Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2001. Том 42, № 6

УДК 517.946

УРАВНЕНИЕ ТАРТАРА ДЛЯ ГОМОГЕНИЗАЦИИ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ МЕЛКОДИСПЕРСНЫХ СМЕСЕЙ

С. А. Саженков

Аннотация: Рассматривается математическая модель, описывающая нестационарное течение Стокса мелкодисперсной смеси вязких несжимаемых жидкостей с быстро осциллирующими начальными данными. Проводится гомогенизация модели при стремлении частоты осцилляций к бесконечности, в связи с чем возникает проблема нахождения эффективных коэффициентов усредненных уравнений. Для преодоления этой проблемы предлагается и реализуется метод, основанный на присоединении к усредненной системе задачи Коши для *кинетического уравнения Тартара*, единственным решением которой является *H-мера Тартара.* Тем самым конструируется корректная замкнутая модель для описания движения гомогенной смеси, поскольку в терминах H-меры эффективные коэффициенты усредненных уравнений выражаются однозначно. Библиогр. 23.

Введение

Рассматривается математическая модель, описывающая нестационарное течение Стокса мелкодисперсной смеси вязких несжимаемых жидкостей с быстро осциллирующими начальными данными, происходящее в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ в течение промежутка времени $[0, T]$ ($T = \mathrm{const} < \infty$). При этом считается, что значения вязкости $\nu_\varepsilon(\vec{x}, t, \lambda)$ переносятся вдоль траекторий движения частиц со скоростью $\vec{v}_\varepsilon(\vec{x}, t, \lambda)$, где ε и λ — малые произвольные положительные параметры, характеризующие соответственно частоты осцилляций распределений вязкости и скорости и амплитуды отклонений этих распределений от постоянного значения вязкости $a_0 > 0$ и достаточно гладкого поля скоростей $\vec{v}^{(0)}(\vec{x}, t)$, определяющих некоторое «плавное невозмущенное» течение «средней» однородной вязкой жидкости. Существование решений у этой модели (задача A, формулируемая ниже в § 1.1) при фиксированных значениях параметров ε и λ гарантируется известными положениями теории уравнений Стокса и Навье — Стокса [1, 2].

Проводится гомогенизация рассматриваемой модели, т. е. предельный переход в уравнениях и краевых условиях при $\varepsilon \to 0$, и возникает проблема нахождения эффективных характеристик гомогенной среды, связанная с необходимостью предельного перехода в произведении $\nu_\varepsilon(\nabla_x \vec{v}_\varepsilon + (\nabla_x \vec{v}_\varepsilon)^{\mathrm{T}})$, в то время как ν_ε и $\nabla_x \vec{v}_\varepsilon$ сходятся всего лишь $*$-слабо в $L_\infty(\Omega \times [0, T])$ и слабо в $L_2(\Omega \times [0, T])$ соответственно. В современном состоянии теория гомогенизации позволяет преодолевать проблемы такого рода только тогда, когда среда имеет определенную упорядоченную микроструктуру: периодическую, квазипериодическую,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 00–01–00911, 01–01–06016).

случайную однородную и т. п. [3–6]. Смесь, описываемая решениями задачи А, подобной структурой не обладает.

В настоящей статье предлагается и реализуется метод приближенного определения эффективных характеристик мелкодисперсных гомогенных смесей, не имеющих упорядоченной структуры, основанный на использовании предложенной Л. Тартаром [7] концепции H-меры: наряду с исходной задачей А рассматривается приближенная задача В (формулируемая в п. 1.5), решения которой γ_ε и $\vec{u}_\varepsilon$ близки к решениям ν_ε и $\vec{v}_\varepsilon$ задачи А; в терминах H-меры, соответствующей последовательности $\{\gamma_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, приближенно с повышенной точностью аппроксимации определяется структура слабого предела $w\text{-}\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\gamma_\varepsilon(\nabla_x\vec{u}_\varepsilon+(\nabla_x\vec{u}_\varepsilon)^{\mathrm{т}})$. Как следствие конструируется система приближенных гомогенных уравнений, в рамках которой H-мера является неизвестной, подлежащей определению. Наконец, полученная система замыкается добавлением к ней макроскопического, т. е. не содержащего параметр ε, эволюционного уравнения Тартара (см. п. 1.3 и формулу (1.28)), единственным решением которого служит H-мера. Итогом проводимых действий является построение корректной замкнутой модели (модель Б, формулируемая в п. 1.4), решения которой с повышенной точностью аппроксимируют слабые пределы решений задачи В и поэтому с достаточно хорошим приближением описывают движение гомогенной смеси.

§ 1. Постановки задач и формулировки основных результатов

1.1. Нестационарное течение Стокса мелкодисперсной смеси с быстро осциллирующими начальными данными. Рассматривается следующая

Задача А. *В пространственно-временном цилиндре* $Q_T=\{(\vec{x},t)\in\Omega\times[0,T]\}$ (Ω — *ограниченная область в* $\mathbb{R}^2$ *с гладкой границей* $\partial\Omega$, $T=\mathrm{const}>0$) *требуется определить поле скоростей* $\vec{v}(\vec{x},t)=\{v_1(\vec{x},t),v_2(\vec{x},t)\}$, *вязкость* $\nu=\nu(\vec{x},t)$ *и давление* $p=p(\vec{x},t)$, *удовлетворяющие уравнениям*

$$\partial_t\vec{v}-\mathrm{div}_x(2\nu\mathbb{D}(\vec{v}))+\nabla_x p=\vec{f},\quad \mathrm{div}_x\,\vec{v}=0, \tag{1.1}$$

$$\partial_t\nu+\vec{v}\cdot\nabla_x\nu=0 \tag{1.2}$$

и начальным и граничным условиям

$$\vec{v}|_{\partial\Omega}=0,\quad \vec{v}(\vec{x},0)=\vec{v}_{0\varepsilon}(\vec{x},\lambda),\quad \nu(\vec{x},0)=\nu_{0\varepsilon}(\vec{x},\lambda). \tag{1.3}$$

Плотность жидкости считается постоянной (равной единице) во всей области Ω; начальные распределения скорости $\vec{v}_{0\varepsilon}(\vec{x},\lambda)$, вязкости $\nu_{0\varepsilon}(\vec{x},\lambda)$ и вектор массовых сил $\vec{f}$ — заданные функции, удовлетворяющие условиям

$$\vec{f}\in L_2(0,T;J_0^{2\alpha}(\Omega)),\ \text{где}\ \alpha\in(0,1/2)\ \text{— постоянная}, \tag{1.4}$$

$$\vec{v}_{0\varepsilon}(\vec{x},\lambda)=\vec{v}_0^{(0)}(\vec{x})+\lambda\vec{v}_{0\varepsilon}^{(1)}(\vec{x})+\lambda^2\vec{v}_{0\varepsilon}^{(2)}(\vec{x}), \tag{1.5}$$

$$\nu_{0\varepsilon}(\vec{x},\lambda)=a_0+\lambda b_{0\varepsilon}(\vec{x})+\lambda^2c_{0\varepsilon}(\vec{x}); \tag{1.6}$$

$$\left(\|\vec{v}_0^{(0)}\|_{J_0^{1+\alpha}(\Omega)},\|\vec{v}_{0\varepsilon}^{(1)}\|_{J(\Omega)},\|\vec{v}_{0\varepsilon}^{(2)}\|_{J(\Omega)}\right)\le C_0, \tag{1.7}$$

$$-c_-\le b_{0\varepsilon}(\vec{x}),c_{0\varepsilon}(\vec{x})\le c_+\quad \text{п. в. в}\ \Omega\quad \forall\varepsilon>0, \tag{1.8}$$

положительные постоянные a_0, C_0, c_-, c_+ не зависят от ε, причем $a_0 - 2c_- > 0$. При $\varepsilon \to 0$ имеют место предельные соотношения

$$\vec{v}_{0\varepsilon}^{(1)} \to \vec{v}_0^{(1)}, \quad \vec{v}_{0\varepsilon}^{(2)} \to \vec{v}_0^{(2)} \text{ сильно в } J(\Omega), \tag{1.9}$$

$$b_{0\varepsilon} \to b_0 \equiv \text{const}, \quad c_{0\varepsilon} \to c_0 \quad *\text{-слабо в } L_\infty(\Omega). \tag{1.10}$$

Малые положительные параметры ε и λ характеризуют соответственно явления быстрых осцилляций начальных данных и малую амплитуду отклонений этих осцилляций от гладкого «невозмущенного» состояния $\{\vec{v}_0^{(0)}(\vec{x}), \nu_0^{(0)}(\vec{x}) \equiv a_0\}$.

Решение задачи A понимается в смысле следующего определения.

