\kappa\lambda^2$, $\kappa<1$, и $w_k(x)$ — определенная в $\Omega^{(k)}$ функция, удовлетворяющая условию*

$$\bigl|D_x^sw_k\bigr|\le c_s\lambda^{-s-i},\quad s=0,1,\dots,[l]+1,\quad i\ge0. \tag{5.4}$$

Тогда для любой функции $u\in\mathscr{H}_0^{l,l/2}\bigl(\overline{Q}^{(k)}_\delta\bigr)$ имеет место неравенство

$$\langle w_ku\rangle^{(l)}_{Q^{(k)}_\delta}\le c\lambda^{-i}\langle u\rangle^{(l)}_{Q^{(k)}_\delta}, \tag{5.5}$$

где $c>0$ не зависит от λ и δ ($\delta=\kappa\lambda^2$, $\kappa<1$).

Доказательство. Неравенства (5.1) и (5.3) легко обосновать, опираясь на аналогичные оценки из [6, гл. 4, § 4]. Докажем (5.5). В силу (5.4) имеем

$$\begin{aligned}\langle w_ku\rangle^{(l)}_{x,Q^{(k)}_\delta}&\le c\sum_{j=0}^{[l]}\bigl(\langle w_k\rangle^{(j)}_{\Omega^{(k)}}\langle u\rangle^{(l-j)}_{x,Q^{(k)}_\delta}+\langle w_k\rangle^{(l-j)}_{\Omega^{(k)}}\langle u\rangle^{(j)}_{Q^{(k)}_\delta}\bigr)\\&\le c\sum_{j=0}^{[l]}\bigl(\lambda^{-i-j}\langle u\rangle^{(l-j)}_{x,Q^{(k)}_\delta}+\lambda^{j-l-i}\langle u\rangle^{(j)}_{Q^{(k)}_\delta}\bigr).\end{aligned} \tag{5.6}$$

Так как $|x-x'|<\lambda$ в $Q^{(k)}_\delta$, то

$$\begin{aligned}&|x-x'|^{[l]-l}\bigl|\partial_t^rD_x^su(x,t)-\partial_t^rD_{x'}^su(x',t)\bigr|\\&\quad=|x-x'|^{[l]-l}\left|\int_0^1\frac{\partial}{\partial\lambda}\partial_t^rD_\xi^su(x'+\lambda(x-x'),t)\,d\lambda\right|\\&\quad\le|x-x'|^{[l]-l+1}\max_{Q^{(k)}_\delta}\bigl|\partial_t^rD_x^{s+1}u\bigr|\le\lambda^{1+[l]-l}\max_{Q^{(k)}_\delta}\bigl|\partial_t^rD_x^{s+1}u\bigr|.\end{aligned}$$

Для $2r+s=[l]-j$ имеем

$$\big\langle \partial_t^r D_x^s u\big\rangle^{(l-[l])}_{x,Q_\delta^{(k)}} \le c\lambda^{1+[l]-l}\max_{Q_\delta^{(k)}}\big|\partial_t^r D_x^{s+1}u\big|.$$

Тогда

$$\langle u\rangle^{(l-j)}_{x,Q_\delta^{(k)}} \le c\lambda^{1+[l]-l}\langle u\rangle^{([l]+1-j)}_{Q_\delta^{(k)}}.$$

Так как $\delta<\lambda^2$, в силу (5.1)

$$\langle u\rangle^{(l-j)}_{x,Q_\delta^{(k)}} \le c\lambda^{j}\langle u\rangle^{(l/2)}_{t,Q_\delta^{(k)}}. \tag{5.7}$$

Подставляя (5.6) в (5.7) и учитывая (5.1), получим

$$\begin{aligned}\langle w_k u\rangle^{(l)}_{x,Q_\delta^{(k)}} &\le c\lambda^{-i}\left(\sum_{j=0}^{[l]}\lambda^{j-l}\langle u\rangle^{(j)}_{Q_\delta^{(k)}} + \langle u\rangle^{(l)}_{x,Q_\delta^{(k)}}\right)\\ &\le c\lambda^{-i}\big(\langle u\rangle^{(l)}_{x,Q_\delta^{(k)}} + \langle u\rangle^{(l/2)}_{t,Q_\delta^{(k)}}\big) \le c\lambda^{-i}\langle u\rangle^{(l)}_{Q_\delta^{(k)}}.\end{aligned} \tag{5.8}$$

