*Сибирский математический журнал*
*Ноябрь—декабрь, 2001. Том 42, № 6*

*УДК 512:519.4*

# О РАЗРЕШИМОСТИ ЭКВАЦИОНАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ ПОКРЫТИЙ МНОГООБРАЗИЙ ПОЛУГРУПП

**В. Ю. Попов**

**Аннотация:** Для произвольного собственного многообразия полугрупп $\mathfrak{X}$ существует многообразие полугрупп $\mathfrak{Y}$ такое, что выполняются следующие три условия: 1) $\mathfrak{Y}$ покрывает многообразие $\mathfrak{X}$, 2) если многообразие $\mathfrak{X}$ — конечно базируемое, то многообразие $\mathfrak{Y}$ — тоже конечно базируемое, 3) эквациональная теория многообразия $\mathfrak{X}$ разрешима тогда и только тогда, когда разрешима эквациональная теория многообразия $\mathfrak{Y}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольное многообразие полугрупп, заданное тождествами, зависящими от конечного числа переменных, все периодические группы которого локально конечны. Тогда выполняется одно из следующих двух условий: 1) все нильполугруппы из многообразия $\mathfrak{X}$ локально конечны, 2) многообразие $\mathfrak{X}$ включает подмногообразие $\mathfrak{Y}$ с неразрешимой эквациональной теорией, имеющее бесконечное множество покрывающих многообразий с неразрешимой эквациональной теорией. Библиогр. 24.

А. И. Мальцев в работе [1] построил конечно-базируемое многообразие квазигрупп с неразрешимой эквациональной теорией и поставил в сборнике [2] вопрос о существовании конечно базируемых многообразий полугрупп, групп и колец с неразрешимой эквациональной теорией. Положительный ответ на этот вопрос для полугрупп получен в [3], а для групп — в [4] (см. также [5]). Разрешимость эквациональной теории для произвольного конечно базируемого многообразия ассоциативных колец анонсирована в [6]. В работах [7–9] построены примеры конечно базируемых многообразий неассоциативных колец с неразрешимой эквациональной теорией. В [10] доказано, что существует последовательность конечно базируемых многообразий неассоциативных колец $\mathfrak{A}_1\subset\mathfrak{B}_1\subset\mathfrak{A}_2\subset\mathfrak{B}_2\subset\dots$ такая, что для всех $i$ эквациональная теория $\mathfrak{A}_i$ неразрешима, а эквациональная теория $\mathfrak{B}_i$ разрешима. Пример бесконечной убывающей последовательности конечно базируемых многообразий неассоциативных колец $\mathfrak{A}_1\supset\mathfrak{B}_1\supset\mathfrak{A}_2\supset\mathfrak{B}_2\supset\dots$ такой, что для всех $i$ эквациональная теория $\mathfrak{A}_i$ неразрешима, а эквациональная теория $\mathfrak{B}_i$ разрешима, приведен в [11]. Как отмечено в работе [12], существует бесконечная возрастающая последовательность конечно базируемых многообразий полугрупп $\mathfrak{A}_1\subset\mathfrak{B}_1\subset\mathfrak{A}_2\subset\mathfrak{B}_2\subset\dots$ такая, что для всех $i$ эквациональная теория многообразия $\mathfrak{A}_i$ и класса $\mathfrak{A}_i\cap\mathfrak{F}$ всех конечных полугрупп из многообразия $\mathfrak{A}_i$ неразрешима, а эквациональная теория многообразия $\mathfrak{B}_i$ и класса $\mathfrak{B}_i\cap\mathfrak{F}$ всех конечных полугрупп из многообразия $\mathfrak{B}_i$ разрешима. Там же отмечено, что существует и бесконечная убывающая последовательность многообразий, удовлетворяющая тем же условиям, т. е. бесконечная последовательность конечно базируемых многообразий полугрупп $\mathfrak{A}_1\supset\mathfrak{B}_1\supset\mathfrak{A}_2\supset\mathfrak{B}_2\supset\dots$ такая, что для всех $i$ эквациональная теория многообразия

$\mathfrak{A}_i$ и класса $\mathfrak{A}_i \cap \mathfrak{F}$ всех конечных полугрупп из многообразия $\mathfrak{A}_i$ неразрешима, а эквациональная теория многообразия $\mathfrak{B}_i$ и класса $\mathfrak{B}_i \cap \mathfrak{F}$ всех конечных полугрупп из многообразия $\mathfrak{B}_i$ разрешима. Известно, что всякий неединичный элемент решетки подмногообразий многообразия всех полугрупп имеет покрытие [13]. Поэтому естественно возникает вопрос о возможности уплотнения построенных последовательностей многообразий. В частности, можно ли отношение включения заменить отношением покрытия?

**Теорема 1.** *Для произвольного собственного многообразия полугрупп $\mathfrak{X}$ существует многообразие полугрупп $\mathfrak{Y}$ такое, что выполняются следующие три условия:*

1) *$\mathfrak{Y}$ покрывает многообразие $\mathfrak{X}$;*

2) *если многообразие $\mathfrak{X}$ конечно базируемое, то многообразие $\mathfrak{Y}$ тоже конечно базируемое;*

3) *эквациональная теория многообразия $\mathfrak{X}$ разрешима тогда и только тогда, когда разрешима эквациональная теория многообразия $\mathfrak{Y}$.*

Прежде чем перейти непосредственно к доказательству теоремы 1, сформулируем ряд определений и введем обозначения, которые мы будем использовать в дальнейшем.

Зафиксируем некоторый бесконечный алфавит $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$. Без ограничения общности можно считать, что все тождества записаны в алфавите $X$. Тождество $u = v$ называется *уравновешенным*, если каждая буква входит в слова $u$ и $v$ одинаковое число раз [14].

Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — произвольные многообразия полугрупп. Если многообразие $\mathfrak{Y}$ покрывает многообразие $\mathfrak{X}$, то мы будем писать $\mathfrak{X} < \mathfrak{Y}$.

Обозначим через $\operatorname{eq}\mathfrak{X}$ множество $\{u_i(\vec{x}) = v_i(\vec{x}) \mid i \in \mathbb{N}\}$ всевозможных нетривиальных тождеств, которым удовлетворяет многообразие $\mathfrak{X}$. Пусть $U$ — множество всевозможных слов в алфавите $X$ таких, что $u(\vec{x}) \in U$ тогда и только тогда, когда найдется $v(\vec{x})$ такое, что $u(\vec{x}) = v(\vec{x}) \in \operatorname{eq}\mathfrak{X}$. Обозначим через $V$ максимальное подмножество множества $U$ такое, что $u(\vec{x}) \in U$ тогда и только тогда, когда найдется $v(\vec{x})$ такое, что $u(\vec{x}) = v(\vec{x})$ — тождество из базиса многообразия $\mathfrak{X}$.

Заметим, что если тождество $u(\vec{x}) = v(\vec{x})$ принадлежит множеству $\operatorname{eq}\mathfrak{X}$, то по определению множества $\operatorname{eq}\mathfrak{X}$ тождество $v(\vec{x}) = u(\vec{x})$ также принадлежит множеству $\operatorname{eq}\mathfrak{X}$. Кроме того, если тождество $u(\vec{x}) = v(\vec{x})$ принадлежит множеству $\operatorname{eq}\mathfrak{X}$ и слово $u(\vec{x})$ является подсловом слова $w(\vec{x})$, то для некоторого слова $w'(\vec{x})$ по определению множества $\operatorname{eq}\mathfrak{X}$ тождество $w(\vec{x}) = w'(\vec{x})$ также принадлежит множеству $\operatorname{eq}\mathfrak{X}$.