Определение 1.1. *Слабым решением* задачи A называется пара функций $\vec{v}_\varepsilon(\vec{x}, t, \lambda)$, $\nu_\varepsilon(\vec{x}, t, \lambda)$ таких, что $\nu_\varepsilon \in L_\infty(Q_T)$, $\vec{v}_\varepsilon \in L_2(0, T; J_0^1(\Omega))$, $\partial_t \vec{v}_\varepsilon \in L_2(0, T; J^{-1}(\Omega))$, для которых справедливы равенства

$$\partial_t \vec{v}_\varepsilon - \operatorname{div}_x(2\nu_\varepsilon \mathbb{D}(\vec{v}_\varepsilon)) = \vec{f}, \tag{1.11}$$

$$\partial_t \nu_\varepsilon + \vec{v}_\varepsilon \cdot \nabla_x \nu_\varepsilon = 0, \tag{1.12}$$

$$\vec{v}_\varepsilon|_{t=0} = \vec{v}_{0\varepsilon}, \quad \nu_\varepsilon|_{t=0} = \nu_{0\varepsilon}. \tag{1.13}$$

В формулах (1.1)–(1.13) и далее в статье используются обозначения

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \nabla_x \nu = \{\partial_1 \nu, \partial_2 \nu\},$$

$$\operatorname{div}_x \vec{v} = \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2, \quad \mathbb{D}_{ij}(\vec{v}) = (\partial_i v_j + \partial_j v_i)/2, \quad \operatorname{div} A = \left\| \sum_{i=1}^{2} \partial_i A_{ij} \right\|_{j=1,2},$$

где A — 2×2-матрица, $\mathbb{D}_{ij}(\vec{v})$ — компоненты тензора скоростей деформации. Банаховы пространства $J(\Omega)$, $J_0^k(\Omega)$ ($k \in \mathbb{R}^+$) суть замыкания множества бесконечно гладких соленоидальных финитных в Ω функций по нормам пространств Лебега $L_2(\Omega)$ и Соболева $W_2^k(\Omega)$ соответственно. Через $J^{-1}(\Omega)$ обозначено пространство, сопряженное с $J_0^1(\Omega)$. В определении 1.1 и далее в статье все дифференциальные уравнения понимаются в смысле теории распределений. Напомним, что если $\vec{v}$ принадлежит пространству $L_2(0, T; J_0^1(\Omega))$ и $\partial_t \vec{v}$ — пространству $L_2(0, T; J^{-1}(\Omega))$, то корректно считать, что $\vec{v} \in C([0, T]; J(\Omega))$ [2, гл. III, § 1, лемма 1.2]. Отсюда и из уравнения (1.2) следует, что если $\nu(\vec{x}, t)$ — часть слабого решения задачи A, то $\nu \in C([0, T], L_q(\Omega))$, где показатель $q < +\infty$ произволен [8, гл. II, следствие II.2]. Значит, следы функций $\vec{v}$ и ν на поверхности $\{\vec{x} \in \Omega, t = 0\}$ определены, и равенства в (1.13) имеют ясный смысл.

Справедливость следующего предложения устанавливается известными методами теории уравнений Навье — Стокса [2, гл. III, § 2, 3; 1, гл. III, § 2].

Предложение 1.2. *Существует слабое решение задачи* A. *При этом выполняются оценки*

$$\sup_{t \in [0,T]} \|\vec{v}_\varepsilon(t)\|_{J(\Omega)} + \|\vec{v}_\varepsilon\|_{L_2(0,T;J_0^1(\Omega))} + \|\partial_t \vec{v}_\varepsilon\|_{L_2(0,T;J^{-1}(\Omega))} \le C_1, \tag{1.14}$$

$$a_0 - 2c_- \le \nu_\varepsilon(\vec{x}, t, \lambda) \le a_0 + 2c_+ \text{ п. в. в } Q_T, \tag{1.15}$$

где C_1 — постоянная, не зависящая от ε и λ.

1.2. Предельные средние физические характеристики движения гомогенной жидкости. В силу оценок (1.14), (1.15) и теоремы о компактности из [2, гл. III, § 2.2] из последовательности решений $\{\vec{v}_\varepsilon(\vec{x},t,\lambda),\ \nu_\varepsilon(\vec{x},t,\lambda)\}_{\varepsilon>0}$ при любом $\lambda<1$ можно выбрать сходящуюся при $\varepsilon\to 0$ подпоследовательность со свойствами

$$\vec{v}_\varepsilon \to \vec{v}_* \quad \text{слабо в } L_2(0,T;J_0^1(\Omega)),\ \text{сильно в } L_2(0,T;J(\Omega)), \tag{1.16}$$

$$\partial_t\vec{v}_\varepsilon \to \partial_t\vec{v}_* \quad \text{слабо в } L_2(0,T;J^{-1}(\Omega)), \tag{1.17}$$

$$\nu_\varepsilon \to \nu_* \quad *\text{-слабо в } L_\infty(Q_T). \tag{1.18}$$

Векторное поле $\vec{v}_*=\vec{v}_*(\vec{x},t,\lambda)$ и функция $\nu_*=\nu_*(\vec{x},t,\lambda)$ описывают предельный режим движения жидкости, возникающий при стремлении частоты осцилляций начальных данных к бесконечности. В этом смысле $\vec{v}_*(\vec{x},t,\lambda)$ и $\nu_*(\vec{x},t,\lambda)$ — это средние физические характеристики движения гомогенной смеси, начальное состояние которой определяется распределениями

$$\vec{v}_*|_{t=0}=\vec{v}_0^{(0)}+\lambda\vec{v}_0^{(1)}+\lambda^2\vec{v}_0^{(2)}, \quad \nu_*|_{t=0}=a_0+\lambda b_0+\lambda^2 c_0. \tag{1.19}$$

Из дальнейших рассуждений в настоящей работе будет видно, что $\vec{v}_*(\vec{x},t,\lambda)$ и $\nu_*(\vec{x},t,\lambda)$ удовлетворяют соотношениям вида

$$\partial_t\vec{v}_*-\operatorname{div}_x(\mathbb{M}_*:\nabla_x\vec{v}_*)=\vec{f}, \quad \partial_t\nu_*+\vec{v}_*\cdot\nabla_x\nu_*=0, \tag{1.20}$$

где

$$(\mathbb{M}_*:\nabla_x\vec{v}_*)_{ik}=\sum_{j,l=1}^{2}M_*^{ijkl}\partial_j v_l, \quad i,k=1,2.$$

Коэффициенты $\mathbb{M}_*^{ijkl}=\mathbb{M}_*^{ijkl}(\vec{x},t,\lambda)$ называются в механике компонентами *тензора эффективной вязкости* $\mathbb{M}_*$. Как отмечено во введении, явный вид $\mathbb{M}_*$ не известен, и, значит, уравнения (1.20), и начальные условия (1.19) не образуют замкнутой модели для описания динамики гомогенной смеси.

Основным результатом статьи является построение корректной замкнутой модели, решение которой с высокой точностью аппроксимирует слабые пределы

$$\vec{v}_*(\vec{x},t,\lambda)=w\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0}\vec{v}_\varepsilon(\vec{x},t,\lambda), \quad \nu_*(\vec{x},t,\lambda)=w\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0}\nu_\varepsilon(\vec{x},t,\lambda).$$

Конструкция искомой модели основана на использовании оригинальной идеи Тартара, предложившего концепцию H-меры — неотрицательной борелевской меры, которая содержит информацию о предельном режиме, возникающем при стремлении ε к нулю.

1.3. Определение H-меры Тартара. Уравнение Тартара. Рассмотрим некоторую последовательность ρ_ε, сходящуюся к нулю $*$-слабо в $L_\infty(Q_T)$. Выделяя, если необходимо, подпоследовательность, определим при п. в. $t\in[0,T]$ отображение μ_t функций из множества $\{a\varphi_1\varphi_2 \mid a\in C(S^1),\varphi_1,\varphi_2\in C_0(\Omega)\}$ в $\mathbb{R}$ посредством равенства

$$\langle\mu_t,a\varphi_1\varphi_2\rangle=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\Omega \varphi_1\rho_\varepsilon\mathscr{A}[\varphi_2\rho_\varepsilon]\,d\vec{x}, \tag{1.21}$$

в котором $\mathscr{A}:\ L_2(\mathbb{R}^2)\to L_2(\mathbb{R}^2)$ — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка с символом $a\in C(S^1)$, где S^1 — единичная окружность в $\mathbb{R}^2$. Напомним, что в терминах преобразования Фурье

$$\mathscr{F}[u](\vec{\xi})=\int\limits_{\mathbb{R}^2}\exp(2\pi i\vec{x}\cdot\vec{\xi})u(\vec{x})\,d\vec{x},$$

оператор $\mathscr{A}$ определяется по формуле $\mathscr{F}[\mathscr{A}[u]](\vec{\xi}) = a(\vec{\xi}/|\vec{\xi}|)\mathscr{F}[u](\vec{\xi})$ и равенство (1.21) в силу тождества Парсеваля имеет вид

$$\langle \mu_t, a\varphi_1\varphi_2\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \mathscr{F}[\varphi_1\rho_\varepsilon](\vec{\xi})a(\vec{\xi}/|\vec{\xi}|)\overline{\mathscr{F}[\varphi_2\rho_\varepsilon](\vec{\xi})}\,d\vec{\xi}. \tag{1.22}$$

Здесь и далее функции, определенные только при $\vec{x}\in\Omega$ и стоящие под знаком интеграла по всему пространству $\mathbb{R}^2$, считаются равными нулю на $\mathbb{R}^2\setminus\overline{\Omega}$.

Так как линейная оболочка множества функций $\{\varphi_1\varphi_2 a\}$ плотна в $C_0(\Omega\times S^1)$, то, как показано в [7, § 1], эта формула определяет при п. в. $t\in[0,T]$ неотрицательную борелевскую меру на $\Omega\times S^1$, называемую *H-мерой, ассоциированной с выбранной подпоследовательностью* $\rho_\varepsilon\to 0$.

Замечание 1.3. Понятие H-меры было предложено также в [9], но под другим названием: «микролокальная мера дефекта» (MDM).

В [10] установлено, что H-мера μ_t является естественным продолжением некоторого отображения $\nu_t\in L_{2,\mathrm{w}}(\Omega, M(S^1))$ в пространство борелевских мер на $\Omega\times S^1$ в том смысле, что для любой функции $\varphi\in L_2(\Omega, C(S^1))$ при почти всех $t\in[0,T]$ справедливо равенство

$$\langle\mu_t,\varphi\rangle = \int\limits_{\Omega} d\vec{x}\int\limits_{S^1}\varphi(\vec{x},y)d\nu_{t,x}(y),$$

что можно обозначить как $d\mu_t(\vec{x},y) = d\vec{x}d\nu_{t,x}(y)$. Отображение ν как обобщенная функция от $t,\vec{x},y$ принадлежит множеству $L_\infty(0,T;L_{2,w}(\Omega, M_+(S^1)))$.