Далее,

$$\partial_t^r D_x^s(w_k u) = \sum_{j=0}^{s} C_s^j D_x^{s-j} w_k \partial_t^r D_x^j u,$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial_t^r D_x^s(w_k u(x,t)) - \partial_{t'}^r D_x^s(w_k u(x,t'))}{|t-t'|^{(l-2r-s)/2}}\\ &\qquad = \sum_{j=0}^{s} C_s^j D_x^{s-j} w_k \frac{\partial_t^r D_x^j u(x,t) - \partial_{t'}^r D_x^j u(x,t')}{|t-t'|^{(l-2r-j)/2}}|t-t'|^{(s-j)/2}.\end{aligned}$$

В силу (5.4) и того факта, что $|t-t'|<\delta$ в $Q_\delta^{(k)}$, получаем

$$\big\langle \partial_t^r D_x^s(w_k u)\big\rangle^{(l-2r-s)/2}_{t,Q_\delta^{(k)}} \le \sum_{j=0}^{s} C_s^j\lambda^{s-j-i}\delta^{(s-j)/2}\big\langle \partial_t^r D_x^j u\big\rangle^{(l-2r-j)/2}_{t,Q_\delta^{(k)}}.$$

Тогда

$$\langle w_k u\rangle^{(l/2)}_{t,Q_\delta^{(k)}} \le c\sum_{0<l-2r-s<2}\sum_{j=0}^{s}\lambda^{s-j-i}\delta^{(s-j)/2}\big\langle \partial_t^r D_x^j u\big\rangle^{(l-2r-j)/2}_{t,Q_\delta^{(k)}} \le c\lambda^{-i}\langle u\rangle^{(l/2)}_{t,Q_\delta^{(k)}}. \tag{5.9}$$

Из (5.8), (5.9) выводим (5.5).

Лемма 5.2. 1. *Пусть* $u=\sum\limits_{k=0}^{q} u_k(x,t)$, *где* $u_k(x,t)=0$ *для* $x\in\Omega\setminus\Omega^{(k)}$ *и* $u_k\in \mathscr{H}_0^{l,l/2}\big(\overline{Q}_\delta^{(k)}\big)$. *Тогда*

$$\|u\|^{(l)}_{Q_\delta} \le N_0\sup_k\langle u_k\rangle^{(l)}_{Q_\delta^{(k)}}. \tag{5.10}$$

2. *Пусть* $\delta=\kappa\lambda^2$, $\kappa<1$, $u=\sum\limits_{k=1}^{q} w_k(x)W_k(x,t)$, $W_k\in \mathscr{H}_0^{l,l/2}\big(\overline{Q}_\delta^{(k)}\big)$, *функция* $w_k(x)$ *отлична от нуля только в* $\Omega^{(k)}$ *и удовлетворяет условию* (5.4). *Тогда*

$$\|u\|^{(l)}_{Q_\delta} \le c_1\lambda^{-i}\sup_k\langle W_k\rangle^{(l)}_{Q_\delta^{(k)}}. \tag{5.11}$$

3. *Если* $u \in \mathscr{H}_0^{l+i,(l+i)/2}(\overline{Q}_\delta)$, *то*

$$\langle u\rangle^{(l)}_{Q^{(k)}_\delta} \le c_2\delta^{i/2}\langle u\rangle^{(l+i)}_{Q^{(k)}_\delta}, \quad \|u\|^{(l)}_{Q_\delta} \le c_3\delta^{i/2}\|u\|^{(l+i)}_{Q_\delta}, \tag{5.12}$$

где $c_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, *не зависят от* λ, δ.

Доказательство. В силу простоты доказательств неравенств (5.10), (5.11) приведем только доказательство неравенства (5.12), которое достаточно обосновать для $i = 1$. Имеем $\tau(z,t) = \tau(z,t')$ и

$$\begin{aligned} &|t-t'|^{-(l-2r-s)/2}\big|\partial_t^r D_x^s u(x,t) - \partial_{t'}^r D_x^s u(x,t')\big| \\ &\qquad = |t-t'|^{-(l-2r-s)/2}\left|\int\limits_{\Lambda(t')}^{\Lambda(t)} \frac{\partial}{\partial z}\partial_\tau^r D_x^s u(x,\tau(z,t))\,dz\right| \\ &\le |t-t'|^{-(l-2r-s)/2}|\Lambda(t)-\Lambda(t')|\max_{Q^{(k)}_\delta}|\partial_t^{r+1}D_x^s u| \le \delta^{1-(l-2r-s)/2}\big|\partial_t^{r+1}D_x^s u\big|^{(0)}_{Q^{(k)}_\delta}, \end{aligned}$$