Обозначим через $F$ свободную полугруппу счетного ранга, порожденную множеством свободных образующих $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$. Будем говорить, что слово $u(\vec{x})$ *не превосходит слова* $v(\vec{x})$, и писать $u(\vec{x}) \le v(\vec{x})$, если найдется такой набор элементов $s_1, s_2, \dots$ полугруппы $F$, что слово $u(\vec{s})$ — подслово слова $v(\vec{e})$, где $u(\vec{s})$ — слово, полученное из слова $u(\vec{x})$ подстановкой $x_1 \to s_1, x_2 \to s_2, \dots$, а $v(\vec{e})$ — слово, полученное из слова $v(\vec{x})$ подстановкой $x_1 \to e_1, x_2 \to e_2, \dots$. При этом если для любого $i$ имеет место соотношение $s_i \in \{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$, то будем говорить, что слова $u(\vec{x})$ и $v(\vec{x})$ эквивалентны, и писать $u(\vec{x}) =_X v(\vec{x})$. Несложная проверка позволяет убедиться в том, что отношение $\le$ рефлексивно, антисимметрично и транзитивно на множествах $U$ и $V$. Следовательно, $\le$ — отношение частичного порядка (см. [15, гл. 1, § 1]). Если слова $u(\vec{x})$ и $v(\vec{x})$ равны как элементы свободной полугруппы, свободно порожденной множеством

$X$, то будем говорить, что имеет место *графическое равенство слов* $u(\vec{x})$ и $v(\vec{x})$, и писать $u(\vec{x}) \equiv v(\vec{x})$. Если для слов $u(\vec{x})$ и $v(\vec{x})$ справедливо соотношение $u(\vec{x}) \leq v(\vec{x})$ и не выполняется соотношение $u(\vec{x}) =_X v(\vec{x})$, то будем говорить, что слово $u(\vec{x})$ *меньше* слова $v(\vec{x})$, и писать $u(\vec{x}) < v(\vec{x})$. Заметим, что отношение $<$ так же, как и отношение $\leq$, рефлексивно, антисимметрично и транзитивно на множествах $U$ и $V$. Следовательно, отношение $<$ — отношение частичного порядка.

Очевидно, что если имеет место соотношение $u(\vec{x}) < v(\vec{x})$, то длина слова $u(\vec{x})$ строго меньше длины слова $v(\vec{x})$. Отсюда вытекает, что для любого базиса многообразия $\mathfrak{X}$ множество $V$ содержит по крайней мере один минимальный элемент относительно отношения порядка $<$. Зафиксируем некоторый базис многообразия $\mathfrak{X}$ и обозначим какой-либо минимальный элемент наименьшей длины через $m(\vec{x})$. Пусть $n$ — число различных букв из алфавита $X$, входящих в запись слова $m(\vec{x})$. Без ограничения общности можно считать, что в слово $m(\vec{x})$ входят буквы $x_1, x_2, \dots, x_n$, и только они, и, следовательно, вместо $m(\vec{x})$ можно писать $m(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Рассмотрим множество всевозможных элементов множества $\operatorname{eq}\mathfrak{X}$, имеющих вид $m(x_1, x_2, \dots, x_n) = v_i(\vec{x})$ и входящих в базис многообразия $\mathfrak{X}$. Без ограничения общности можно полагать, что это множество имеет вид

$$\{m(x_1, x_2, \dots, x_n) = v_1(\vec{x}), m(x_1, x_2, \dots, x_n) = v_2(\vec{x}), \dots, \\ m(x_1, x_2, \dots, x_n) = v_r(\vec{x}), \dots\}. \quad (1)$$

Заметим, что в каждом из базисных тождеств многообразия $\mathfrak{X}$ мы можем переобозначить переменные таким образом, что если $u_i(\vec{x}) = v_i(\vec{x})$ — базисное тождество и

$$u_i(\vec{x}) =_X m(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad v_i(\vec{x}) \neq_X m(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

или

$$u_i(\vec{x}) \neq_X m(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad v_i(\vec{x}) =_X m(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

то $u_i(\vec{x}) \equiv m(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и соответственно $v_i(\vec{x}) \equiv m(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Кроме того, заметим, что если в базисе многообразия $\mathfrak{X}$ заменить множество тождеств (1) множеством

$$\{m(x_1, x_2, \dots, x_n) = v_1(\vec{x}), v_1(\vec{x}) = v_2(\vec{x}), \dots, v_1(\vec{x}) = v_r(\vec{x}), \dots\},$$

то снова получим базис тождеств многообразия $\mathfrak{X}$.

Итак, зафиксируем базис многообразия $\mathfrak{X}$ такой, что $V$ содержит минимальный элемент $m(x_1, x_2, \dots, x_n)$. При этом полагаем, что если $v(\vec{x}) \in V$ и $v(\vec{x}) =_X m(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то либо $v(\vec{x}) \equiv m(x_1, x_2, \dots, x_n)$, либо для любого слова $u(\vec{x})$ из соотношения $u(\vec{x}) = v(\vec{x}) \in \operatorname{eq}\mathfrak{X}$ следует соотношение $u(\vec{x}) =_X m(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Кроме того, будем полагать, что

$$m(x_1, x_2, \dots, x_n) = v_1(\vec{x}) \quad (2)$$

— единственное тождество базиса, правая или левая часть которого графически равна $m(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Обозначим этот базис через $\mathbb{V}$.

Пусть $\mathbb{V}'$ — подмножество множества $\mathbb{V}$ такое, что

1) для любого тождества $u(\vec{x}) = v(\vec{x})$ если $u(\vec{x}) = v(\vec{x}) \in \mathbb{V}'$, то

$$u(\vec{x}) =_X m(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{или } v(\vec{x}) =_X m(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (3)$$

2) для любого тождества $u(\vec{x}) = v(\vec{x})$ если $u(\vec{x}) = v(\vec{x}) \in \mathbb{V}\backslash\mathbb{V}'$, то

$$u(\vec{x}) \neq_X m(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ и } v(\vec{x}) \neq_X m(x_1, x_2, \dots, x_n). \qquad (4)$$

Допустим, что существует тождество $u(\vec{x}) = v(\vec{x})$ такое, что $u(\vec{x}) = v(\vec{x}) \in \mathbb{V}'$, и выполняется одно из соотношений (4). Без ограничения общности можно считать, что имеет место соотношение $v(\vec{x}) \neq_X m(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тогда, очевидно, систему тождеств $\mathbb{V}$ можно преобразовать таким образом, что множество $\mathbb{V}'$ будет одноэлементно. Если же для любого $u(\vec{x}) = v(\vec{x}) \in \mathbb{V}'$ выполняются оба соотношения (4), то очевидно, что для любого $u(\vec{x}) = v(\vec{x}) \in \mathbb{V}'$ из условия $\mathbb{V}\backslash\{u(\vec{x}) = v(\vec{x})\} \vdash u(\vec{x}) = v(\vec{x})$ следует условие $\mathbb{V}'\backslash\{u(\vec{x}) = v(\vec{x})\} \vdash u(\vec{x}) = v(\vec{x})$ и, кроме того, множество $\mathbb{V}'$ конечно. Поэтому в дальнейшем можно считать, что для любого $u(\vec{x}) = v(\vec{x}) \in \mathbb{V}'$ имеет место соотношение $\mathbb{V}'\backslash\{u(\vec{x}) = v(\vec{x})\} \nvdash u(\vec{x}) = v(\vec{x})$.