Через $M_+(S^1)$ обозначено множество неотрицательных мер из пространства $M(S^1)$, сопряженного с пространством $C(S^1)$. Норма в $M(S^1)$ определяется для любого $\tau\in M(S^1)$ посредством равенства

$$\|\tau\|_{M(S^1)} = \sup_{\|f\|_{C(S^1)}\le 1}\int\limits_{S^1} f(y)\,d\tau(y)$$

[11, гл. III, § 1.6]. Через $L_{2,w}(\Omega, M_+(S^1))$ обозначено множество слабо измеримых относительно меры Лебега отображений $\vec{x}\to\tau_x$ множества Ω в $M_+(S^1)$. Норма в $L_{2,w}(\Omega, M(S^1))$ определяется следующим образом [12, гл. III, определение 2.7]:

$$\|\tau\|^2_{L_{2,w}(\Omega,M(S^1))} = \int\limits_{\Omega}\|\tau_x\|^2_{M(S^1)}\,d\vec{x}.$$

Предположим, что рассматриваемая последовательность $\{\rho_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ служит решением задачи Коши для уравнения переноса вида

$$\partial_t\rho_\varepsilon + \vec{w}\cdot\nabla_x\rho_\varepsilon = 0,\quad \rho_\varepsilon|_{t=0} = \rho_{0\varepsilon}, \tag{1.23}$$

где $\vec{w} = \{w_1, w_2\}$ — заданное класса $C^1(Q_T)$ финитное в Ω соленоидальное (т. е. $\operatorname{div}_x\vec{w} = 0$) векторное поле, $\{\rho_{0\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ — последовательность данных Коши, которая $*$-слабо сходится к нулю в $L_\infty(\Omega)$ при $\varepsilon\to 0$. Аналогично [7, теорема 3.4] устанавливается, что семейство H-мер $\{\mu_t\}$, ассоциированных с последовательностью $\{\rho_\varepsilon(\vec{x},t)\}$ и зависящих от t как от параметра, служит решением уравнения

$$\int\limits_0^T\langle\mu_t, \partial_t\Phi + \{w_1\xi_1 + w_2\xi_2, \Phi\}\rangle\,dt + \langle\mu_t|_{t=0}, \Phi|_{t=0}\rangle = 0, \tag{1.24}$$

в котором $(t,\vec{x},\vec{\xi}) \in [0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^2$, $\Phi=\Phi(t,\vec{x},\vec{\xi}/|\vec{\xi}|)$ — произвольная пробная функция из класса $C^1([0,T]\times\Omega\times S^1)$, удовлетворяющая условию $\Phi|_{t=T}=0$; $\{\vartheta,\beta\}=\nabla_\xi\vartheta\cdot\nabla_x\beta-\nabla_x\vartheta\cdot\nabla_\xi\beta$ — скобка Пуассона. Заметим, что дифференцирование пробной функции Φ по ξ_i, $i=1,2$, в уравнении (1.24) не приводит к недоразумению, потому что скобка Пуассона в уравнении (1.24) имеет нулевой порядок по $\vec{\xi}$ и является функцией из класса $C^1[0,T]\times C(\Omega\times S^1)$, т. е. принадлежит области определения меры μ_t.

После параметризации единичной окружности S^1 с помощью угловой координаты y, $S^1=\{y(\operatorname{mod}2\pi)\}$, и замены переменных ξ_1, ξ_2 по формулам $\xi_1=r\cos y$, $\xi_2=r\sin y$, r — радиальная координата на плоскости, уравнение (1.24) принимает вид

$$\int_0^T \langle\mu_t,\partial_t\Phi+\operatorname{div}_x(\Phi\vec{w})+(Y:\nabla_x\vec{w})\partial_y\Phi\rangle\,dt+\langle\mu_t|_{t=0},\Phi|_{t=0}\rangle=0, \tag{1.25}$$

где

$$Y=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\sin 2y & \cos^2 y\\ -\sin^2 y & \frac{1}{2}\sin 2y\end{pmatrix},$$

$\Phi=\Phi(t,\vec{x},y)$ — пробная функция, $\Phi\in C^1([0,T]\times\Omega\times S^1)$, $\Phi|_{t=T}=0$.

В смысле теории распределений уравнение (1.25) эквивалентно линейному уравнению с частными производными первого порядка

$$\partial_t\mu_t+\vec{w}\cdot\nabla_x\mu_t+\partial_y(\mu_t Y:\nabla_x\vec{w})=0,\quad (t,\vec{x},y)\in(0,T)\times\Omega\times S^1. \tag{1.26}$$

Определение 1.4. Уравнение (1.26) называется *уравнением Тартара*.

В [10] точный вывод уравнения Тартара для H-меры получен при более слабых предположениях относительно гладкости $\vec{w}$, именно в предположении, что $\vec{w}\in L_2(0,T;J_0^2(\Omega))$. В [13] (результаты также анонсированы в [14]) доказана корректность задачи Коши для уравнения Тартара в классе неотрицательных борелевских мер.

Предложение 1.5. *Пусть $\vec{w}\in L_2(0,T;J_0^1(\Omega))$. Тогда для любой меры μ_0 такой, что $d\mu_0(\vec{x},y)=d\vec{x}d\nu_{0,x}(y)$, $\nu_0\in L_{2,w}(\Omega,M_+(S^1))$, задача Коши для уравнения (1.26) с данными Коши $\mu_t|_{t=0}=\mu_0$ имеет единственное решение, при этом $d\mu_t(\vec{x},y)=d\vec{x}d\nu_{t,x}(y)$, где $\nu\in L_\infty(0,T;L_{2,w}(\Omega,M_+(S^1)))$.*

1.4. Формулировка замкнутой гомогенной модели.

Модель Б. Требуется последовательно определить

(Б1) векторное поле $\vec{v}^{(0)}=\vec{v}^{(0)}(\vec{x},t)$, которое служит решением задачи о «невозмущенном» течении «средней» однородной жидкости

$$\partial_t\vec{v}^{(0)}-a_0\Delta_x\vec{v}^{(0)}=\vec{f},\quad \vec{v}^{(0)}\in L_2(0,T;J_0^{2+\alpha}(\Omega)),\quad \vec{v}^{(0)}|_{t=0}=\vec{v}_0^{(0)}; \tag{1.27}$$

(Б2) меру μ_t такую, что $d\mu_t(\vec{x},y)=d\vec{x}d\nu_{t,x}(y)$, $\nu\in L_\infty(0,T;L_{2,w}(\Omega,M_+(S^1)))$, которая служит решением задачи Коши для уравнения Тартара:

$$\partial_t\mu_t+\vec{v}^{(0)}\cdot\nabla_x\mu_t+\partial_y(\mu_t Y:\nabla_x\vec{v}^{(0)})=0,\quad \mu_t|_{t=0}=\mu_0, \tag{1.28}$$

где μ_0 — H-мера, ассоциированная с последовательностью $b_{0\varepsilon}-b_0$;

(Б3) функцию $\gamma=\gamma(\vec{x},t,\lambda)$, $\gamma\in L_\infty(Q_T)\cap C([0,T];L_q(\Omega))$ $\forall q\in[1,+\infty)$, которая служит решением задачи Коши для уравнения переноса:

$$\partial_t\gamma+\vec{v}^{(0)}\cdot\nabla_x\gamma=0,\quad \gamma|_{t=0}=a_0+\lambda b_0+\lambda^2c_0; \tag{1.29}$$

(Б4) векторное поле $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t, \lambda)$, которое служит решением задачи

$$\partial_t \vec{u} - \operatorname{div}_x(\Lambda \mathbb{D}(\vec{u}) + \mathbb{D}(\vec{u})\Lambda) = \vec{f}, \quad \vec{u} \in L_2(0, T; J_0^1(\Omega)), \tag{1.30}$$

$$\vec{u}|_{t=0} = \vec{v}_0^{(0)} + \lambda \vec{v}_0^{(1)} + \lambda^2 \vec{v}_0^{(2)}, \tag{1.31}$$

где

$$\Lambda_{ij} = \delta_{ij}\gamma - \lambda^2 a_0^{-1} \int\limits_{S^1} Y_{1ij}\, d\nu_{t,x}(y), \quad Y_1 = \begin{pmatrix} \cos^2 y & \frac{1}{2}\sin 2y \\ \frac{1}{2}\sin 2y & \sin^2 y \end{pmatrix},$$

δ_{ij} — символ Кронекера.

Решением модели Б называется тройка $\{\mu_t, \gamma, \vec{u}\}$. В определении 2×2-матрицы Λ использовано представление H-меры μ_t в виде декомпозиции $d\mu_t(\vec{x}, y) = d\vec{x} d\nu_{t,x}(y)$. Соответственно уравнение (1.30) понимается в смысле интегрального равенства

$$\int\limits_{Q_T} \vec{u} \cdot \partial_t \vec{\varphi}\, d\vec{x}dt + \int\limits_{\Omega} \vec{u}(\vec{x}, 0) \cdot \vec{\varphi}(\vec{x}, 0)\, d\vec{x} - \int\limits_{Q_T} \gamma \mathbb{D}(\vec{u}) : \mathbb{D}(\vec{\varphi})\, d\vec{x}dt$$

$$+ \frac{\lambda^2}{a_0} \int\limits_0^T \Bigg(\int\limits_{\Omega \times S^1} (Y_1 \mathbb{D}(\vec{u}) + \mathbb{D}(\vec{u}) Y_1) : \mathbb{D}(\vec{\varphi})\, d\mu_t(\vec{x}, y) \Bigg) dt + \int\limits_{Q_T} \vec{f} \cdot \vec{\varphi}\, d\vec{x}dt = 0, \tag{1.32}$$

где $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(\vec{x}, t)$ — достаточно гладкая пробная функция, $\vec{\varphi}|_{t=T} = 0$.

1.5. Формулировка приближенной модели. В § 2 модель Б будет построена как результат процесса гомогенизации следующей модели по параметру ε.

