Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2001. Том 42, № 6

УДК 517.518.36

ПСЕВДООРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Ю. И. Кузнецов

Аннотация: Рассматривается классическая задача преобразования веса ортогональности многочленов средствами пространства $\mathbb{R}_n$. Описаны системы многочленов, названных псевдоортогональными на конечном множестве n точек. Многочлены этих систем, как и ортогональные, связаны трехчленными соотношениями с трехдиагональной матрицей, которая хотя и неразложима, но не имеет свойства якобиевости. Тем не менее эти многочлены обладают вещественными однократными корнями, причем корни двух соседних многочленов почти все разделяют друг друга. Веса псевдоортогональности частично отрицательны. Другим результатом является анализ отношений между матрицами двух различных ортогональных систем, позволяющий дать четкие условия существования псевдоортогональных многочленов. Библиогр. 6.

1. Теории ортогональных многочленов на дискретном множестве точек посвящен ряд работ, в частности [1–4]. В данной работе дается обобщение системы ортогональных многочленов на конечном множестве точек, для чего используется преобразование веса ортогональности [2, 5, 6] средствами пространства $\mathbb{R}_n$. Показывается, что если некоторые веса ортогональности отрицательны, то при определенном их выборе корни системы многочленов все же остаются вещественными и имеет место их слабое разделение. Сами многочлены, названные псевдоортогональными, связаны трехчленными соотношениями, коэффициенты которых образуют трехдиагональную матрицу, хотя и неразложимую, но без свойства якобиевости. Другим результатом является анализ отношений между матрицами двух различных ортогональных систем, позволяющий дать четкие условия существования псевдоортогональных многочленов. Следует подчеркнуть, что полученные результаты теряют силу, если в качестве скалярного произведения берется интеграл.

В этом пункте для удобства изложения дается сводка известных результатов.

Системе многочленов $P_k(\lambda)$, $k = 0(1)n-1$, ортогональных на множестве точек λ_i, $i = 1(1)n$, можно поставить в соответствие якобиеву матрицу

$$T = \begin{bmatrix} b_1 & 1 & & \\ g_1 & b_2 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & g_{n-1} & b_n \end{bmatrix}, \quad g_k > 0, \tag{1}$$

связывающую эти многочлены:

$$\begin{gathered} P_{-1}(\lambda) = 0, \quad P_0(\lambda) = 1, \\ P_k(\lambda) = (\lambda - b_k)P_{k-1}(\lambda) - g_{k-1}P_{k-2}(\lambda), \quad k = 1(1)n, \\ P_n(\lambda_i) = 0, \quad i = 1(1)n, \end{gathered} \tag{2}$$

© 2001 Кузнецов Ю. И.

и положительно определенную ганкелеву матрицу $H = (h_{i+j-2})$, $i, j = 1(1)n$,

$$h_k = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^k, \tag{3}$$

где c_i — веса ортогональности многочленов P_k,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i P_k(\lambda_i) P_l(\lambda_i) = d_k \delta_{kl}, \tag{4}$$

с нормировкой

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = d_1 = h_0 = 1, \quad c_i > 0. \tag{5}$$

Если ввести матрицы

$$\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n), \quad C = \operatorname{diag}(c_1, \dots, c_n),$$
$$V = \left(\lambda_i^{j-1}\right), \quad i, j = 1(1)n$$

($Ve_k = \Lambda^{k-1} e$, где e_k — k-й столбец единичной матрицы E, $e = (1, \dots, 1)^T$), а также матрицу P коэффициентов ортогональных многочленов

$$P_k(\lambda) = \sum_{j=0}^{k} p_j^k \lambda^j, \quad p_k^k = 1, \tag{6}$$

$$P = \begin{bmatrix} p_0^0 & p_0^1 & \dots & p_0^{n-1} \\ & p_1^1 & \dots & p_1^{n-1} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & p_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