Пусть $\mathbb{V}^m \rightleftharpoons (\mathbb{V}\backslash\{m(x_1, x_2, \dots, x_n) = v_1(\vec{x})\}) \cup M$, где

$$M \rightleftharpoons \{\mathfrak{f}_l(m(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \mathfrak{f}_l(v_1(\vec{x})),\ x_{n+1}m(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_{n+1}v_1(\vec{x}),$$
$$m(x_1, x_2, \dots, x_n)x_{n+1} = v_1(\vec{x})x_{n+1} \mid l \in \{1, 2, \dots, n\}\},$$

при этом считаем, что $x_{n+1}$ — буква, не содержащаяся в слове $v_1(\vec{x})$, а $\mathfrak{f}_l$ — отображение, для которого $\mathfrak{f}_l(uv) = \mathfrak{f}_l(u)\mathfrak{f}_l(v)$ и для буквы $x_{p+n+1}$, не содержащейся в слове $v_1(\vec{x})$,

$$\mathfrak{f}_l(x_p) = \begin{cases} x_p, & \text{если } p \neq l \\ x_p x_{p+n+1}, & \text{если } p = l. \end{cases}$$

Многообразие, заданное системой тождеств $\mathbb{V}^m$, мы будем обозначать через $\mathfrak{X}^m$.

Для доказательства теоремы нам потребуются следующие две леммы.

**Лемма 1.** *Многообразие $\mathfrak{X}$ — собственное подмногообразие многообразия $\mathfrak{X}^m$.*

**Лемма 2.** $\mathfrak{X} < \mathfrak{X}^m$.

Доказательство леммы 1. Непосредственно из определения многообразия $\mathfrak{X}^m$ вытекает, что $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}^m$. Допустим, что $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^m$. Тогда в многообразии $\mathfrak{X}^m$ должны выполняться все тождества многообразия $\mathfrak{X}$, в частности, тождество (2). Из определения отношения $<$ очевидным образом следует, что

$$m(x_1, x_2, \dots, x_n) < \mathfrak{f}_l(m(x_1, x_2, \dots, x_n)), \quad m(x_1, x_2, \dots, x_n) < \mathfrak{f}_l(v_1(\vec{x})),$$
$$m(x_1, x_2, \dots, x_n) < x_{n+1}m(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad m(x_1, x_2, \dots, x_n) < x_{n+1}v_1(\vec{x}),$$
$$m(x_1, x_2, \dots, x_n) < m(x_1, x_2, \dots, x_n)x_{n+1}, \quad m(x_1, x_2, \dots, x_n) < v_1(\vec{x})x_{n+1}$$

для любого $l \in \{1, 2, \dots, n\}$. Отсюда получаем, что ни одно из тождеств множества $M$ не применимо к слову $m(x_1, x_2, \dots, x_n)$. С учетом того факта, что слово $m(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является минимальным элементом множества $V$, ни одно из тождеств множества

$$(\mathbb{V}\backslash\{m(x_1, x_2, \dots, x_n) = v_1(\vec{x})\})\backslash\mathbb{V}'$$

не применимо к слову $m(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Как замечено выше, множество $\mathbb{V}'$ одноэлементно или для любого $u(\vec{x}) = v(\vec{x}) \in \mathbb{V}'$ выполняются оба соотношения (4) и для любого $u(\vec{x}) = v(\vec{x}) \in \mathbb{V}'$ имеет место соотношение

$$\mathbb{V}'\backslash\{u(\vec{x}) = v(\vec{x})\} \nvdash u(\vec{x}) = v(\vec{x}).$$

Следовательно, тождество (2) не выводимо из системы тождеств $\mathbb{V}^m$. Поэтому $\mathfrak{X} \neq \mathfrak{X}^m$. Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Согласно лемме 1 многообразие $\mathfrak{X}$ — собственное подмногообразие многообразия $\mathfrak{X}^m$. Следовательно, для доказательства справедливости соотношения $\mathfrak{X} < \mathfrak{X}^m$ достаточно показать, что любое многообразие $\mathfrak{Y}$, для которого $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}^m$, совпадает с многообразием $\mathfrak{X}$ или с многообразием $\mathfrak{X}^m$. Допустим противное: $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{Y} \subset \mathfrak{X}^m$. В этом случае найдется тождество $u_0(\vec{x}) = v_0(\vec{x})$ такое, что $u_0(\vec{x}) = v_0(\vec{x})$ выполняется в многообразии $\mathfrak{Y}$, а значит, и в многообразии $\mathfrak{X}$, но не выполняется в многообразии $\mathfrak{X}^m$, и, кроме того, тождество (2) не выполняется в многообразии $\mathfrak{Y}$. Так как тождество $u_0(\vec{x}) = v_0(\vec{x})$ выполняется в многообразии $\mathfrak{X}$, то найдется цепочка равенств

$$u_0(\vec{x}) = w_1(\vec{x}) = w_2(\vec{x}) = \dots = w_k(\vec{x}) = v_0(\vec{x}) \tag{5}$$

такая, что каждое последующее слово в этой цепочке получено из предыдущего применением к нему одного из тождеств из множества $\mathbb{V}$. Предположим, что цепочка (5) может быть получена без использования тождества (2). Тогда по определению многообразия $\mathfrak{X}^m$ тождество $u_0(\vec{x}) = v_0(\vec{x})$ должно выполняться и в этом многообразии, что противоречит нашему предположению. Следовательно, либо переход $u_0(\vec{x}) = w_1(\vec{x})$, либо переход $w_k(\vec{x}) = v_0(\vec{x})$ должен быть осуществлен при помощи тождества (2), либо найдется такое $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, что переход $w_i(\vec{x}) = w_{i+1}(\vec{x})$ осуществляется при помощи тождества (2).

Допустим, что ни одно из слов $u_0(\vec{x})$, $v_0(\vec{x})$, $w_i(\vec{x})$, где $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, не эквивалентно слову $m(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тогда каждый из переходов

$$u_0(\vec{x}) = w_1(\vec{x}), \quad w_k(\vec{x}) = v_0(\vec{x}), \quad w_i(\vec{x}) = w_{i+1}(\vec{x}),$$

в которых мы использовали тождество (2), может быть осуществлен в многообразии $\mathfrak{X}^m$ при помощи одного из тождеств

$$\begin{gathered} \mathfrak{f}_l(m(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \mathfrak{f}_l(v_1(\vec{x})), \quad x_{n+1}m(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_{n+1}v_1(\vec{x}), \\ m(x_1, x_2, \dots, x_n)x_{n+1} = v_1(\vec{x})x_{n+1}, \end{gathered} \tag{6}$$

где $l \in \{1, 2, \dots, n\}$. Отсюда вытекает, что тождество $u_0(\vec{x}) = v_0(\vec{x})$ выполняется в многообразии $\mathfrak{X}^m$, что противоречит нашему первоначальному предположению. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что имеет место одно из следующих соотношений:

$$\begin{gathered} u_0(\vec{x}) \equiv m(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad v_0(\vec{x}) \equiv m(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ w_i(\vec{x}) \equiv m(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{gathered}$$

где $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Предположим, что найдется натуральное число $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $w_i(\vec{x}) \equiv m(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тогда либо $w_{i-1}(\vec{x}) \equiv v_1(\vec{x})$, либо $w_{i+1}(\vec{x}) \equiv v_1(\vec{x})$. Если $w_{i-1}(\vec{x}) = w_i(\vec{x})$ или $w_i(\vec{x}) = w_{i+1}(\vec{x})$ — единственный переход в цепочке равенств (5), осуществленный при помощи тождества (2), то, очевидно, либо цепочка

$$w_i(\vec{x}) = w_{i+1}(\vec{x}) = \dots = w_k(\vec{x}) = v_0(\vec{x}) = u_0(\vec{x}) = w_1(\vec{x}) = w_2(\vec{x}) = \dots = w_{i-1}(\vec{x}),$$