Задача В. Требуется последовательно определить

(В1) функцию $\gamma_\varepsilon = \gamma_\varepsilon(\vec{x}, t, \lambda)$, $\gamma_\varepsilon \in L_\infty(Q_T) \cap C([0, T]; L_q(\Omega))$ $\forall q \in [1, +\infty)$, которая служит решением задачи Коши для уравнения переноса:

$$\partial_t \gamma_\varepsilon + \vec{v}^{(0)} \cdot \nabla_x \gamma_\varepsilon = 0, \quad \gamma_\varepsilon|_{t=0} = a_0 + \lambda b_{0\varepsilon} + \lambda^2 c_{0\varepsilon}, \tag{1.33}$$

где $\vec{v}^{(0)}$ — решение задачи (Б1);

(В2) векторное поле $\vec{u}_\varepsilon = \vec{u}_\varepsilon(\vec{x}, t, \lambda)$, которое служит решением задачи

$$\partial_t \vec{u}_\varepsilon - \operatorname{div}_x(2\gamma_\varepsilon \mathbb{D}(\vec{u}_\varepsilon)) = \vec{f}, \quad \vec{u}_\varepsilon \in L_2(0, T; J_0^1(\Omega)), \tag{1.34}$$

$$\vec{u}_\varepsilon|_{t=0} = \vec{v}_0^{(0)} + \lambda \vec{v}_{0\varepsilon}^{(1)} + \lambda^2 \vec{v}_{0\varepsilon}^{(2)}. \tag{1.35}$$

Пара $\{\gamma_\varepsilon, \vec{u}_\varepsilon\}$ называется *решением задачи* В.

1.6. Корректность и свойства аппроксимации. Далее описывается построение модели Б и устанавливается справедливость следующих теорем.

Теорема 1.6. *При всех значениях λ, меньших некоторого $\lambda_{**} \in (0, 1)$, у модели* Б *существует единственное решение.*

Точное значение λ_{**} будет установлено в процессе доказательства.

Теорема 1.7. *Пусть $\{\vec{v}_*, \nu_*\}$ — слабый предел решений задачи* А*; $\vec{u}$, γ — функции, совместно с μ_t составляющие решение модели* Б*. Тогда при $\lambda \to 0$*

$$\|\vec{v}_* - \vec{u}\|_{L_2(0,T;J_0^1(\Omega))} + \|\partial_t \vec{v}_* - \partial_t \vec{u}\|_{L_2(0,T;J^{-1}(\Omega))} = O(\lambda^2), \tag{1.36}$$

$$\|\nu_* - \gamma\|_{C([0,T];L_q(\Omega))} = o(\lambda^2) \quad \forall q \in [1, +\infty). \tag{1.37}$$

Теорема 1.8. *Пусть $\{\vec{u}_*, \gamma_*\}$ — слабый предел решений задачи* В*; $\vec{u}$, γ — функции, совместно с μ_t составляющие решение модели* Б*. Тогда*

$$\gamma_*(\vec{x}, t) = \gamma(\vec{x}, t) \quad \textit{п. в. в } Q_T, \tag{1.38}$$

$$\|\vec{u}_* - \vec{u}\|_{L_2(0,T;J_0^1(\Omega))} + \|\partial_t \vec{u}_* - \partial_t \vec{u}\|_{L_2(0,T;J^{-1}(\Omega))} = O(\lambda^3) \quad \textit{при } \lambda \to 0. \tag{1.39}$$

§ 2. Построение модели Б

2.1. Корректность задачи В.

Предложение 2.1. *При любых фиксированных* $\varepsilon, \lambda > 0$ *задача* В *имеет единственное решение. Это решение удовлетворяет оценкам* (1.14), (1.15), *в которых на местах* $\vec{v}_\varepsilon$ *и* ν_ε *фигурируют* $\vec{u}_\varepsilon$ *и* γ_ε *соответственно.*

Доказательство. Подзадача (Б1) однозначно разрешима [15, гл. IV, § 2]. Подзадача (В1), в формулировке которой $\vec{v}^{(0)}$ — решение подзадачи (Б1) — считается заданной функцией, также однозначно разрешима [8, следствие II.1]. Наконец, считая решение γ_ε подзадачи (В1) заданной в формулировке подзадачи (В2) функцией, устанавливаем однозначную разрешимость подзадачи (В2) рассуждениями, аналогичными проведенным в [2, гл. III, § 1.2–1.4]. Оценки для решений задачи В устанавливаются точно так же, как оценки для решений задачи А.

Замечание 2.2. Изложенное выше доказательство разрешимости подзадачи (В1) служит также обоснованием разрешимости подзадачи (Б3). Таким образом, в силу предложений 1.5 и 2.1 частично установлена теорема 1.6, а именно доказана разрешимость подзадач (Б1)–(Б3).

2.2. Усреднение задачи В. В силу оценок вида (1.14), (1.15) и теоремы о компактности из [2, гл. III, § 2.2] из последовательности решений задачи В можно выбрать подпоследовательность, слабо сходящуюся при $\varepsilon \to 0$ к некоторому пределу $\{\gamma_*, \vec{u}_*\}$, такую, что

$$\vec{u}_\varepsilon \to \vec{u}_* \quad \text{слабо в } L_2\bigl(0,T;J_0^1(\Omega)\bigr), \text{ сильно в } L_2(0,T;J(\Omega)), \tag{2.1}$$

$$\partial_t \vec{u}_\varepsilon \to \partial_t \vec{u}_* \quad \text{слабо в } L_2(0,T;J^{-1}(\Omega)), \tag{2.2}$$

$$\gamma_\varepsilon \to \gamma_* \quad *\text{-слабо в } L_\infty(Q_T). \tag{2.3}$$

Согласно теории G-сходимости параболических дифференциальных операторов (см. работу [16], в которой распространены на случай векторнозначных операторов результаты из [17, теоремы 13–16], доказанные в [17] для скалярнозначных операторов) дополнительно имеет место предельное соотношение

$$2\gamma_\varepsilon \mathbb{D}(\vec{u}_\varepsilon) \to \mathbb{X}_* : \nabla_x \vec{u}_* \quad \text{слабо в } L_2(Q_T), \tag{2.4}$$

где $\mathbb{X}_* \in L_\infty(Q_T)$ — тензор эффективной вязкости, удовлетворяющий оценкам

$$\bigl|\mathbb{X}_*^{ijkl}(\vec{x},t,\lambda)\bigr| \le C_2 \quad \text{п. в. в } Q_T, \tag{2.5}$$

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k,l=1}^{2} \mathbb{X}_*^{ijkl}(\vec{x},t,\lambda)\partial_j\varphi_l(\vec{x})\partial_i\varphi_k(\vec{x})\,d\vec{x} \ge C_k^2(\Omega)(a_0 - \lambda c_- - \lambda^2 c_-)\|\vec{\varphi}\|^2_{J_0^1(\Omega)} \tag{2.6}$$

при п. в. $t \in [0,T]$ для любых $\vec{\varphi} \in J_0^1(\Omega)$, где C_2 — константа, зависящая только от геометрии области Ω и постоянных a_0, c_-, c_+; $C_k(\Omega)$ — константа из неравенства Корна $\|\vec{\varphi}\|_{J_0^1(\Omega)} \le C_k(\Omega)\|\mathbb{D}(\vec{\varphi})\|_{2,\Omega}$ $\forall \vec{\varphi} \in J_0^1(\Omega)$ [18, гл. III, § 3.2] (здесь и далее $\|\mathbb{D}(\vec{\varphi})\|^2_{2,\Omega} = \int\limits_\Omega |\mathbb{D}(\vec{\varphi})|^2 d\vec{x}$, $|\mathbb{D}(\vec{\varphi})|^2 = \mathbb{D}(\vec{\varphi}) : \mathbb{D}(\vec{\varphi})$). Итак, установлено

Предложение 2.3. *Слабые пределы* $\{\gamma_*, \vec{u}_*\}$ *последовательности решений задачи* В *и тензор эффективной вязкости* $\mathbb{X}_*$ *удовлетворяют равенствам*

$$\partial_t \vec{u}_* - \operatorname{div}_x(\mathbb{X}_* : \nabla_x \vec{u}_*) = \vec{f}, \quad \vec{u}_*|_{t=0} = \vec{v}_0^{(0)} + \lambda\vec{v}_0^{(1)} + \lambda^2\vec{v}_0^{(2)}; \tag{2.7}$$

$$\partial_t \gamma_* + \vec{v}^{(0)} \cdot \nabla_x \gamma_* = 0, \quad \gamma_*|_{t=0} = a_0 + \lambda b_0 + \lambda^2 c_0. \tag{2.8}$$

Замечание 2.4. Аналогично устанавливаются равенства (1.20).

2.3. Лемма об асимптотических разложениях.