то можно дать матричную форму отношений между ортогональными многочленами и матрицами T, H. Справедливы равенства

$$TY^T = Y^T \Lambda, \tag{8}$$

где

$$Y = VP, \tag{9}$$

$$H = V^T C V = P^{-T} D P^{-1}, \tag{10}$$

причем $d_k = |H_k|/|H_{k-1}|$ — отношение главных последовательных миноров матрицы H,

$$Y^T C Y = D, \tag{11}$$

$$Y D^{-1} Y^T = C^{-1}. \tag{12}$$

Элементы матрицы T имеют следующее выражение:

$$g_k = d_{k+1}/d_k \quad k = 1(1)n-1, \tag{13}$$

$$b_k = p_{k-2}^{k-1} - p_{k-1}^k, \quad k = 1(1)n, \tag{14}$$

при этом полагается $p_{-1}^0 = 0$. Если $\lambda_j^{(k)}$ — корни многочлена $P_k(\lambda)$,

$$P_k(\lambda_j^{(k)}) = 0, \quad j = 1(1)k, \tag{15}$$

упорядоченные по убыванию, то имеет место следующее свойство разделения корней:

$$\lambda_{j+1}^{(k)} < \lambda_j^{(k-1)} < \lambda_j^{(k)}, \quad j = 1(1)k-1, \tag{16}$$

причем $\lambda_j^{(n)} = \lambda_j$. Задание одной из матриц T, H полностью определяет систему ортогональных многочленов, и наоборот. В частности, полностью и единственным образом определяется вся система, если заданы узлы λ_i и веса c_i, $i = 1(1)n$, ортогональности.

Как было сказано, нас интересует ситуация, когда некоторые g_k в матрице (1) отрицательны. В этом случае корни многочленов $P_j(\lambda)$ могут оказаться комплексными. Однако, и это есть главный результат работы, если веса c_i имеют одну перемену знака, все $\lambda_j^{(k)}$ вещественны. Разделение (16) в этом случае также справедливо, но в слабой форме.

2. Найдем необходимые для дальнейшего соотношения (36)–(38) (обычно они находятся из тождества Кристоффеля — Дарбу), применяя технику пространства $\mathbb{R}_n$, что позволит проследить связь псевдоортогональных многочленов с трехдиагональными матрицами. Положительная определенность матрицы H обеспечивается положительностью весов c_i. Введем наряду с этим условие

$$\lambda_i > 0, \quad i = 1(1)n, \tag{17}$$

и преобразуем веса ортогональности по формуле

$$\tilde{c}_i = a(\lambda_i - b)c_i, \quad i = 1(1)n. \tag{18}$$

Если $\tilde{c}_i$ положительны, то можно их подчинить условию (5) и построить новую систему ортогональных многочленов $\widetilde{P}_k(\lambda)$, ортогональных на множестве λ_i, $i = 1(1)n$. Все матрицы и элементы, связанные с этой системой, будем отмечать волной. Очевидно, для новой системы справедливы соотношения (1)–(17). В частности, так как

$$\widetilde{C} = a(\Lambda - bE)C, \tag{19}$$

то

$$\widetilde{H} = V^T\widetilde{C}V = aV^T(T - bE)CV. \tag{20}$$

Наша ближайшая цель — установить связь многочленов, порожденных прямой и преобразованной матрицами.

Лемма 1. *Справедливо представление*

$$\widetilde{H} = aP^{-T}(T - bE)DP^{-1}. \tag{21}$$

Доказательство. Для произвольного многочлена $Q(\Lambda)$ из (8), (11) имеем $Q(T)D = Y^TQ(\Lambda)CY$, откуда, применяя факторизацию (9), находим $V^TQ(\Lambda)CV = P^{-T}Q(T)DP^{-1}$. При $Q(\lambda) = a(\lambda - b)$ это равенство приводит к (21).

Классическая теория ортогональных многочленов требует положительной определенности матрицы H и налагает ограничения на параметр b, как видно из следующего известного [2] результата.

Лемма 2. *Для того чтобы ганкелева матрица $\widetilde{H}$ с условием $\tilde{h}_0 = 1$ была положительно определена, необходимо и достаточно выполнение следующих соотношений:*

$$b < \lambda_n \vee b > \lambda_1, \tag{22}$$

$$a = \frac{1}{h_1 - b}. \tag{23}$$

Ограничение (22) на преобразование (19) справедливы в полной мере только для бесконечной системы ортогональных многочленов. Такие системы определяются скалярным произведением

$$(u, v) = \int_A^B u(x)v(x)d\sigma(x),$$

где $\sigma(x)$ — функция с бесконечным числом точек роста. Если же число точек роста функции $\sigma(x)$ конечно, т. е. скалярное произведение имеет вид (4), то положение становится принципиально другим. Покажем, что в этом случае можно ослабить ограничения (22). Для этого установим некоторые вспомогательные соотношения.