либо цепочка

$$w_{i+1}(\vec{x}) = w_{i+2}(\vec{x}) = \dots = w_k(\vec{x}) = v_0(\vec{x}) = u_0(\vec{x}) = w_1(\vec{x}) = w_2(\vec{x}) = \dots = w_i(\vec{x})$$

является выводом тождества (2) в многообразии $\mathfrak{Y}$. Следовательно, в дальнейшем можно предполагать, что как минимум два перехода в цепочке равенств (5) осуществлены при помощи тождества (2). В этом случае цепочку (5) можно представить в одном из следующих четырех видов:

$$\begin{aligned} u_0(\vec{x}) = w_1(\vec{x}) = w_2(\vec{x}) = \dots = w_i(\vec{x}) = m(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ = v_1(\vec{x}) = w_{i+3}(\vec{x}) = w_{i+4}(\vec{x}) = \dots = w_j(\vec{x}) = m(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ = v_1(\vec{x}) = w_{j+3}(\vec{x}) = w_{j+4}(\vec{x}) = \dots = w_k(\vec{x}) = v_0(\vec{x}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_0(\vec{x}) = w_1(\vec{x}) = w_2(\vec{x}) = \dots = w_i(\vec{x}) = m(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ = v_1(\vec{x}) = w_{i+3}(\vec{x}) = w_{i+4}(\vec{x}) = \dots = w_j(\vec{x}) = v_1(\vec{x}) = m(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ = w_{j+3}(\vec{x}) = w_{j+4}(\vec{x}) = \dots = w_k(\vec{x}) = v_0(\vec{x}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_0(\vec{x}) = w_1(\vec{x}) = w_2(\vec{x}) = \dots = w_i(\vec{x}) = v_1(\vec{x}) = m(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ = w_{i+3}(\vec{x}) = w_{i+4}(\vec{x}) = \dots = w_j(\vec{x}) = v_1(\vec{x}) = m(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ = w_{j+3}(\vec{x}) = w_{j+4}(\vec{x}) = \dots = w_k(\vec{x}) = v_0(\vec{x}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_0(\vec{x}) = w_1(\vec{x}) = w_2(\vec{x}) = \dots = w_i(\vec{x}) = v_1(\vec{x}) = m(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ = w_{i+3}(\vec{x}) = w_{i+4}(\vec{x}) = \dots = w_j(\vec{x}) = m(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ = v_1(\vec{x}) = w_{j+3}(\vec{x}) = w_{j+4}(\vec{x}) = \dots = w_k(\vec{x}) = v_0(\vec{x}), \end{aligned}$$

где последовательности равенств

$$u_0(\vec{x}) = w_1(\vec{x}) = w_2(\vec{x}) = \dots = w_i(\vec{x}), \quad w_{j+3}(\vec{x}) = w_{j+4}(\vec{x}) = \dots = w_k(\vec{x}) = v_0(\vec{x})$$

получены без использования тождества (2). Очевидно, что эти четыре цепочки равносильны цепочкам

$$\begin{aligned} u_0(\vec{x}) = w_1(\vec{x}) = w_2(\vec{x}) = \dots = w_i(\vec{x}) = m(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ = v_1(\vec{x}) = w_{j+3}(\vec{x}) = w_{j+4}(\vec{x}) = \dots = w_k(\vec{x}) = v_0(\vec{x}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_0(\vec{x}) = w_1(\vec{x}) = w_2(\vec{x}) = \dots = w_i(\vec{x}) = m(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ = w_{j+3}(\vec{x}) = w_{j+4}(\vec{x}) = \dots = w_k(\vec{x}) = v_0(\vec{x}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_0(\vec{x}) = w_1(\vec{x}) = w_2(\vec{x}) = \dots = w_i(\vec{x}) = v_1(\vec{x}) = m(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ = w_{j+3}(\vec{x}) = w_{j+4}(\vec{x}) = \dots = w_k(\vec{x}) = v_0(\vec{x}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_0(\vec{x}) = w_1(\vec{x}) = w_2(\vec{x}) = \dots \\ = w_i(\vec{x}) = v_1(\vec{x}) = w_{j+3}(\vec{x}) = w_{j+4}(\vec{x}) = \dots = w_k(\vec{x}) = v_0(\vec{x}) \end{aligned}$$

соответственно. Заметим, что при получении первой и третьей цепочек тождество (2) используется лишь однажды, а во второй и четвертой вообще не используется. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Из определения многообразия $\mathfrak{X}^m$ вытекает, что если $\mathfrak{X}$ — конечно базируемое многообразие, то $\mathfrak{X}^m$ тоже конечно базируемое многообразие. Поэтому с учетом леммы 2 для завершения доказательства теоремы нам достаточно показать, что множество тождеств многообразия $\mathfrak{X}$

рекурсивно тогда и только тогда, когда рекурсивно множество тождеств многообразия $\mathfrak{X}^m$.

Предположим, что $v_1(\vec{x}) =_X m(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тогда по определению множества $\mathbb{V}'$ для любого тождества $u(\vec{x}) = v(\vec{x})$ из этого множества имеют место соотношения (3). В этом случае очевидно, что множество тождеств, выполняющихся в многообразии $\mathfrak{X}$ и не выполняющихся в многообразии $\mathfrak{X}^m$, совпадает с множеством тождеств, выполняющихся в многообразии, заданном системой тождеств $\mathbb{V}'$, не выполняющихся в многообразии, заданном системой тождеств $\mathbb{V}' \backslash \{m(x_1, x_2, \dots, x_n) = v_1(\vec{x})\}$, длины правой и левой частей которых равны длине слова $m(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

По определению множества тождеств $\mathbb{V}'$ и по определению тождества (2) многообразие, заданное системой тождеств $\mathbb{V}'$, и многообразие, заданное системой тождеств $\mathbb{V}' \backslash \{m(x_1, x_2, \dots, x_n) = v_1(\vec{x})\}$, являются многообразиями, заданными уравновешенными тождествами. Отсюда вытекает, что их эквациональные теории разрешимы (см., например, [16, теорема 3.15]), т. е. множества всех тождеств, выполняющихся в этих многообразиях, рекурсивны. Следовательно, множество тождеств, выполняющихся в многообразии, заданном системой тождеств $\mathbb{V}'$, и не выполняющихся в многообразии, заданном системой тождеств $\mathbb{V}' \backslash \{m(x_1, x_2, \dots, x_n) = v_1(\vec{x})\}$, рекурсивно. Отсюда непосредственно следует, что рекурсивно и множество тождеств, выполняющихся в многообразии, заданном системой тождеств $\mathbb{V}'$, и не выполняющихся в многообразии, заданном системой тождеств $\mathbb{V}' \backslash \{m(x_1, x_2, \dots, x_n) = v_1(\vec{x})\}$, длины правой и левой частей которых равны длине слова $m(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Поскольку это множество совпадает с множеством тождеств, выполняющихся в многообразии $\mathfrak{X}$ и не выполняющихся в многообразии $\mathfrak{X}^m$, эквациональная теория многообразия $\mathfrak{X}$ разрешима тогда и только тогда, когда разрешима эквациональная теория многообразия $\mathfrak{X}^m$. Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что $v_1(\vec{x}) \neq_X m(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Покажем, что если тождество $u(\vec{x}) = v(\vec{x})$ выполняется в многообразии $\mathfrak{X}$ и не выполняется в многообразии $\mathfrak{X}^m$, то выполняется одно из соотношений (3). В самом деле, пусть $u(\vec{x}) = v(\vec{x})$ — тождество, выполняющееся в многообразии $\mathfrak{X}$ и не выполняющееся в многообразии $\mathfrak{X}^m$. Так как $u(\vec{x}) = v(\vec{x})$ — тождество, выполняющееся в многообразии $\mathfrak{X}$, найдется цепочка равенств

$$u(\vec{x}) = w_1(\vec{x}) = w_2(\vec{x}) = \dots = w_k(\vec{x}) = v(\vec{x}) \tag{7}$$

такая, что каждое последующее слово в этой цепочке получено из предыдущего применением к нему одного из тождеств из множества $\mathbb{V}$. Предположим, что для любого $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ соотношение

$$w_i(\vec{x}) =_X m(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{8}$$

ложно. Тогда либо переход $w_{i-1}(\vec{x}) = w_i(\vec{x})$ осуществлен без использования тождества (2), либо для получения равенства $w_{i-1}(\vec{x}) = w_i(\vec{x})$ вместо тождества (2) можно использовать одно из тождеств (6), где $l \in \{1, 2, \dots, n\}$. Следовательно, либо для некоторого $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ выполняется соотношение $w_i(\vec{x}) =_X m(x_1, x_2, \dots, x_n)$, либо тождество $u(\vec{x}) = v(\vec{x})$ выполняется в многообразии $\mathfrak{X}^m$.