так как $|\Lambda(t)-\Lambda(t')| \le M|t-t'|$ и $|t-t'| \le \delta$ в $Q^{(k)}_\delta$. Тогда

$$\big\langle\partial_t^r D_x^s u\big\rangle^{((l-2r-s)/2)}_{t,Q^{(k)}_\delta} \le \delta^{1-(l-2r-s)/2}\big|\partial_t^{r+1}D_x^s u\big|^{(0)}_{Q^{(k)}_\delta}. \tag{5.13}$$

Возьмем в (5.1) $Q'_\delta = Q^{(k)}_\delta$, $i = 2r+2+s$ и заменим l на $l+1$. Тогда

$$\big|\partial_t^r D_x^s u\big|^{(0)}_{Q^{(k)}_\delta} \le c\delta^{(l-1-2r-s)/2}\langle u\rangle^{((l+1)/2)}_{t,Q^{(k)}_\delta}.$$

Подставляя это в (5.13), получим

$$\big\langle\partial_t^r D_x^s u\big\rangle^{((l-2r-s)/2)}_{t,Q^{(k)}_\delta} \le c\delta^{1/2}\langle u\rangle^{((l+1)/2)}_{t,Q^{(k)}_\delta}.$$

Отсюда

$$\langle u\rangle^{(l/2)}_{t,Q^{(k)}_\delta} \le c\delta^{1/2}\langle u\rangle^{((l+1)/2)}_{t,Q^{(k)}_\delta}.$$

Взяв в (5.7) $l+1$ вместо l и $j = 1$, имеем

$$\langle u\rangle^{(l)}_{x,Q^{(k)}_\delta} \le \lambda\langle u\rangle^{((l+1)/2)}_{t,Q^{(k)}_\delta} \le c\delta^{1/2}\langle u\rangle^{((l+1)/2)}_{t,Q^{(k)}_\delta}.$$

Из последних неравенств вытекает первое из неравенств (5.12) ($i = 1$), а из него в силу определения нормы (5.2) получаем и второе из неравенств (5.12).

Замечание. В силу (5.1), (5.3) все три нормы $|u|^{(l)}_{Q_\delta}$, $\langle u\rangle^{(l)}_{Q_\delta}$, $\|u\|^{(l)}_{Q_\delta}$ эквивалентны в $\mathscr{H}_0^{l,l/2}(\overline{Q}_\delta)$.

Ниже мы будем пользоваться оценками решений следующих модельных задач.

1. Задача Коши:

$$\partial_t u - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\tau(t))u_{x_ix_j} = f, \text{ в } D_\delta, \quad u|_{D_0} = 0,$$

где $f \in \mathscr{H}_0^{l,l/2}(\overline{D}_\delta)$ и a_{ij} постоянны вдоль заданной характеристики. Решение существует в $\mathscr{H}_0^{l+2,l/2+1}(\overline{D}_\delta)$, и

$$|u|^{(l+2)}_{D_\delta} \le c|f|^{(l)}_{D_\delta}. \tag{5.14}$$

В случае $a_{ij}=\delta_{ij}$ решение дается формулой

$$u=\int\limits_0^{\Lambda(t)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(x-\xi,\Lambda(t)-z)f(\xi,\tau(z,t))\,d\xi dz,$$

из которой в силу (3.4) следует (5.14). Общий случай при помощи линейного ортогонального преобразования сводится к этому.

2. Первая краевая задача:

$$\partial_t u-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\tau(t))u_{x_ix_j}=f \text{ в } \mathbb{R}^n_+\times G_\delta,\quad u|_{x_n=0}=\psi(x',t)$$

с нулевыми начальными данными,

$$f\in\mathscr{H}_0^{l,l/2}\big(\overline{\mathbb{R}^n_+\times G_\delta}\big),\quad \psi\in\mathscr{H}_0^{l+2,l/2+1}(\overline{\mathbb{R}^{n-1}\times G_\delta}).$$

Решение существует в $\mathscr{H}_0^{l+2,l/2+1}(\overline{\mathbb{R}^n_+\times G_\delta})$, и

$$|u|^{(l+2)}_{\mathbb{R}^n_+\times G_\delta}\le c\big(|f|^{(l)}_{\mathbb{R}^n_+\times G_\delta}+|\psi|^{(l+2)}_{\mathbb{R}^{n-1}\times G_\delta}\big). \tag{5.15}$$