Лемма 2.5. *При всех λ, меньших чем $\lambda_* \overset{\mathrm{def}}{=} (1+32a_0^{-1}[\max\{c_-,c_+\}]^2)^{-1/2}$,*

(а) *решения задачи* В *и слабые пределы $\{\gamma_*, \vec{u}_*\}$ последовательности решений задачи* В *допускают представления в виде*

$$\gamma_\varepsilon(\vec{x},t,\lambda) = a_0 + \lambda\gamma_\varepsilon^{(1)}(\vec{x},t) + \lambda^2\gamma_\varepsilon^{(2)}(\vec{x},t), \tag{2.9}$$

$$\vec{u}_\varepsilon(\vec{x},t,\lambda) = \vec{v}^{(0)}(\vec{x},t) + \lambda\vec{u}_\varepsilon^{(1)}(\vec{x},t) + \lambda^2\vec{u}_\varepsilon^{(2)}(\vec{x},t) + \sum_{r\geq 3}\lambda^r\vec{u}_\varepsilon^{(r)}(\vec{x},t), \tag{2.10}$$

$$\gamma_*(\vec{x},t,\lambda) = a_0 + \lambda b_0 + \lambda^2\gamma_*^{(2)}(\vec{x},t), \tag{2.11}$$

$$\vec{u}_*(\vec{x},t,\lambda) = \vec{v}^{(0)}(\vec{x},t) + \lambda\vec{u}_*^{(1)}(\vec{x},t) + \lambda^2\vec{u}_*^{(2)}(\vec{x},t) + \sum_{r\geq 3}\lambda^r\vec{u}_*^{(r)}(\vec{x},t), \tag{2.12}$$

где

$$\gamma_*^{(2)} = w\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0}\gamma_\varepsilon^{(2)}, \quad \vec{u}_*^{(r)} = w\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0}\vec{u}_\varepsilon^{(r)}, \ r\geq 1, \tag{2.13}$$

$$-c_- \leq \gamma_\varepsilon^{(1)}(\vec{x},t), \gamma_\varepsilon^{(2)}(\vec{x},t) \leq c_+ \quad \textit{при п. в. } (\vec{x},t)\in Q_T, \tag{2.14}$$

$$\|\vec{u}_\varepsilon^{(r)}\|_{L_2(0,T;J_0^1(\Omega))} \leq C_3\lambda_*^{2-r}, \quad r\geq 1, \tag{2.15}$$

при этом $\gamma_\varepsilon^{(1)}$, $\gamma_\varepsilon^{(2)}$, $\gamma_*^{(2)}$, $\vec{u}_\varepsilon^{(r)}$ определяются единственным образом, постоянная C_3 зависит только от C_0, a_0, c_-, c_+ и нормы правой части уравнения (1.34) *в $L_2(0,T;J^{-1}(\Omega))$;*

(б) *тензор эффективной вязкости $\mathbb{X}_*$ допускает аналитическое представление*

$$\mathbb{X}_*(\vec{x},t,\lambda) = \mathbb{X}_*^{(0)} + \lambda\mathbb{X}_*^{(1)} + \lambda^2\mathbb{X}_*^{(2)}(\vec{x},t) + \sum_{r\geq 3}\lambda^r\mathbb{X}_*^{(r)}(\vec{x},t), \tag{2.16}$$

причем для любой функции $\vec{\varphi}\in L_2(0,T;J_0^1(\Omega))$ справедливы соотношения

$$\mathbb{X}_*^{(0)} : \nabla_x\vec{\varphi} = 2a_0\mathbb{D}(\vec{\varphi}), \ \mathbb{X}_*^{(1)} : \nabla_x\vec{\varphi} = 2b_0\mathbb{D}(\vec{\varphi}), \ \|\mathbb{X}_*^{(2)} : \nabla_x\vec{\varphi}\|_{2,Q_T} \leq C_4\|\nabla_x\vec{\varphi}\|_{2,Q_T}, \tag{2.17}$$

где C_4 — константа, не зависящая от λ и выбора функции $\vec{\varphi}$.

Замечание 2.6. Тождества в (2.17) эквивалентны следующим:

$$\mathbb{X}_*^{(0)ijkl} = (\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ij}\delta_{lk})a_0, \quad \mathbb{X}_*^{(1)ijkl} = (\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ij}\delta_{lk})b_0, \quad i,j,k,l = 1,2.$$

Доказательство леммы 2.5. Равенства (2.9), (2.11), оценка (2.14) и первое из предельных соотношений в (2.13) устанавливаются посредством несложных рассуждений, основанных на линейности уравнения переноса (1.33), теореме существования и единственности и априорных оценках решений для него [8; 1, гл. III, § 1]. С целью обоснования остальных утверждений леммы 2.5 рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

Задача Г. Требуется определить вектор-функцию $\vec{w}_\varepsilon = \vec{w}_\varepsilon(\vec{x},t,\lambda)$ такую, что

$$\partial_t\vec{w}_\varepsilon - \operatorname{div}_x\big(2\big(a_0 + \lambda\gamma_\varepsilon^{(1)} + \lambda^2\gamma_\varepsilon^{(2)}\big)\mathbb{D}(\vec{w}_\varepsilon)\big) = \vec{g}, \quad \vec{w}_\varepsilon \in L_2\big(0,T;J_0^1(\Omega)\big), \tag{2.18}$$

$$\vec{w}_\varepsilon|_{t=0} = \vec{v}_0^{(0)} + \lambda\vec{v}_{0\varepsilon}^{(1)} + \lambda^2\vec{v}_{0\varepsilon}^{(2)}, \tag{2.19}$$

где $\vec{g}\in L_2(0,T;J^{-1}(\Omega))$ задана, $a_0 + \lambda\gamma_\varepsilon^{(1)} + \lambda^2\gamma_\varepsilon^{(2)}$ — решение подзадачи (В1).

Формальное асимптотическое решение (см. [4, гл. II]) задачи Г

$$\vec{w}_\varepsilon^{\text{ф.а.р.}}(\vec{x},t,\lambda) = \vec{w}^{(0)}(\vec{x},t) + \lambda\vec{w}_\varepsilon^{(1)}(\vec{x},t) + \lambda^2\vec{w}_\varepsilon^{(2)}(\vec{x},t) + \sum_{r\geq 3}\lambda^r\vec{w}_\varepsilon^{(r)}(\vec{x},t), \tag{2.20}$$

которое конструируется посредством последовательного решения задач

$$\partial_t \vec{w}^{(0)} - a_0 \Delta_x \vec{w}^{(0)} = \vec{g}, \quad \vec{w}^{(0)} \in L_2\big(0,T; J_0^1(\Omega)\big), \tag{2.21}$$

$$\vec{w}^{(0)}|_{t=0} = \vec{v}_0^{(0)}, \tag{2.22}$$

$$\partial_t \vec{w}_\varepsilon^{(1)} - a_0 \Delta_x \vec{w}_\varepsilon^{(1)} = \operatorname{div}_x\big(2\gamma_\varepsilon^{(1)} \mathbb{D}(\vec{w}^{(0)})\big), \quad \vec{w}_\varepsilon^{(1)} \in L_2\big(0,T; J_0^1(\Omega)\big), \tag{2.23}$$

$$\vec{w}_\varepsilon^{(1)}|_{t=0} = \vec{v}_{0\varepsilon}^{(1)}, \tag{2.24}$$

$$\partial_t \vec{w}_\varepsilon^{(2)} - a_0 \Delta_x \vec{w}_\varepsilon^{(2)} = \operatorname{div}_x\big(2\gamma_\varepsilon^{(2)} \mathbb{D}(\vec{w}^{(0)}) + 2\gamma_\varepsilon^{(1)} \mathbb{D}\big(\vec{w}_\varepsilon^{(1)}\big)\big), \ \vec{w}_\varepsilon^{(2)} \in L_2\big(0,T; J_0^1(\Omega)\big), \tag{2.25}$$

$$\vec{w}_\varepsilon^{(2)}|_{t=0} = \vec{v}_{0\varepsilon}^{(2)}, \tag{2.26}$$

$$\partial_t \vec{w}_\varepsilon^{(r)} - a_0 \Delta_x \vec{w}_\varepsilon^{(r)} = \operatorname{div}_x\big(2\gamma_\varepsilon^{(2)} \mathbb{D}\big(\vec{w}_\varepsilon^{(r-2)}\big) + 2\gamma_\varepsilon^{(1)} \mathbb{D}\big(\vec{w}_\varepsilon^{(r-1)}\big)\big), \ \vec{w}_\varepsilon^{(r)} \in L_2\big(0,T; J_0^1(\Omega)\big), \tag{2.27}$$

$$\vec{w}_\varepsilon^{(r)}|_{t=0} = 0, \quad r \geq 3, \tag{2.28}$$

является точным решением. Действительно, для функций $\vec{w}_\varepsilon^{(r)}$, $r \geq 1$, справедливо неравенство вида (2.1), которое устанавливается посредством последовательного оценивания $\big\|\mathbb{D}\big(\vec{w}_\varepsilon^{(1)}\big)\big\|_{2,Q_T}^2$ через $\big\|\mathbb{D}(\vec{w}^{(0)})\big\|_{2,Q_T}^2$, $\big\|\mathbb{D}\big(\vec{w}_\varepsilon^{(2)}\big)\big\|_{2,Q_T}^2$ через $\big\|\mathbb{D}\big(\vec{w}_\varepsilon^{(1)}\big)\big\|_{2,Q_T}^2, \dots, \big\|\mathbb{D}\big(\vec{w}_\varepsilon^{(r)}\big)\big\|_{2,Q_T}^2$ через $\big\|\mathbb{D}\big(\vec{w}_\varepsilon^{(r-1)}\big)\big\|_{2,Q_T}^2$ с помощью известной техники построения априорных оценок для решений уравнений Навье — Стокса [2, гл. III, § 1.3] и неравенства Корна. Из неравенства (2.15) и из неравенства Минковского следует, что ряд (2.20) сходится в $L_2\big(0,T; J_0^1(\Omega)\big)$. В свою очередь, из предложения 2.1 вытекает, что построенное решение задачи Г единственное.

Подзадача (B2) является частным случаем задачи Г, поэтому из (2.20) немедленно выводим представление (2.10) и оценку (2.15). Переходя к пределу в (2.10) при $\varepsilon \to 0$, устанавливаем равенство (2.12) и второе из предельных соотношений в (2.13). Итак, утверждение (а) леммы 2.5 доказано.