Предположим, что найдется натуральное число $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ такое, что имеет место соотношение (8). Тогда в силу того, что $m(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — минимальный элемент множества $V$, должны выполняться следующие соотношения:

$$w_{i-1}(\vec{x}) =_X w_{i+1}(\vec{x}) =_X v_1(\vec{x}).$$

Следовательно, вместо цепочки равенств (7) можно рассматривать цепочку равенств

$$u(\vec{x}) = w_1(\vec{x}) = w_2(\vec{x}) = \dots = w_{i-1}(\vec{x}) = w_{i+2}(\vec{x}) \\ = w_{i+3}(\vec{x}) = \dots = w_k(\vec{x}) = v(\vec{x}). \quad (9)$$

Действуя таким образом, мы придем к случаю, когда для любого числа $i$ из множества $\{1, 2, \dots, k\}$ соотношение (8) ложно. Итак, мы убедились в том, что если тождество $u(\vec{x}) = v(\vec{x})$ выполняется в многообразии $\mathfrak{X}$ и не выполняется в многообразии $\mathfrak{X}^m$, то выполняется одно из соотношений (3).

Покажем теперь, что если тождество $u(\vec{x}) = v(\vec{x})$ выполняется в многообразии $\mathfrak{X}$ и выполняется одно из соотношений (3), то тождество $u(\vec{x}) = v(\vec{x})$ не выполняется в многообразии $\mathfrak{X}^m$. Пусть для определенности имеет место соотношение $u(\vec{x}) =_X m(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Без ограничения общности можно считать, что слова $u(\vec{x})$ и $m(x_1, x_2, \dots, x_n)$ графически равны. Следовательно, тождество $u(\vec{x}) = v(\vec{x})$ имеет вид

$$m(x_1, x_2, \dots, x_n) = v(\vec{x}). \quad (10)$$

Предположим, что тождество (10) выполняется в многообразии $\mathfrak{X}^m$. Тогда найдется цепочка равенств

$$m(x_1, x_2, \dots, x_n) = w_1(\vec{x}) = w_2(\vec{x}) = \dots = w_k(\vec{x}) = v(\vec{x}) \quad (11)$$

такая, что каждое последующее слово в этой цепочке получено из предыдущего применением к нему одного из базисных тождеств многообразия $\mathfrak{X}^m$. Из определения многообразия $\mathfrak{X}^m$ очевидным образом вытекает, что если $s(\vec{x}) = t(\vec{x})$ — тождество из базиса многообразия $\mathfrak{X}^m$, то соотношения

$$s(\vec{x}) < m(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad t(\vec{x}) < m(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ложны. Следовательно, ни одно из тождеств многообразия $\mathfrak{X}^m$ не применимо к слову $m(x_1, x_2, \dots, x_n)$, т. е. предположение о том, что найдется цепочка равенств (11), ложно.

Таким образом, мы убедились в том, что если тождество $u(\vec{x}) = v(\vec{x})$ выполняется в многообразии $\mathfrak{X}$, то оно не выполняется в многообразии $\mathfrak{X}^m$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из соотношений (3). Отсюда непосредственно вытекает, что множество $\operatorname{eq}\mathfrak{X}^m$ всевозможных нетривиальных тождеств многообразия $\mathfrak{X}^m$ имеет вид

$$\operatorname{eq}\mathfrak{X}^m = \operatorname{eq}\mathfrak{X} \setminus (\{u(\vec{x}) = v(\vec{x}) \mid u(\vec{x}) =_X m(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vee v(\vec{x}) =_X m(x_1, x_2, \dots, x_n)\} \cap \operatorname{eq}\mathfrak{X}).$$

Очевидно, что множество тождеств

$$\{u(\vec{x}) = v(\vec{x}) \mid u(\vec{x}) =_X m(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee v(\vec{x}) =_X m(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$$

рекурсивно. Допустим, что множество тождеств $\operatorname{eq}\mathfrak{X}$ тоже рекурсивно. Тогда очевидно, что и множество $\operatorname{eq}\mathfrak{X}^m$ рекурсивно. Допустим теперь, что множество тождеств $\operatorname{eq}\mathfrak{X}$ не рекурсивно. Если множество

$$\{u(\vec{x}) = v(\vec{x}) \mid u(\vec{x}) =_X m(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee v(\vec{x}) =_X m(x_1, x_2, \dots, x_n)\} \cap \operatorname{eq}\mathfrak{X} \quad (12)$$

рекурсивно, то очевидно, что множество $\operatorname{eq}\mathfrak{X}^m$ не рекурсивно. Предположим, что множество (12) не рекурсивно. Тогда не существует алгоритма, определяющего по произвольному тождеству $u(\vec{x}) = v(\vec{x})$ такому, что

$$u(\vec{x}) =_X m(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (13)$$

выполняется оно в многообразии $\mathfrak{X}$ или нет. Из приведенных выше рассуждений вытекает, что тождество $u(\vec{x}) = v(\vec{x})$ выполняется в многообразии $\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда в многообразии $\mathfrak{X}^m$ выполняется тождество $w(\vec{x}) = v(\vec{x})$ для некоторого слова $w(\vec{x})$ такого, что $w(\vec{x}) =_X v_1(\vec{x})$. Следовательно, если не существует алгоритма, определяющего по произвольному тождеству $u(\vec{x}) = v(\vec{x})$ такому, что имеет место соотношение (13), выполняется оно в многообразии $\mathfrak{X}$ или нет, то не существует алгоритма, определяющего по произвольному тождеству $w(\vec{x}) = v(\vec{x})$ такому, что $w(\vec{x}) =_X v_1(\vec{x})$, выполняется оно в многообразии $\mathfrak{X}^m$ или нет, т. е. множество $\mathrm{eq}\,\mathfrak{X}^m$ не рекурсивно.

Теорема 1 доказана.