Продолжаем $f(x,\tau(z,t))$ на значения $x_n<0$, а затем функции $f(x,\tau(z,t))$, $\psi(x',\tau(z,t))$ полагаем равными нулю при $z<0$. Тогда решение дается формулой

$$u=g_2(x,t;\psi-f_0)+g(x,t;f),\quad f_0=g(x,t;f)|_{x_n=0}.$$

В общем случае существует ортогональное преобразование $y_r=\sum\limits_{i=1}^n\beta_{ri}(\tau(t))x_i$, $r=1,\dots,n$, сводящее задачу к случаю $a_{ij}=\delta_{ij}$ с краевыми условиями на $y_n=0$.

§ 6. Доказательство теоремы 4.3

Доказательства теорем 4.3 и 4.4 аналогичны, поэтому дадим лишь доказательство теоремы 4.3.

Пусть $u\in\mathscr{H}_0^{l+2,l/2+1}(\overline{Q}_\delta)$ — решение первой краевой задачи. Докажем неравенство (4.10). В силу (4.14) функцию u можно представить так:

$$u=\sum_k\eta^{(k)}(x)u_k(x,t),\quad u_k=\zeta^{(k)}(x)u. \tag{6.1}$$

Имеем

$$\partial_t u_k-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\xi^{(k)},\tau(t))u_{kx_ix_j}=\Phi_k(x,t), \tag{6.2}$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_k=\sum_{i,j=1}^n[a_{ij}(x,t)-a_{ij}(\xi^{(k)},\tau(t))]\zeta^{(k)}(x)u_{x_ix_j}\\ -\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(\xi^{(k)},\tau(t))\big[u\zeta^{(k)}_{x_ix_j}+2u_{x_i}\zeta^{(k)}_{x_j}\big]\\ -\sum_{i=1}^n\zeta^{(k)}a_i(x,t)u_{x_i}-a(x,t)\zeta^{(k)}u+\zeta^{(k)}f.\end{aligned}$$

Очевидно, что $\Phi_k \in \mathscr{H}_0^{l,l/2}(\overline{D}_\delta)$ (вне $Q_\delta^{(k)}$ полагаем $\Phi_k = 0$) и

$$\langle \Phi_k \rangle^{(l)}_{Q_\delta^{(k)}} \le c \langle \Phi_k \rangle^{(l)}_{D_\delta}. \tag{6.3}$$

Если $x \in \Omega^{(k)}$, то

$$|a_{ij}(x,t) - a_{ij}(\xi^{(k)}, \tau(t))| \\ \le |a_{ij}(x,t) - a_{ij}(\xi^{(k)}, t)| + |a_{ij}(\xi^{(k)}, t) - a_{ij}(\xi^{(k)}, \tau(t))| \le c\lambda^{l-[l]}. \tag{6.4}$$

На основании (5.5), (5.10)–(5.12) и (6.4) имеем

$$\langle \Phi_k \rangle^{(l)}_{Q_\delta^{(k)}} \le c\big(\lambda^{l-[l]} \langle u \rangle^{(l+2)}_{Q_\delta^{(k)}} + \lambda^{-2} \langle u \rangle^{(l)}_{Q_\delta^{(k)}} + \lambda^{-1} \langle u \rangle^{(l+1)}_{Q_\delta^{(k)}} + \langle u \rangle^{(l+1)}_{Q_\delta^{(k)}} + \langle u \rangle^{(l)}_{Q_\delta^{(k)}} + \langle f \rangle^{(l)}_{Q_\delta^{(k)}}\big) \\ \le c(\lambda^{l-[l]} + \delta\lambda^{-2} + \delta^{1/2}\lambda^{-1} + \delta^{1/2} + \delta) \langle u \rangle^{(l+2)}_{Q_\delta^{(k)}} + c\langle f \rangle^{(l)}_{Q_\delta^{(k)}} = c(\lambda,\delta) \langle u \rangle^{(l+2)}_{Q_\delta^{(k)}} + c\langle f \rangle^{(l)}_{Q_\delta^{(k)}}, \tag{6.5}$$

где $c(\lambda,\delta)$ можно сделать малыми за счет выбора δ и λ.