Перейдем к доказательству утверждения (б). Оно основано на том факте, что согласно теории G-сходимости [16, 17] тензор $\mathbb{X}_*$ определяется только семейством $\{\gamma_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ и начальными данными $\vec{w}_\varepsilon|_{t=0}$, причем единственным образом, и не зависит от выбора правой части $\vec{g}$ уравнения (2.18). Выберем (если необходимо) подпоследовательность из $\{\gamma_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ и перейдем в задаче Г к пределу при $\varepsilon \to 0$. Согласно теории G-сходимости имеем

$$2\gamma_\varepsilon \mathbb{D}(\vec{w}_\varepsilon) \to \mathbb{X}_* : \nabla_x \vec{w}_* \text{ слабо в } L_2(Q_T), \quad \vec{w}_\varepsilon \to \vec{w}_* \text{ слабо в } L_2(0,T; J_0^1(\Omega)). \tag{2.29}$$

В силу утверждения (а) функция $\vec{w}_*$ и свертка $\mathbb{X}_* : \nabla_x \vec{w}_*$ аналитичны по λ при п. в. $(\vec{x}, t) \in Q_T$. Вследствие этого, а также произвольности выбора $\vec{g}$ аналогично [19] устанавливается аналитичность тензора $\mathbb{X}_*(\vec{x}, t, \lambda)$, т. е. наличие представления вида $\mathbb{X}_*(\vec{x}, t, \lambda) = \sum\limits_{r=0}^{\infty} \lambda^r \mathbb{X}_*^{(r)}(\vec{x}, t)$.

Для завершения доказательства леммы рассмотрим задачу Г с данными

$$\vec{g} = \partial_t \vec{\varphi} - a_0 \Delta_x \vec{\varphi}, \tag{2.30}$$

где $\vec{\varphi}$ — произвольная функция такая, что

$$\vec{\varphi} \in L_2\big(0,T; J_0^1(\Omega)\big), \quad \partial_t \vec{\varphi} \in L_2(0,T; J^{-1}(\Omega)), \quad \vec{\varphi}|_{t=0} = \vec{v}_0^{(0)}.$$

Заметим, что в этом случае $\vec{w}^{(0)} = \vec{\varphi}$ согласно (2.21), (2.22). Вследствие соотношений (2.29) и асимптотических разложений вида (2.10), (2.12) имеем $\mathbb{X}_*^{(0)}$:

$\nabla_x\vec{\varphi} = 2a_0\mathbb{D}(\vec{\varphi})$, $\mathbb{X}_*^{(0)} : \nabla_x\vec{w}_*^{(1)} + \mathbb{X}_*^{(1)} : \nabla_x\vec{\varphi} = 2a_0\mathbb{D}(\vec{w}_*^{(1)}) + 2b_0\mathbb{D}(\vec{\varphi})$. Из этих равенств в силу произвольности $\vec{\varphi}$ вытекает справедливость равенств из (2.17). С учетом этого выводим

$$\mathbb{X}_*^{(2)} : \nabla_x\vec{\varphi} = 2c_0\mathbb{D}(\vec{\varphi}) + 2w\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0}\gamma_\varepsilon\mathbb{D}\big(\vec{w}_\varepsilon^{(1)}\big) - 2b_0\mathbb{D}\big(\vec{w}_*^{(1)}\big). \tag{2.31}$$

Отсюда и из энергетической оценки

$$\sup_\varepsilon\big\|\mathbb{D}\big(\vec{w}_\varepsilon^{(1)}\big)\big\|_{2,Q_T}^2 \leq 16a_0^{-1}[\max\{c_-, c_+\}]^2\|\mathbb{D}(\vec{\varphi})\|_{2,Q_T}^2$$

для решения задачи (2.23), (2.24) (получаемой с помощью упоминавшейся выше техники построения оценок для решений уравнений Навье — Стокса [2, гл. III, § 1.3]) следует неравенство в (2.17), в котором $C_4 \stackrel{\text{def}}{=} 2\max\{c_-, c_+\} + 16a_0^{-1/2}(\max\{c_-, c_+\})$.

2.4. Явная форма $\mathbb{X}_*^{(2)}(\vec{x}, t)$. Проблема определения явного вида тензора эффективной вязкости $\mathbb{X}_*(\vec{x}, t, \lambda)$ выходит за рамки применяемых в пп. 2.1, 2.2 методов теории G-сходимости. В настоящем пункте проводится исследование, использующее идею Тартара [7, § 4.2] об определении эффективных коэффициентов усредненных уравнений с помощью H-мер, и устанавливается явная форма $\mathbb{X}_*^{(2)}$ в терминах H-меры, ассоциированной с последовательностью $\{\gamma_\varepsilon^{(1)} - b_0\}_{\varepsilon>0}$.

Предложение 2.7. *Имеет место интегральное тождество*

$$\int\limits_{Q_T}(\mathbb{X}_*^{(2)} : \nabla_x\vec{\varphi}) : \Phi\, d\vec{x}dt = \int\limits_{Q_T}\gamma_*^{(2)}\mathbb{D}(\vec{\varphi}) : \Phi\, d\vec{x}dt - \frac{1}{a_0}\int\limits_0^T\Bigg(\int\limits_{\Omega\times S^1}(Y_1\mathbb{D}(\vec{\varphi}) + \mathbb{D}(\vec{\varphi})Y_1) : \Phi\, d\mu_t(\vec{x}, y)\Bigg)dt, \tag{2.32}$$

где $\Phi = \Phi(\vec{x}, t)$ — 2×2-матрица, компоненты которой — достаточно гладкие пробные функции, $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(\vec{x}, t)$ — достаточно гладкая пробная вектор-функция, μ_t — H-мера, ассоциированная с $\{\gamma_\varepsilon^{(1)} - b_0\}$.

Замечание 2.8. Из равенства (2.32) и представления H-меры μ_t в виде декомпозиции $d\mu_t(\vec{x}, y) = d\vec{x}d\nu_{t,x}(y)$ следует, что компоненты тензора $\mathbb{X}_*^{(2)}$ п. в. в Q_T имеют вид

$$\mathbb{X}_*^{(2)ijkl}(\vec{x}, t) = (\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ij}\delta_{lk})\gamma_*^{(2)}(\vec{x}, t) - (2a_0)^{-1}\int\limits_{S^1}[\delta_{il}Y_{1jk}(y) + \delta_{kl}Y_{1ij}(y) + \delta_{ij}Y_{1kl}(y) + \delta_{jk}Y_{1il}(y)]d\nu_{t,x}(y).$$

Доказательство предложения 2.7. Рассмотрим задачу Г, снабженную данными вида (2.30). Как и в доказательстве леммы 2.5, через $\vec{w}_\varepsilon$ обозначим решение этой задачи, которое в силу утверждения (a) леммы 2.5 имеет вид $\vec{w}_\varepsilon = \vec{\varphi} + \lambda\vec{w}_\varepsilon^{(1)} + \lambda^2\vec{w}_\varepsilon^{(2)} + \dots$. Определим структуру слабого предела w-$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\gamma_\varepsilon^{(1)}\mathbb{D}(\vec{w}_\varepsilon^{(1)})$ в терминах H-меры μ_t, ассоциированной с последовательностью $\{\gamma_\varepsilon^{(1)} - b_0\}$. Для этого применим преобразование Фурье по пространственным переменным к обеим частям равенства (2.23). Запишем эквивалентное в смысле теории распределений получающемуся соотношению интегральное равенство

$$\int_0^T dt \int_{\mathbb{R}^2} \mathscr{F}\big[\vec{w}_\varepsilon^{(1)}\big](\vec{\xi},t)\cdot\partial_t\vec{\Psi}(\vec{\xi},t)\,d\vec{\xi} - \int_{\mathbb{R}^2} \mathscr{F}\big[\vec{v}_{0\varepsilon}^{(1)}\big](\vec{\xi})\cdot\vec{\Psi}(\vec{\xi},0)\,d\vec{\xi}$$
$$+\int_0^T dt \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{j,k=1}^2 2\pi i\xi_j \mathscr{F}\big[2a_0\mathbb{D}_{jk}\big(\vec{w}_\varepsilon^{(1)}\big)+2\gamma_\varepsilon^{(1)}\mathbb{D}_{jk}(\vec{\varphi})\big](\vec{\xi},t)\Psi_k(\vec{\xi},t)\,d\vec{\xi}=0, \quad (2.33)$$

где $\vec{\Psi}$: $\mathbb{R}^2\times[0,T]\to\mathbb{R}^2$ — достаточно гладкая вектор-функция, $\vec{\Psi}(\vec{\xi},T)=0$.

Пусть $\vec{\psi}\in C^1(\Omega\times(0,T))$, $\vec{\psi}|_{t=T}=0$, $a\in C^1(S^1)$. Положим (пока формально) в (2.33) в качестве пробной функции $\vec{\Psi}_\varepsilon=|\vec{\xi}|^{-1}a(\vec{\xi}/|\vec{\xi}|)\overline{\mathscr{F}[(\gamma_\varepsilon^{(1)}-b_0)\vec{\psi}](\vec{\xi},t)}$ и применим (тоже формально) тождество Парсеваля. В силу равенства $\partial_t(\gamma_\varepsilon^{(1)}-b_0)=-\operatorname{div}_x(\vec{v}^{(0)}(\gamma_\varepsilon^{(1)}-b_0))$, которое элементарно вытекает из представления (2.9) и равенства (1.33), в результате вышеописанных действий выводим из равенства (2.33) интегральное тождество

$$0=2\pi\int_0^T dt\int_{\mathbb{R}^2}\vec{w}_\varepsilon^{(1)}\cdot(\mathscr{I}_1\circ\mathscr{A})\big[\big(\gamma_\varepsilon^{(1)}-b_0\big)\partial_t\vec{\psi}\big]\,d\vec{x}$$
$$-2\pi\int_0^T dt\int_{\mathbb{R}^2}\sum_{j,k=1}^2 w_{\varepsilon k}^{(1)}(\mathscr{R}_j\circ\mathscr{A})\big[v_j^{(0)}\big(\gamma_\varepsilon^{(1)}-b_0\big)\psi_k\big]\,d\vec{x}$$
$$+2\pi\int_0^T dt\int_{\mathbb{R}^2}\sum_{j,k=1}^2 w_{\varepsilon k}^{(1)}(\mathscr{I}_1\circ\mathscr{A})\big[v_j^{(0)}\big(\gamma_\varepsilon^{(1)}-b_0\big)\partial_j\psi_k\big]\,d\vec{x}-\int_{\mathbb{R}^2}\vec{v}_{0\varepsilon}^{(1)}(\mathscr{I}_1\circ\mathscr{A})[(b_{0\varepsilon}-b_0)\vec{\psi}(0)]\,d\vec{x}$$
$$+2\pi\int_0^T dt\int_{\mathbb{R}^2}\sum_{j,k=1}^2\big\{2a_0\mathbb{D}_{jk}\big(\vec{w}_\varepsilon^{(1)}\big)+2\big(\gamma_\varepsilon^{(1)}-b_0\big)\mathbb{D}_{jk}(\vec{\varphi})\big\}(\mathscr{R}_j\circ\mathscr{A})\big[\big(\gamma_\varepsilon^{(1)}-b_0\big)\psi_k\big]\,d\vec{x}$$
$$-2\pi\int_0^T dt\int_{\mathbb{R}^2}\sum_{j,k=1}^2 2b_0\mathbb{D}_{jk}(\vec{\varphi})(\mathscr{R}_j\circ\mathscr{A})\big[\big(\gamma_\varepsilon^{(1)}-b_0\big)\psi_k\big]\,d\vec{x}. \quad (2.34)$$