Как отмечено в [17], используя рассуждения из работы [18], нетрудно показать, что произвольное многообразие групп имеет бесконечное число покрывающих многообразий. Пример многообразия полугрупп, имеющего континуальное множество покрывающих многообразий, построен в [13], а пример многообразия групп, имеющего континуальное множество покрывающих многообразий, — в работе [17]. В свете этих результатов представляет интерес следующая

**Теорема 2.** *Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольное многообразие полугрупп, заданное тождествами, зависящими от конечного числа переменных, все периодические группы которого локально конечны. Тогда выполняется одно из следующих двух условий:*

1) *все нильполугруппы из многообразия $\mathfrak{X}$ локально конечны;*

2) *многообразие $\mathfrak{X}$ включает подмногообразие $\mathfrak{Y}$ с неразрешимой эквациональной теорией, имеющее бесконечное множество покрывающих многообразий с неразрешимой эквациональной теорией.*

Доказательство теоремы 2. Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольное многообразие полугрупп, заданное тождествами, зависящими от конечного числа переменных. Без ограничения общности можно считать, что многообразие $\mathfrak{X}$ задано тождествами в алфавите $X$. В дальнейшем, если не оговорено противное, базис многообразия $\mathfrak{X}$ будем считать фиксированным и обозначать через $\mathbb{V}$. Пусть, как и выше, $\mathrm{eq}\,\mathfrak{X}$ — множество всевозможных нетривиальных тождеств, которым удовлетворяет многообразие $\mathfrak{X}$. Рассмотрим следующую последовательность слов, введенную в [19]:

$$Z_1 \rightleftharpoons x_1, \quad Z_{n+1} \rightleftharpoons Z_n x_{n+1} Z_n$$

для любого натурального числа $n$. Допустим, что для некоторых натуральных чисел $i$ и $j$ тождество $u_i(\vec{x}) = v_i(\vec{x})$ имеет вид $Z_j = v_i(\vec{x})$. Обозначим через $r$ число переменных, входящих в тождества, задающие многообразие $\mathfrak{X}$. Пусть $m$ — максимум из чисел $r+1$ и $j$. Если $m = j$, то согласно [20] (см. также работу [21] и теорему 3.7 в обзоре [16]) все нильполугруппы из многообразия $\mathfrak{X}$ локально конечны. Если $m > j$, то рассмотрим вместо тождества $Z_j = v_i(\vec{x})$ тождество

$$Z_j x_{j+1} Z_j = v_i(\vec{x}) x_{j+1} v_i(\vec{x}),$$

полагая, что буква $x_{j+1}$ не содержится в слове $v_i(\vec{x})$. Поскольку по определению слова $Z_{j+1}$ имеет место равенство $Z_{j+1} = Z_j x_{j+1} Z_j$, то, действуя таким образом, мы через $m - j$ шагов убедимся в том, что многообразие $\mathfrak{X}$ удовлетворяет тождеству $Z_m = w(\vec{x})$ для некоторого слова $w(\vec{x})$, и, следовательно, согласно [20] все нильполугруппы из многообразия $\mathfrak{X}$ локально конечны. Итак, в дальнейшем мы можем полагать, что для любых натуральных чисел $i$ и $j$ тождество $u_i(\vec{x}) = v_i(\vec{x})$ не имеет вида $Z_j = v_i(\vec{x})$.

Как нетрудно убедиться, из предположения о том, что для любых натуральных чисел $i$ и $j$ тождество $u_i(\vec{x}) = v_i(\vec{x})$ из множества eq $\mathfrak{X}$ не имеет вида $Z_j = v_i(\vec{x})$, следует, что для любого слова $u(\vec{x})$ из множества $U$, а значит, и из множества $V$ $u(\vec{x})$ не является подсловом слова $Z_j$ ни для какого натурального числа $j$. Отсюда в силу результатов из [22, 23], вытекает, что $U$ и $V$ — множества избегаемых слов [22].

В дальнейшем при доказательстве теоремы 2 мы используем некоторую модификацию рассуждений из доказательства предложения 4 работы [20].

Следуя [24], слово $w$ будем называть *изотермом для тождества* $u = v$, если для любой подстановки $\varphi$ из того, что $\varphi(u)$ является подсловом в слове $w$, следует, что слова $\varphi(u)$ и $\varphi(v)$ графически равны. Для произвольного натурального числа $r$ рассмотрим подстановку $\gamma_r$, определенную следующим образом. Пусть $A$ — алфавит, состоящий из $r^2$ букв $a_{ij}$, где $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq r$. Рассмотрим $r^2 \times r$-матрицу $M$, в которой каждая нечетная колонка равна

$$(1, 1, \ldots, 1, 2, 2, \ldots, 2, \ldots, r, r, \ldots, r),$$

а каждая четная колонка —

$$(1, 2, \ldots, r, 1, 2, \ldots, r, \ldots, 1, 2, \ldots, r).$$

Заменим каждое число $i$ в $j$-й колонке матрицы $M$ буквой $a_{ij}$. Полученную матрицу обозначим через $M'$. Строки матрицы $M'$ можно рассматривать как слова. Обозначим эти слова через $w_1, \ldots, w_{r^2}$, где $w_l$ — слово, соответствующее $l$-й строке матрицы $M'$. Теперь определим подстановку $\gamma_r$ по следующему правилу: $\gamma_r(a_{ij}) = w_{(r-1)j+i}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольное многообразие полугрупп, заданное системой тождеств $\mathbb{V}$, причем тождества системы $\mathbb{V}$ зависят лишь от конечного числа переменных $n$ и слово $Z_n$ является изотермом для системы тождеств $\mathbb{V}$, т. е. изотермом для каждого тождества из системы $\mathbb{V}$. Возьмем любое $r > 6n$ и положим

$$r_1 = r, \quad r_{m+1} = 6r_m + 1 \text{ для любого m } \geq 1.$$

Для каждого $m \geq 1$ обозначим слово ${\gamma_{r_m}}^{r_m}(a_{11})$ через $w_m$. Для любого непустого подмножества $\mathbb{M}$ множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ обозначим через $\mathfrak{X}_{\mathbb{M}}$ подмногообразие многообразия $\mathfrak{X}$, заданное системой тождеств

$$\mathbb{V}_{\mathbb{M}} \rightleftharpoons \mathbb{V} \cup \{w_n = {w_n}^2 \mid n \in \mathbb{M}\}.$$

Согласно [20] для любого натурального $n$ слово $w_n$ — изотерм для системы тождеств $\mathbb{V}$, для любого целого числа $k$ такого, что $k \neq 0$, $k + n \geq 1$, слово $w_{k+n}$ является изотермом для тождества $w_n = {w_n}^2$, ни одно тождество $w_n = {w_n}^2$ не вытекает из остальных тождеств системы $\mathbb{V}_{\mathbb{M}}$.

Заметим, что если множество $\mathbb{M}$ не рекурсивно, то $\mathfrak{X}_{\mathbb{M}}$ — многообразие с неразрешимой эквациональной теорией. Кроме того, легко понять, что для любого $n \in \mathbb{M}$ слово $w_n$ — минимальный элемент в множестве $\langle V_{\mathbb{M}}, < \rangle$, где

$$V_{\mathbb{M}} \rightleftharpoons \{u(\vec{x}), v(\vec{x}) \mid u(\vec{x}) = v(\vec{x}) \in \mathbb{V}_{\mathbb{M}}\}.$$

Поэтому мы можем использовать $w_k$ в качестве $m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и применить к многообразию $\mathfrak{X}_{\mathbb{M}}$ рассуждения по схеме доказательства теоремы. Пусть $n$ — число различных букв из алфавита $X$, входящих в запись слова $w_k$. Без ограничения общности можно считать, что в слово $w_k(\vec{x})$ входят буквы $x_1, x_2, \ldots, x_n$, и только они, и, следовательно, вместо $w_k(\vec{x})$ можно писать $w_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Пусть $\mathrm{eq}\,\mathfrak{X}_{\mathbb{M}}$ — множество всевозможных нетривиальных тождеств, которым удовлетворяет многообразие $\mathfrak{X}_{\mathbb{M}}$. Рассмотрим множество всевозможных элементов множества $\mathrm{eq}\,\mathfrak{X}_{\mathbb{M}}$, имеющих вид $w_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = v_i(\vec{x})$ и входящих в базис многообразия $\mathfrak{X}$. Без ограничения общности можно полагать, что это множество имеет следующий вид:

$$\{w_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = v_1(\vec{x}), w_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = v_2(\vec{x}), \dots,\\ w_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = v_r(\vec{x}), \dots\}. \quad (14)$$

Заметим, что в каждом из тождеств, задающих многообразие $\mathfrak{X}_{\mathbb{M}}$, мы можем переобозначить переменные таким образом, что если $u_i(\vec{x}) = v_i(\vec{x})$ — тождество из базиса многообразия $\mathfrak{X}_{\mathbb{M}}$ и выполняется одно из следующих соотношений:

$$u_i(\vec{x}) =_X w_k(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad v_i(\vec{x}) =_X w_k(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

то слова $w_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $u_i(\vec{x})$, соответственно слова $w_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $v_i(\vec{x})$, графически равны. Кроме того, заметим, что если в базисе многообразия $\mathfrak{X}_{\mathbb{M}}$ заменить множество тождеств (14) множеством

$$\{w_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = v_1(\vec{x}), v_1(\vec{x}) = v_2(\vec{x}), \dots, v_1(\vec{x}) = v_r(\vec{x}), \dots\},$$

то снова получим базис тождеств многообразия $\mathfrak{X}_{\mathbb{M}}$.