1. Пусть $k \le p$. Тогда подобласти $\omega^{(k)} \subset \Omega^{(k)}$ суть кубы с центром в точке $\xi^{(k)}$. Решением уравнения (6.2) с нулевыми начальными данными будет функция $u_k \in \mathscr{H}_0^{l+2,l/2+1}(\overline{D}_\delta)$, которая в силу (6.5) и (5.14) удовлетворяет неравенству

$$\langle u_k \rangle^{(l+2)}_{Q_\delta} \le \langle u_k \rangle^{(l+2)}_{D_\delta} \le c(\lambda,\delta) \langle u \rangle^{(l+2)}_{Q_\delta} + c\langle f \rangle^{(l)}_{Q_\delta}. \tag{6.6}$$

2. Пусть $k \ge p+1$. В этом случае область $\omega^{(k)} \subset \Omega^{(k)}$ примыкает к $S^{(k)} \subset S$. Функция $u_k \in \mathscr{H}_0^{l+2,l/2+1}\big(\overline{Q}_\delta^{(k)}\big)$ в $Q_\delta^{(k)}$ является решением уравнения (6.2). Она равна $\psi_k(x',t) = \zeta^{(k)}(x)\psi(x',t) \in \mathscr{H}_0^{l+2,l/2+1}(\overline{S}_\delta^{(k)})$ на $S^{(k)}$ и нулю на оставшейся части боковой поверхности $Q_\delta^{(k)}$. Пусть $(y_1,\dots,y_n)$ — местная система координат с вершиной в точке $\xi^{(k)} \in S^{(k)}$. Выполним преобразование $y_r = \sum\limits_{i=1}^n \beta_{ri}\big(x_i - \xi_i^{(k)}\big)$, $r = 1,\dots,n$, где β_{ri} — элементы ортогонального преобразования, а затем преобразование

$$z_s = \sum_{i=1}^n \beta_{si}\big(x_i - \xi_i^{(k)}\big), \quad s = 1,\dots,n-1, \quad z_n = \sum_{i=1}^n \beta_{ni}\big(x_i - \xi_i^{(k)}\big) - F(y'), \tag{6.7}$$

которое взаимно-однозначно отображает область $\Omega^{(k)}$ на куб K: $|z_s| < \lambda$, $s = 1,\dots,n-1$, $0 < z_n < 2\lambda$, и область $S^{(k)}$ на грань $z_n = 0$. Обозначим через $u^*(z,t)$ функцию $u(x,t)$ после преобразования (6.7). Поскольку $F(y') \in H^{l+2}$ (см. [6, гл. 4, § 4]), то $u^*(z,t) \in \mathscr{H}_0^{l+2,l/2+1}(\overline{K \times G_\delta})$. Для любого не целого σ, $0 < \sigma \le l+2$, имеем

$$\langle u^* \rangle^{(\sigma)}_{K\times G_\delta} \le c\langle u \rangle^{(\sigma)}_{Q_\delta^{(k)}} \le c_1 \langle u^* \rangle^{(\sigma)}_{K\times G_\delta}. \tag{6.8}$$

После замены (6.7) уравнение (6.2) в $K \times G_\delta$ примет вид

$$\partial_t u_k^* - \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^{(k)}(\xi^{(k)}, \tau(t)) u^*_{kz_iz_j} = \Phi^*(z,t) + w_k(z,t), \tag{6.9}$$

где

$$w_k(z,t) = -\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{i,j}^{(k)} \left[2\frac{\partial F}{\partial z_j}\frac{\partial^2 u_k^*}{\partial z_i \partial z_n} + \frac{\partial^2 F}{\partial z_i \partial z_j}\frac{\partial u_k^*}{\partial z_n} - \frac{\partial F}{\partial_{z_i}}\frac{\partial F}{\partial_{z_j}}\frac{\partial^2 u_k^*}{\partial z_n^2}\right] \\ - 2\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}^{(k)} \frac{\partial F}{\partial_{z_i}} \frac{\partial^2 u_k^*}{\partial z_n^2}.$$

Продолжая функции нулем в соответствующие области, получим

$$u_k^* \in \mathscr{H}_0^{l+2,l/2+1}(\overline{\mathbb{R}_+^n \times G_\delta}), \quad \psi_k^* \in \mathscr{H}_0^{l+2,l/2+1}(\overline{\mathbb{R}^{n-1} \times G_\delta}),$$

$$\Phi^*(z,t) + w_k(z,t) \in \mathscr{H}_0^{l,l/2}(\overline{\mathbb{R}^n \times G_\delta}).$$