Здесь $\mathscr{A}$ — псевдодифференциальный оператор нулевого порядка с символом a, $\mathscr{R}_j$, $j=1,2$, — оператор Рисса (псевдодифференциальный оператор нулевого порядка с символом $i\xi_j/|\xi|$), $\mathscr{I}_1$ — потенциал Рисса, определенный по правилу $\mathscr{F}[\mathscr{I}_1[\Phi]](\vec{\xi})=(2\pi|\vec{\xi}|)^{-1}\mathscr{F}[\Phi](\vec{\xi})$ $\forall\Phi\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$ [20, гл. V, § 1.1]. Согласно теории псевдодифференциальных операторов нулевого порядка и потенциалов Рисса [20, гл. II, теорема 3; гл. V, теорема 1] и установленных выше в статье свойств регулярности входящих в подынтегральные выражения функций все интегралы в (2.34) определены. Следовательно, выбор $\vec{\Psi}_\varepsilon$ в качестве пробной функции законен, применение тождества Парсеваля оправдано и интегральное тождество (2.34) имеет смысл.

Из равенства (2.34) при $\varepsilon\to0$ в силу $*$-слабой сходимости $\gamma_\varepsilon^{(1)}$ к b_0 в $L_\infty(Q_T)$, сильной сходимости $\vec{w}_\varepsilon^{(1)}$ к $\vec{w}_*^{(1)}$ в $L_2(0,T;J(\Omega))$ и упомянутых выше свойств псевдодифференциальных операторов вытекает равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0} i\int\limits_0^T dt\int\limits_{\mathbb{R}^2}\sum_{j,k=1}^{2}\mathbb{D}_{jk}\big(\vec{w}_\varepsilon^{(1)}\big)(\mathscr{R}_j\circ\mathscr{A})\big[\big(\gamma_\varepsilon^{(1)}-b_0\big)\psi_k\big]\,d\vec{x}$$

$$=\int\limits_0^T\left\langle \mu_t,\ \sum_{j,k=1}^{2}\mathbb{D}_{jk}(\vec{\varphi})\psi_k\frac{1}{a_0}\frac{\xi_j}{|\vec{\xi}|}a(\vec{\xi}/|\vec{\xi}|)\right\rangle dt,$$

правая часть в котором представлена в терминах H-меры μ_t, ассоциированной с выбранной подпоследовательностью $\gamma_\varepsilon^{(1)}-b_0\xrightarrow{w}0$.

Полагаем в этом равенстве $\vec{\psi}_l=\mathbb{D}_{\cdot l}(\vec{\zeta})$ ($\vec{\zeta}\in C^1([0,T];C_0^1(\Omega))$ — произвольная пробная вектор-функция) и $a_l(\vec{\xi}/|\vec{\xi}|)=\xi_l/|\vec{\xi}|$ (т. е. $\mathscr{A}=-i\mathscr{R}_l$), $l=1,2$. После несложных технических преобразований заключаем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^T dt\int\limits_\Omega\big(\gamma_\varepsilon^{(1)}-b_0\big)\mathbb{D}\big(\vec{w}_\varepsilon^{(1)}\big):\mathbb{D}(\zeta)\,d\vec{x}$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_0^T\left\langle\mu_t,\ \sum_{j,k,l=1}^{2}\partial_j\varphi_l\partial_i\zeta_k\left\{\frac{\xi_j\xi_k}{a_0|\vec{\xi}|^2}\delta_{il}+\frac{\xi_l\xi_k}{a_0|\vec{\xi}|^2}\delta_{ij}+\frac{\xi_i\xi_j}{a_0|\vec{\xi}|^2}\delta_{kl}+\frac{\xi_i\xi_l}{a_0|\vec{\xi}|^2}\delta_{kj}\right\}\right\rangle dt$$

$$=-\frac{1}{a_0}\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega\times S^1}(Y_1\mathbb{D}(\vec{\varphi})+\mathbb{D}(\vec{\varphi})Y_1):\mathbb{D}(\vec{\zeta})\,d\mu_t(\vec{x},y)dt. \qquad (2.35)$$

В последнем равенстве y — угловая координата на единичной окружности. Напомним, что $\xi_1/|\vec{\xi}|=\cos y$, $\xi_2/|\vec{\xi}|=\sin y$. Из равенств (2.17), (2.31) и (3.35) следует справедливость интегрального тождества (2.32).

2.5. Отбрасывая в (2.16) слагаемые, содержащие неопределенные в силу леммы 2.5 и предложения 2.7 множители $\mathbb{X}_*^{(r)}$, $r\geq 3$, т. е. «отбрасывая хвост» у аналитического представления для тензора эффективной вязкости $\mathbb{X}_*(\vec{x},t,\lambda)$, получаем в точности формулировку подзадачи (Б4), в которой в силу замечаний 2.6 и 2.8 матрице Λ соответствует приближенный тензор эффективной вязкости $\tilde{\mathbb{X}}_*=\mathbb{X}_*^{(0)}+\lambda\mathbb{X}_*^{(1)}+\lambda^2\mathbb{X}_*^{(2)}$, т. е. $\tilde{\mathbb{X}}_*:\nabla_x\vec{\varphi}=\Lambda\mathbb{D}(\vec{\varphi})+\mathbb{D}(\vec{\varphi})\Lambda\ \forall\vec{\varphi}\in J_0^1(\Omega)$.

§ 3. Обоснование корректности и доказательство свойств аппроксимации модели Б

3.1. Доказательство теоремы 1.6. Напомним, что в силу замечания 2.2 подзадачи (Б1)–(Б3) однозначно разрешимы. Вследствие оценки из утверждения (б) леммы 2.5 соответствующий матрице Λ тензор $\widetilde{\mathbb{X}}_*$ при любом $\lambda<\lambda_{**}\stackrel{\text{def}}{=}(c_-^2(2C_4)^{-2}+a_0C_4^{-1})^{-1/2}-c_-(2C_4)^{-1}$ определяет при п. в. $(\vec{x},t)\in Q_T$ ограниченную положительно определенную квадратичную форму $\Phi\to(\widetilde{\mathbb{X}}_*:\Phi):\Phi$ (Φ — 2×2-матрица с компонентами из $\mathbb{R}$). В самом деле, ограниченность очевидна, а положительная определенность следует из двух неравенств: $(\widetilde{X}_*:\Phi):\Phi\geq(a_0-\lambda c_--\lambda^2C_4)|\Phi|^2$ при п. в. $(\vec{x},t)\in Q_T$ и $a_0-\lambda c_--\lambda^2C_4>0$ при $\lambda<\lambda_{**}$. Отсюда аналогично [2, гл. III, § 1.2–1.4] вытекает, что подзадача (Б4) имеет единственное решение.

3.2. Доказательство теоремы 1.8. Из изложенного в п. 2.5 вытекает, что для функции γ и вектор-функции $\vec{u}$, составляющих совместно с мерой μ_t решение модели Б, справедливо утверждение (а) леммы 2.5, причем члены асимптотических разложений γ и $\vec{u}$ вплоть до второго порядка малости по λ совпадают с аналогичными для слабых пределов решений задачи В: $\gamma^{(0)} = a_0$, $\gamma^{(1)} = b_0$, $\gamma^{(2)} = \gamma_*^{(2)}$, $\vec{u}^{(0)} = \vec{v}^{(0)}$, $\vec{u}^{(1)} = \vec{u}_*^{(1)}$, $\vec{u}^{(2)} = \vec{u}_*^{(2)}$. Таким образом, имеют место тождество (1.38) и представление

$$\vec{u} - \vec{u}_* = \sum_{r\geq 3} \lambda^r (\vec{u}^{(r)} - \vec{u}_*^{(r)}),$$

из которого в силу оценок вида (1.38), справедливых для $\vec{u}^{(r)}$ и $\vec{u}_*^{(r)}$, вытекает асимптотическое соотношение (1.39).