Итак, зафиксируем базис многообразия $\mathfrak{X}_{\mathbb{M}}$ такой, что $V$ содержит минимальный элемент $w_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$, причем если выполняются соотношения $v(\vec{x}) \in V$ и $v(\vec{x}) =_X w_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то слова $v(\vec{x})$ и $w_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ графически равны и, кроме того,

$$w_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = v_1(\vec{x}) \quad (15)$$

— единственное тождество базиса, правая или левая часть которого графически равна $w_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Обозначим этот базис через $\mathbb{V}$.

Пусть $\mathbb{V}^{w_k} \rightleftharpoons (\mathbb{V} \setminus \{w_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = v_1(\vec{x})\}) \cup M$, где

$$M \rightleftharpoons \{\mathfrak{f}_l(w_k(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \mathfrak{f}_l(v_1(\vec{x})),\ x_{n+1}w_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_{n+1}v_1(\vec{x}),\\ w_k(x_1, x_2, \dots, x_n)x_{n+1} = v_1(\vec{x})x_{n+1} \mid l \in \{1, 2, \dots, n\}\},$$

при этом полагаем, что $x_{n+1}$ — буква, не содержащаяся в слове $v_1(\vec{x})$. Многообразие, заданное системой тождеств $\mathbb{V}^{w_k}$, будем обозначать через $\mathfrak{X}^{w_k}$.

Очевидно, что для многообразия $\mathfrak{X}^{w_k}$ справедливы леммы 1 и 2. Поэтому с учетом леммы 2 для завершения доказательства теоремы 2 нам достаточно показать, что множество тождеств многообразия $\mathfrak{X}_{\mathbb{M}}$ рекурсивно тогда и только тогда, когда рекурсивно множество тождеств многообразия $\mathfrak{X}^{w_k}$.

Покажем, что если тождество $u(\vec{x}) = v(\vec{x})$ выполняется в многообразии $\mathfrak{X}_{\mathbb{M}}$ и не выполняется в многообразии $\mathfrak{X}^{w_k}$, то выполняется одно из следующих соотношений:

$$u(\vec{x}) =_X w_k(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad v(\vec{x}) =_X w_k(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (16)$$

В самом деле, пусть $u(\vec{x}) = v(\vec{x})$ — тождество, выполняющееся в многообразии $\mathfrak{X}_{\mathbb{M}}$ и не выполняющееся в многообразии $\mathfrak{X}^{w_k}$. Так как $u(\vec{x}) = v(\vec{x})$ — тождество, выполняющееся в многообразии $\mathfrak{X}_{\mathbb{M}}$, найдется цепочка равенств (7) такая, что каждое последующее слово в этой цепочке получено из предыдущего применением к нему одного из тождеств из множества $\mathbb{V}_{\mathbb{M}}$. Предположим, что для любого $i$ соотношение $w_i(\vec{x}) =_X w_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ложно. Тогда либо переход

$v_{i-1}(\vec{x}) = v_i(\vec{x})$ осуществлен без использования тождества (15), либо для получения равенства $v_{i-1}(\vec{x}) = v_i(\vec{x})$ вместо тождества (15) можно использовать одно из следующих тождеств:

$$\mathfrak{f}_l(w_k(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \mathfrak{f}_l(v_1(\vec{x})), \quad x_{n+1}w_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_{n+1}v_1(\vec{x}),$$
$$w_k(x_1, x_2, \dots, x_n)x_{n+1} = v_1(\vec{x})x_{n+1},$$

где $l \in \{1, 2, \dots, n\}$. Следовательно, либо тождество $u(\vec{x}) = v(\vec{x})$ выполняется в многообразии $\mathfrak{X}^{w_k}$, либо найдется натуральное число $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ такое, что

$$v_i(\vec{x}) =_X w_k(x_1, x_2, \dots, x_n). \tag{17}$$

Тогда, поскольку $w_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — минимальный элемент множества $V_{\mathbb{M}}$, имеют место следующие соотношения:

$$v_{i-1}(\vec{x}) =_X v_{i+1}(\vec{x}) =_X v_1(\vec{x}).$$

Значит, вместо цепочки равенств (7) можно рассматривать цепочку равенств (9). Действуя таким образом, мы придем к случаю, когда для любого числа $i$ соотношение (17) ложно. Итак, мы убедились в том, что если тождество $u(\vec{x}) = v(\vec{x})$ выполняется в многообразии $\mathfrak{X}$ и не выполняется в многообразии $\mathfrak{X}^{w_k}$, то выполняется одно из соотношений (16).

Покажем теперь, что если тождество $u(\vec{x}) = v(\vec{x})$ выполняется в многообразии $\mathfrak{X}_{\mathbb{M}}$ и выполняется одно из соотношений (16), то тождество $u(\vec{x}) = v(\vec{x})$ не выполняется в многообразии $\mathfrak{X}^{w_k}$. Пусть для определенности

$$u(\vec{x}) =_X w_k(x_1, x_2, \dots, x_n). \tag{18}$$

Без ограничения общности можно считать, что слова $u(\vec{x})$ и $w_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ графически равны. Следовательно, тождество $u(\vec{x}) = v(\vec{x})$ имеет вид

$$w_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = v(\vec{x}). \tag{19}$$

Предположим, что тождество (19) выполняется в многообразии $\mathfrak{X}^{w_k}$. Тогда найдется цепочка равенств

$$w_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = v_1(\vec{x}) = v_2(\vec{x}) = \dots = v_p(\vec{x}) = v(\vec{x}) \tag{20}$$

такая, что каждое последующее слово в этой цепочке получено из предыдущего применением к нему одного из базисных тождеств многообразия $\mathfrak{X}^{w_k}$. Из определения многообразия $\mathfrak{X}^{w_k}$ очевидным образом вытекает, что если $s(\vec{x}) = t(\vec{x})$ — тождество из базиса многообразия $\mathfrak{X}^{w_k}$, то соотношения

$$s(\vec{x}) < w_k(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad t(\vec{x}) < w_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ложны. Следовательно, ни одно из тождеств многообразия $\mathfrak{X}^{w_k}$ не применимо к слову $w_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$, т. е. предположение о том, что найдется цепочка равенств (20), ложно.