Таким образом, функция $u^*(z,t)$ является решением уравнения (6.9), удовлетворяющим нулевым начальным условиям и таким, что $u_k^* = \psi_k^*$ на $\mathbb{R}^{n-1} \times G_\delta$. В силу (5.15) имеем

$$\langle u_k^* \rangle_{K \times G_\delta}^{(l+2)} \le \langle u_k^* \rangle_{\mathbb{R}_+^n \times G_\delta}^{(l+2)} \le c\big(\langle \Phi_k^* \rangle_{K \times G_\delta}^{(l)} + \langle w_k \rangle_{K \times G_\delta}^{(l)} + \langle \psi_k^* \rangle_{K_0 \times G_\delta}^{(l+2)}\big),$$

где K_0 — грань K, на которой $z_n = 0$. В $K \times G_0$ получим (см. [6])

$$|F_{y_i}| = |F_{z_i}| \le c\lambda, \quad i = 1, \dots, n-1. \tag{6.10}$$

Тогда в силу (6.8)

$$\langle w_k \rangle_{K \times G_\delta}^{(l)} \le c\big(\lambda \langle u_k \rangle_{Q_\delta^{(k)}}^{(l+2)} + \langle u_k \rangle_{Q_\delta^{(k)}}^{(l+1)} + \lambda^2 \langle u_k \rangle_{Q_\delta^{(k)}}^{(l+2)} + \lambda \langle u_k \rangle_{Q_\delta^{(k)}}^{(l+2)}\big)$$

и ввиду (5.12)

$$\langle w_k \rangle_{K \times G_\delta}^{(l)} \le c(\lambda + \delta^{1/2} + \lambda^2 + \lambda) \langle u_k \rangle_{Q_\delta^{(k)}}^{(l+2)} = c(\lambda,\delta) \langle u_k \rangle_{Q_\delta^{(k)}}^{(l+2)}, \tag{6.11}$$

где $c(\lambda,\delta)$ можно сделать малым за счет выбора λ и δ. На основании (6.5), (6.8), (6.11) при $k \ge p+1$ будем иметь

$$\langle u_k \rangle_{Q_\delta^{(k)}}^{(l+2)} \le c(\lambda,\delta) \langle u_k \rangle_{Q_\delta^{(k)}}^{(l+2)} + c\big(\langle f_k \rangle_{Q_\delta^{(k)}}^{(l)} + \langle \psi \rangle_{S_\delta^{(k)}}^{(l+2)}\big). \tag{6.12}$$

Из оценок (6.6) и (6.12) получаем

$$\|u\|_{Q_\delta}^{(l+2)} \le c(\lambda,\delta) \|u\|_{Q_\delta}^{(l+2)} + c\big(\|f\|_{Q_\delta}^{(l)} + \|\psi\|_{S_\delta}^{(l+2)}\big)$$

и ввиду малости $c(\lambda,\delta)$ приходим к (4.10). Теоремы 4.3 и 4.1, 4.2 доказаны.

В следующем параграфе по схеме, предложенной в [6, гл. 4, § 7, 8], докажем существование решения первой краевой задачи для уравнения $\partial_t u - \Delta u = f$ в пространстве $\mathscr{H}_0^{l+2,l/2+1}(\overline{Q}_T)$.

§ 7. Существование решения первой краевой задачи для уравнения $\partial_t u - ´u = f$

Теорема 7.1. *Пусть* $f \in \mathscr{H}_0^{l,l/2}(\overline{Q}_\delta)$, $\psi \in \mathscr{H}_0^{l+2,l/2+1}(\overline{S}_\delta)$. *Существует решение* $u \in \mathscr{H}_0^{l+2,l/2+1}(\overline{Q}_\delta)$ *задачи*

$$Lu \equiv \partial_t u - \Delta u = f \text{ в } Q_\delta, \quad u|_{S_\delta} = \psi,$$

такое, что

$$|u|_{Q_\delta}^{(l+2)} \le c\big(|f|_{Q_\delta}^{(l)} + |\psi|_{S_\delta}^{(l+2)}\big). \tag{7.1}$$

Доказательство. 1. Пусть $k \le p$ и $u_k = E_k(f_k)$ — решение задачи Коши

$$Lu_k = f_k \text{ в } D_\delta$$

с нулевыми начальными данными и $f_k = \zeta^{(k)} f$. Решение $u_k \in \mathscr{H}_0^{l+2,l/2+1}(\overline{D}_\delta)$ существует, и в силу (5.5), (5.14)

$$\langle u_k \rangle_{Q_\delta^{(k)}}^{(l+2)} \le c \langle u_k \rangle_{D_\delta}^{(l+2)} \le c \langle f \rangle_{Q_\delta^{(k)}}^{(l)}. \tag{7.2}$$

Пусть Z_k — оператор, который сопоставляет каждой функции, заданной в K, ту же самую функцию при преобразовании (6.7), определенную в $\Omega^{(k)}$. Очевидно, существует Z_k^{-1}.