Замечание 3.1. Модель Б дает лучшую аппроксимацию слабых пределов решений задачи В по сравнению с какой-либо моделью, в формулировке которой не учитывается информация, содержащаяся в конструкции H-меры μ_t. Действительно, обозначим через $\vec{u}$ поле скоростей — решение предполагаемой модели (которую условно назовем «модель Д»), и на основании построений § 2, 3 заметим, что максимально достижимой точностью аппроксимации поля скоростей $\vec{u}_* = w\text{-}\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \vec{u}_\varepsilon$ для модели Д является второй порядок малости по λ, но не выше:

$$\begin{aligned}\|\vec{u}_* - \vec{U}\|_{L_2(0,T;J_0^1(\Omega))} + \|\partial_t \vec{u}_* - \partial_t \vec{U}\|_{L_2(0,T;J^{-1}(\Omega))} &= O(\lambda^2)\\ &\neq o(\lambda^2) \quad \text{при } \lambda \to 0.\end{aligned}$$

3.3. Доказательство теоремы 1.7. Повторяя рассуждения из доказательства леммы 2.5, для $\vec{v}_\varepsilon$, ν_*, $\vec{v}_*$ устанавливаем представления

$$\vec{v}_\varepsilon(\vec{x},t,\lambda) = \vec{v}^{(0)}(\vec{x},t) + \lambda \vec{v}_\varepsilon^{(1)}(\vec{x},t,\lambda) + \lambda^2 \vec{v}_\varepsilon^{(2)}(\vec{x},t,\lambda) + \lambda^3 \vec{v}_\varepsilon^{(3)}(\vec{x},t,\lambda) + \dots, \tag{3.1}$$

$$\nu_*(\vec{x},t,\lambda) = a_0 + \lambda b_0 + \lambda^2 \nu_*^{(2)}(\vec{x},t,\lambda), \tag{3.2}$$

$$\vec{v}_*(\vec{x},t,\lambda) = \vec{v}^{(0)}(\vec{x},t) + \lambda \vec{u}_*^{(1)}(\vec{x},t,\lambda) + \lambda^2 \vec{v}_*^{(2)}(\vec{x},t,\lambda) + \lambda^3 \vec{v}_*^{(3)}(\vec{x},t,\lambda) + \dots, \tag{3.3}$$

где $\nu_*^{(2)}$ удовлетворяет оценке вида (2.14), $\vec{v}_*^{(2)}$, $\vec{v}_*^{(3)}$ — оценкам вида (2.15), векторное поле $\vec{u}_*^{(1)}$ определено в утверждении (а) леммы 2.5. Рассматривая асимптотические представления (2.11), (2.12), (3.2), (3.3) и учитывая тождества $\gamma^{(2)} = \gamma_*^{(2)}$, $\vec{u}^{(1)} = \vec{u}_*^{(1)}$, получаем

$$\gamma - \nu_* = \lambda^2 (\gamma^{(2)} - \nu_*^{(2)}), \tag{3.4}$$

$$\vec{v}_* - \vec{u} = \lambda^2 (\vec{v}_*^{(2)} - \vec{u}_*^{(2)}) + \sum_{r\geq 3} \lambda^r (\vec{v}_*^{(r)} - \vec{u}_*^{(r)}). \tag{3.5}$$

Поскольку $\vec{v}_* \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} \vec{v}^{(0)}$ сильно в $L_2(0,T;J_0^1(\Omega))$, по теореме устойчивости для транспортных уравнений [8, теорема II.4] имеет место предельное соотношение

$$\gamma^{(2)} - \nu_*^{(2)} \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{сильно в } C([0,T], L_q(\Omega)) \ \forall q < +\infty. \tag{3.6}$$

Отсюда и из равенства (3.4) следует асимптотическое соотношение (1.37).

Наконец, асимптотическое соотношение (1.36) вытекает из представления (3.5) в силу оценок вида (2.15) для $\vec{v}_*^{(r)}$, $\vec{u}_*^{(r)}$ $(r \geq 2)$.

Приложение. Эквивалентная формулировка модели Б в случае периодической быстро осциллирующей начальной вязкости

В завершение настоящей статьи обратим внимание на то, как модель Б конкретизируется в случае, когда осцилляции начального распределения вязкости в формулировке задачи А (соответственно задачи В) имеют периодический характер:

$$\nu_\varepsilon(\vec{x},t,\lambda)|_{t=0} = \gamma_\varepsilon(\vec{x},t,\lambda)|_{t=0} = a_0 + \lambda B(\vec{x}/\varepsilon), \tag{4.1}$$

где $B \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $-c_- \le B(\vec{\theta}) \le c_+$ $\forall \vec{\theta} \in \mathbb{R}^2$, B — периодическая с периодом 1, т. е. $B(\vec{\theta}+\vec{e}_i) = B(\vec{\theta})$ $\forall \vec{\theta} \in \mathbb{R}^2$, $i=1,2$, $\vec{e}_1=(1,0)$, $\vec{e}_2=(0,1)$.

При произвольном выборе последовательности $\varepsilon_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ [6, теорема 0.2]

$$\gamma_{\varepsilon_k}|_{t=0} \to a_0 + \lambda\langle B\rangle \quad *\text{-слабо в } L_\infty(\Omega), \tag{4.2}$$

где $\langle B\rangle = \int\limits_{(0,1)\times(0,1)} B(\vec{\theta})\,d\vec{\theta}$. Решение задачи Коши для уравнения переноса (1.33) с начальными данными (4.1) имеет вид [1, § 3, лемма 1.1]

$$\gamma_\varepsilon = a_0 + \lambda B(\vec{X}(\vec{x},t)/\varepsilon), \tag{4.3}$$

где $\vec{X}(\vec{x},t) = \vec{V}(\tau,\vec{x},t)|_{\tau=0}$, $\vec{V}(\tau,\vec{x},t)$ — решение задачи Коши

$$\frac{d\vec{V}}{d\tau} = \vec{v}^{(0)}(\vec{V},\tau), \quad \vec{V}|_{\tau=t} = \vec{x}. \tag{4.4}$$

Вследствие (4.2) $\gamma_{\varepsilon_k} \underset{\varepsilon_k\to 0}{\longrightarrow} a_0 + \lambda\langle B\rangle$ $*$-слабо в $L_\infty(Q_T)$. В силу [9, предложение 1.5] H-мера, ассоциированная со слабо сходящейся к нулю последовательностью $\{B(\vec{X}(\vec{x},t)/\varepsilon_k) - \langle B\rangle\}$, вычисляется явно и имеет вид

$$\mu_t(\vec{x},y) = \sum_{\vec{p}\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0,0\}} |B_p|^2 \delta\left(y - \arccos\left\{\vec{p}\cdot\partial_{x_1}\vec{X} \Big/ \left(\sum_{i=1}^2 (\vec{p}\cdot\partial_{x_i}\vec{X})^2\right)^{1/2}\right\}\right), \tag{4.5}$$

т. е. для любой функции $\Phi(\vec{x},y)$ из класса $L_2(\Omega, C(S^1))$

$$\int\limits_{\Omega\times S^1} \Phi(\vec{x},y)d\mu_t(\vec{x},y)$$

$$= \int\limits_\Omega \sum_{\vec{p}\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0,0\}} |B_p|^2 \Phi\left(\vec{x}, \arccos\left\{\vec{p}\cdot\partial_{x_1}\vec{X} \Big/ \left(\sum_{i=1}^2 (\vec{p}\cdot\partial_{x_i}\vec{X})^2\right)^{1/2}\right\}\right) d\vec{x}. \tag{4.6}$$

В формулах (4.5), (4.6) $\vec{p}$ — мультииндекс (p_1,p_2), δ — дельта-функция Дирака, $B_p = \int\limits_{(0,1)\times(0,1)} B(\vec{\theta})e^{2\pi i\vec{p}\cdot\vec{\theta}}\,d\vec{\theta}$ — коэффициенты Фурье функции $B(\vec{\theta})$.

Из представления (4.5) следует, во-первых, что можно заменить в формулировке модели Б уравнение Тартара уравнением (4.4), которое позволяет определить всю информацию об эволюции H-меры, а во-вторых, что можно выразить эффективные коэффициенты Λ_{ij}, содержащиеся в формулировке модели Б, в явном виде в терминах функции $B(\vec{\theta})$. Таким образом, исходная модель Б приводится к виду, в котором не фигурирует понятие H-меры и в котором (подобно положениям классической теории усреднения периодических структур) имеет место непосредственная связь между формой слабо сходящейся последовательности осциллирующих распределений и формой предельных эффективных характеристик гомогенной среды.

Автор выражает признательность члену-корреспонденту РАН профессору П. И. Плотникову за многократные полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983.
2. *Темам Р.* Уравнения Навье — Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981.
3. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. М.: Физ. мат. лит., 1993.
4. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
5. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
6. *Allaire G.* Homogenization and two-scale convergence // SIAM J. Math. Anal. 1992. V. 23, N 6. P. 1482–1518.
7. *Tartar L.* H-measures, a new approach for studying homogenisation oscillations and concentration effects in partial differential equations // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 1990. V. 115. P. 193–230.
8. *DiPerna R. J., Lions P. L.* Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces // Invent. Math. 1989. V. 98. P. 511–547.
9. *Gérard P.* Microlocal defect measures // Commun. Partial Differential Equations. 1991. V. 16. P. 1761–1794.
10. *Саженков С. А.* Решения задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости с быстро осциллирующими начальными данными // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики, 1998. Вып. 113. С. 123–134.
11. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. М.: Наука, 1967.
12. *Málek J., Nečas J., Rokyta M., Ružička M.* Weak and measure-valued solutions to evolutionary PDEs. London: Chapman and Hall, 1996.
13. *Sazhenkov S. A.* Cauchy problems for Tartar equations // Proc. Roy. Soc. Edinburgh (to appear).
14. *Саженков С. А.* Обобщенные лагранжевы координаты в случае негладкого соленоидального поля скоростей // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики, 1999. Вып. 114. С. 74–77.
15. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
16. *Саженков С. А.* Об усреднении многомерных параболических дифференциальных операторов гидродинамики // Изв. Алтайского гос. ун-та. Барнаул, 2001. N1. С. 43–47. (Электронная версия: On-line ISSN 1561-9451, http://tbs.dcn-asu.ru/news/).
17. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* О G-сходимости параболических операторов // Успехи мат. наук. 1981. Т. 36, № 1. С. 11–58.
18. *Решетняк Ю. Г.* Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. Новосибирск: Наука, 1982.
19. *Murat F.* H-convergence // Séminaire d'analyse fonctionnelle et numérique de l'Université d'Alger. 1978. T. 77–78. P. 34.
20. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.

Статья поступила 14 октября 2000 г.

Саженков Сергей Александрович
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. Акад. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090
sazhenkov@hydro.nsc.ru