Таким образом, мы убедились в том, что если тождество $u(\vec{x}) = v(\vec{x})$ выполняется в многообразии $\mathfrak{X}$, то оно не выполняется в многообразии $\mathfrak{X}^{w_k}$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из соотношений (16). Отсюда непосредственно вытекает, что множество $\operatorname{eq}\mathfrak{X}^{w_k}$ всевозможных нетривиальных тождеств многообразия $\mathfrak{X}^{w_k}$ имеет вид

$$\operatorname{eq}\mathfrak{X}^{w_k} = \operatorname{eq}\mathfrak{X}_{\mathbb{M}} \setminus (\{u(\vec{x}) = v(\vec{x}) \mid u(\vec{x}) =_X w_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$\vee\, v(\vec{x}) =_X w_k(x_1, x_2, \dots, x_n)\} \cap \operatorname{eq}\mathfrak{X}_{\mathbb{M}}).$$

Очевидно, что множество тождеств

$$\{u(\vec{x}) = v(\vec{x}) \mid u(\vec{x}) =_X w_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee v(\vec{x}) =_X w_k(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$$

рекурсивно. Допустим, что множество тождеств $\operatorname{eq}\mathfrak{X}_{\mathbb{M}}$ тоже рекурсивно. Тогда очевидно, что и множество $\operatorname{eq}\mathfrak{X}^{w_k}$ рекурсивно. Допустим теперь, что множество тождеств $\operatorname{eq}\mathfrak{X}_{\mathbb{M}}$ не рекурсивно. Если множество

$$\{u(\vec{x}) = v(\vec{x}) \mid u(\vec{x}) =_X w_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vee v(\vec{x}) =_X w_k(x_1, x_2, \dots, x_n)\} \cap \operatorname{eq}\mathfrak{X}_{\mathbb{M}} \quad (21)$$

рекурсивно, то очевидно, что множество $\operatorname{eq}\mathfrak{X}^{w_k}$ не рекурсивно. Предположим, что множество (21) не рекурсивно. Тогда не существует алгоритма, определяющего по произвольному тождеству $u(\vec{x}) = v(\vec{x})$, удовлетворяющему (18), выполняется оно в многообразии $\mathfrak{X}_{\mathbb{M}}$ или нет. Из приведенных выше рассуждений вытекает, что тождество $u(\vec{x}) = v(\vec{x})$ выполняется в многообразии $\mathfrak{X}_{\mathbb{M}}$ тогда и только тогда, когда в многообразии $\mathfrak{X}^{w_k}$ выполняется тождество $w(\vec{x}) = v(\vec{x})$ для некоторого слова $w(\vec{x})$ такого, что $w(\vec{x}) =_X v_1(\vec{x})$. Следовательно, если не существует алгоритма, определяющего по произвольному тождеству $u(\vec{x}) = v(\vec{x})$ такому, что имеет место соотношение (18), выполняется оно в многообразии $\mathfrak{X}_{\mathbb{M}}$ или нет, то не существует алгоритма, определяющего по произвольному тождеству $w(\vec{x}) = v(\vec{x})$ такому, что $w(\vec{x}) =_X v_1(\vec{x})$, выполняется оно в многообразии $\mathfrak{X}^{w_k}$ или нет, т. е. множество $\operatorname{eq}\mathfrak{X}^{w_k}$ не рекурсивно.

Итак, нам осталось показать, что для любых $i$ и $j$ многообразия $\mathfrak{X}^{w_i}$ и $\mathfrak{X}^{w_j}$ различны. Заметим, что система тождеств

$$\left\{w_n = w_n^2 \mid n \in \mathbb{M}\right\}$$

независима и для любого $l$

$$\mathfrak{X}^{w_j} \models w_l = w_l^2, w_l = w_l^2 \in \{w_n = w_n^2 \mid n \in \mathbb{M}\} \Leftrightarrow j \neq l.$$

Следовательно, $\mathfrak{X}^{w_i} \neq \mathfrak{X}^{w_j}$, поскольку

$$\mathfrak{X}^{w_j} \models w_i = {w_i}^2, \quad \mathfrak{X}^{w_i} \not\models w_i = {w_i}^2.$$

Теорема 2 доказана.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Мальцев А. И.* Тождественные соотношения на многообразиях квазигрупп // Мат. сб. 1966. Т. 69, № 1. С. 3–12.
2. Коуровская тетрадь. 10-е изд. Новосибирск: Ин-т математики, 1986.
3. *Мурский В. Л.* Несколько примеров многообразий полугрупп // Мат. заметки. 1968. Т. 3, № 6. С. 663–670.
4. *Клейман Ю. Г.* О тождествах в группах // Тр. Моск. мат. о-ва. 1982. Т. 44. С. 62–108.
5. *Айвазян С. В.* Проблема А. И. Мальцева // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 3. С. 3–11.
6. *Belov A. J.* Solution of one Maltzev problem // II междунар. конф. «Полугруппы: теория и приложения» в честь профессора Е. С. Ляпина: Тез. докл. СПб, 2–9 июля 1999 г. С. 9.
7. *Попов В. Ю.* Эквациональные теории многообразий метабелевых и коммутативных колец // Алгебра и логика. 1995. Т. 34, № 3. С. 347–361.
8. *Попов В. Ю.* Об эквациональных теориях многообразий антикоммутативных колец // Мат. заметки. 1999. Т. 65, № 2. С. 230–245.
9. *Попов В. Ю.* Неразрешимость проблемы равенства в относительно свободных кольцах // Мат. заметки. 2000. Т. 67, № 4. С. 582–594.
10. *Попов В. Ю.* О разрешимости эквациональных теорий многообразий колец // Мат. заметки. 1998. Т. 63, № 6. С. 873–881.

**11.** *Попов В. Ю.* О некоторых алгоритмических проблемах, связанных с многообразиями неассоциативных колец // Мат. тр. 2000. Т. 3, № 2. С. 146–170.
**12.** *Попов В. Ю.* Об эквациональных теориях классов полугрупп // II междунар. конф. «Полугруппы: теория и приложения» в честь профессора Е. С. Ляпина: Тез. докл. СПб, 2–9 июля 1999 г. С. 94–95.
**13.** *Трахтман А. Н.* О покрывающих элементах в структуре многообразий алгебр // Мат. заметки. 1974. Т. 15, № 2. С. 307–312.
**14.** *Шеврин Л. Н., Волков М. В.* Тождества полугрупп // Изв. вузов. Математика. 1985. № 11. С. 3–47.
**15.** *Гретцер Г.* Общая теория решеток. М.: Мир, 1982.
**16.** *Kharlampovich O. G., Sapir M. V.* Algorithmic problems in varieties // Internat. J. Algebra Comput. 1995. V. 5, N 4–5. P. 379–602.
**17.** *Клейман Ю. Г.* О некоторых вопросах теории многообразий групп // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1983. Т. 47, № 1. С. 37–74.
**18.** *Ольшанский А. Ю.* О некоторых бесконечных системах тождеств // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. 1978. Т. 13. С. 139–145.
**19.** *Jacobson N.* Structure of rings. Providence, Rhode Island: AMS, 1956.
**20.** *Сапир М. В.* Проблемы бернсайдовского типа и конечная базируемость в многообразиях полугрупп // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1987. Т. 51, № 2. С. 319–340.
**21.** *Сапир М. В.* Ограниченная проблема Бернсайда для многообразий полугрупп // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1991. Т. 55, № 3. С. 670–679.
**22.** *Bean D. R., Ehrenfeucht A., McNulty G.* Avoidable patterns in strings of simbols // Pacific J. Math. 1979. V. 85. P. 261–294.
**23.** *Зимин А. И.* Блокирующие множества термов // Мат. сб. 1982. Т. 119. С. 363–375.
**24.** *Perkins P.* Decision problems for equational theories of semigroups and general algebras. :Thes ... doct. phylosophy (mathematics). Univ. California. Berkeley Calif., 1966.

*Статья поступила 25 января 2001 г.*

*Попов Владимир Юрьевич*
*Уральский гос. университет им. А. М. Горького,*
*механико-математический факультет, кафедра алгебры и дискретной математики,*
*пр. Ленина, 51, Екатеринбург*