2. Пусть $k \geq p+1$. Имеем $f_k^*(z,t) = Z_k^{-1} f(x,t)$, $\psi_k^*(z,t) = Z_k^{-1}\psi_k(x,t)$, $(z,t) \in K \times G_\delta$. Продолжив f_k^*, ψ_k^* нулем в соответствующие области, будем иметь $f_k^* \in \mathscr{H}_0^{l,l/2}(\overline{\mathbb{R}_+^n \times G_\delta})$, $\psi_k^* \in \mathscr{H}_0^{l+2,l/2+1}(\overline{\mathbb{R}^{n-1} \times G_\delta})$.

Пусть $u_k^*(z,t) = E_k(f_k^*, \psi_k^*)$ — решение краевой задачи

$$\partial_t u_k^* - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u_k^*}{\partial z_i^2} = f_k^*(z,t) \text{ в } \mathbb{R}_+^n \times G_\delta, \quad u_k^*|_{z_n=0} = \psi_k^*(z,t).$$

Оно существует и принадлежит $\mathscr{H}_0^{l+2,l/2+1}\big(\overline{\mathbb{R}_+^n \times G_\delta}\big)$. В силу (5.15)

$$\langle u_k^* \rangle_{K\times G_\delta}^{(l+2)} \leq c \langle u_k^* \rangle_{\mathbb{R}_+^n \times G_\delta}^{(l+2)} \leq c\big(\langle f_k^* \rangle_{K\times G_\delta}^{(l)} + \langle \psi_k^* \rangle_{K_0\times G_\delta}^{(l+2)}\big).$$

Пусть $u_k(x,t) = Z_k u_k^*(z,t)$ — определенная в $Q_\delta^{(k)}$ функция. Вследствие (6.8)

$$\langle u_k \rangle_{Q_\delta^{(k)}}^{(l+2)} \leq c\big(\langle f_k \rangle_{Q_\delta^{(k)}}^{(l)} + \langle \psi_k \rangle_{S_\delta^{(k)}}^{(l+2)}\big),$$

и ввиду (5.5) $(i=0)$

$$\langle u_k \rangle_{Q_\delta^{(k)}}^{(l+2)} \leq c\big(\langle f \rangle_{Q_\delta^{(k)}}^{(l)} + \langle \psi \rangle_{S_\delta^{(k)}}^{(l+2)}\big). \tag{7.3}$$

3. Рассмотрим банахово пространство B_l, состоящее из пар $(f,\psi) = h$, где $f \in \mathscr{H}_0^{l,l/2}(\overline{Q}_\delta)$, $\psi \in \mathscr{H}_0^{l+2,l/2+1}(\overline{S}_\delta)$, с нормой

$$|h|_{B_l} = \|f\|_{Q_\delta}^{(l)} + \|\psi\|_{S_\delta}^{(l+2)} \tag{7.4}$$

и оператор

$$Eh = \sum_{k=1}^q \eta^{(k)}(x) u_k(x,t).$$

Ясно, что

$$u_k = \begin{cases} E_k(\zeta^{(k)} f) & \text{при } k \leq p, \\ Z_k E_k(Z_k^{-1} f_k, Z_k^{-1}\psi_k) & \text{при } k \geq p+1. \end{cases}$$

Ввиду (7.2), (7.3), (5.11) и (5.2) имеем

$$\begin{aligned}\|Eh\|_{Q_\delta}^{(l+2)} \leq c \sup_k \langle u_k \rangle_{Q_\delta^{(k)}}^{(l+2)} \leq c\big(\sup_k \langle f \rangle_{Q_\delta^{(k)}}^{(l)} + \sup_{k\geq p+1} \langle \psi \rangle_{S_\delta^{(k)}}^{(l+2)}\big) \\ = c\big(\|f\|_{Q_\delta}^{(l)} + \|\psi\|_{S_\delta}^{(l+2)}\big) = c|h|_{B_l},\end{aligned}$$

т. е. оператор $E : B_l \to \mathscr{H}_0^{l+2,l/2+1}$ ограничен. Обозначим через A линейный оператор, который каждому элементу u из $\mathscr{H}_0^{l+2,l/2+1}(\overline{Q}_\delta)$ сопоставляет пару $(Lu, u\,|_{S_\delta}) = h$. В силу неравенства

$$|h|_{B_l} = |Au|_{B_l} \leq c\|u\|_{Q_\delta}^{(l+2)}$$

оператор A ограничен, и тем самым доказательство теоремы 7.1 сводится к обоснованию существования A^{-1} в уравнении

$$Au = h = (f,\psi). \tag{7.5}$$

Доказательство существования A^{-1} с несущественными изменениями аналогично доказательству в случае $m=1$ (см. [6, гл. 4, § 7, 8]).

На основании теоремы 7.1 методом параметрикса можно получить основной результат.

Теорема 7.2. *Пусть $l > 0$ — целое число.*

1. *Пусть коэффициенты a_{ij}, a_i, a уравнения* (5) *принадлежат $\mathscr{H}^{l,l/2}(\overline{Q}_T)$, $\partial\Omega = S \in H^{l+2}$. Тогда при любых $f \in \mathscr{H}^{l,l/2}(\overline{Q}_T)$, $\varphi \in \mathscr{H}^{l+2}(\overline{Q}_0)$, $\psi \in \mathscr{H}^{l+2,l/2+1}(\overline{S}_T)$, удовлетворяющих условиям согласования* (4.2), *первая краевая задача имеет единственное решение $u \in \mathscr{H}^{l+2,l/2+1}(\overline{Q}_T)$ и для него справедлива оценка* (4.4).

2. *Пусть коэффициенты a_{ij}, a_i, a уравнения* (5) *принадлежат $\mathscr{H}^{l,l/2}(\overline{D}_T)$. Тогда для любых $f \in \mathscr{H}^{l,l/2}(\overline{D}_T)$, $\varphi \in \mathscr{H}^{l+2}(\overline{D}_0)$, задача Коши имеет единственное решение $u \in \mathscr{H}^{l+2,l/2+1}(\overline{D}_T)$ и для него справедлива оценка* (4.5).

Замечание. Рассмотрим в Q_T уравнение

$$Lu \equiv \partial_t u - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} - a(x)u = 0, \tag{7.6}$$

где $a_{ij} \in H^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$, $a \in H^{\alpha}(\overline{\Omega})$. Пусть λ_k — собственные значения, а $w_k(x)$ — ортонормированная система собственных функций задачи

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_i} + a(x)u + \lambda u = 0, \text{ в } \Omega, \quad u|_S = 0.$$

Тогда решение задачи

$$Lu = 0, \text{ в } Q_T, \quad u|_{Q_0} = \varphi(x,t), \quad u|_{S_T} = 0$$

дается формулой

$$u(x,t) = \sum_{s=1}^{\infty} c_s(\tau(t)) w_s(x) \exp(-\lambda_s \Lambda(t)), \tag{7.7}$$

где

$$\varphi(x,t) = \sum_{s=1}^{\infty} c_s(t) w_s(x), \quad c_s(t) = \int\limits_{\Omega} \varphi(x,t) w_s(x)\, dx.$$

Из (7.7) видно, что для p-кратной дифференцируемости решения u по $t_1, \dots, t_m$ необходимы p-кратная дифференцируемость c_s и φ по t_k и p-кратная гладкость поверхности Π.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пискунов Н. С.* Краевые задачи для уравнений эллиптико-параболического типа // Мат. сб. 1940. Т. 7, № 3.
2. *Генчев Н. С.* Об ультрапараболических уравнениях // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151, № 2. С. 265–268.
3. *Ильин А. М.* Об одном классе ультрапараболических уравнений // Докл. АН СССР. 1964. Т. 159, № 6. С. 1214–1217.
4. *Владимиров В. С., Дрожжинов Ю. Н.* Обобщенная задача Коши для ультрапараболического уравнения // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1967. Т. 31, № 6. С. 1341–1360.
5. *Дрожжинов Ю. Н.* Стабилизация решения обобщенной задачи Коши для ультрапараболических уравнений // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1969. Т. 33, № 2. С. 368–372.
6. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
7. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1967.

Статья поступила 14 января 2000 г., окончательный вариант — 27 марта 2001 г.

Терсенов Савва Авраамович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090