Для нахождения матриц $\widetilde{P}$, $\widetilde{D}$ воспользуемся треугольным разложением матрицы $a(T - bE)D$, очевидно, симметричной:

$$a(T - bE)D = L^T \Delta L, \tag{24}$$

где $\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n)$ и

$$L = E + \sum_{k=1}^{n-1} l_k e_k e_{k+1}^T \tag{25}$$

— верхняя двухдиагональная матрица. Непосредственное перемножение и последующее сложение в (24) приводит к равенствам

$$\delta_k l_k = a d_{k+1} = a g_k d_k, \quad k = 1(1)n - 1, \quad \delta_k + \delta_{k-1} l_{k-1}^2 = a(b_k - b)d_k \tag{26}$$

или

$$\frac{\delta_k}{a d_k} = b_k - b - l_{k-1}, \quad k = 1(1)n, \tag{27}$$

с условием $l_0 = 0$. Таким образом,

$$\widetilde{H} = P^{-T} L^T \Delta L P^{-1} = \widetilde{P}^{-T} \widetilde{D} \widetilde{P}^{-1}.$$

Матрицы L и P имеют единичные диагональные элементы, поэтому в силу единственности разложения (10)

$$\widetilde{P} = P L^{-1}, \quad \widetilde{D} = \Delta. \tag{28}$$

По определению (9)

$$\widetilde{Y} = Y L^{-1}. \tag{29}$$

Остается определить матрицу $\widetilde{T}$.

Лемма 3. *Справедливо представление*

$$a(\widetilde{T} - bE) = \Delta L D^{-1} L^T. \tag{30}$$

Доказательство. Согласно (24) и (8) $L^T \Delta L D^{-1} Y^T = a Y^T(\Lambda - bE)$. С помощью (29) отсюда находим

$$\Delta L D^{-1} Y^T = a \widetilde{Y}^T (\Lambda - bE). \tag{31}$$

Наконец, заменяя и в левой части Y^T на $\widetilde{Y}^T$, получаем

$$\Delta L D^{-1} L^T \widetilde{Y}^T = a \widetilde{Y}^T (\Lambda - bE) = a(\widetilde{T} - bE)\widetilde{Y}^T.$$

Отсюда в силу невырожденности $\widetilde{Y}$ следует утверждение леммы.

Лемма 4. *Элементы матрицы $\widetilde{T}$ имеют вид*

$$\tilde{g}_k = \frac{\delta_{k+1}}{\delta_k}, \quad k = 1(1)n-1, \tag{32}$$

$$\tilde{b}_k = b_k + l_k - l_{k-1}, \quad k = 1(1)n, \tag{33}$$

причем $l_0 = l_n = 0$,

$$\delta_k = -ad_k \frac{P_k(b)}{P_{k-1}(b)}, \quad k = 1(1)n, \tag{34}$$

$$l_k = -g_k \frac{P_{k-1}(b)}{P_k(b)}, \quad k = 1(1)n-1. \tag{35}$$

Доказательство. Из равенства

$$LD^{-1}L^T = D^{-1} + \sum_{k=1}^{n} e_k \left(\frac{l_{k-1}}{d_k} e_{k-1}^T + \frac{l_k^2}{d_{k+1}} e_k^T + \frac{l_k}{d_{k+1}} e_{k+1}^T \right)$$

имеем

$$a\tilde{g}_{k-1} = \frac{\delta_k l_{k-1}}{d_k}, \quad a(\tilde{b}_k - b) = \delta_k \left(\frac{1}{d_k} + \frac{l_k^2}{d_{k+1}} \right).$$

Из (26) и (27) вытекают (32) и (33). Из второго равенства (26) получаем (34), затем из первого — (35).

Связь многочленов $P_k(\lambda)$ и $\widetilde{P}_k(\lambda)$ устанавливает

Лемма 5. *Справедливы соотношения*

$$P_k(\lambda) = \widetilde{P}_k(\lambda) + l_k \widetilde{P}_{k-1}(\lambda), \quad l_n = 0, \tag{36}$$

$$-\frac{P_k(b)}{P_{k-1}(b)} P_{k-1}(\lambda) + P_k(\lambda) = (\lambda - b)\widetilde{P}_{k-1}(\lambda), \tag{37}$$

$$\widetilde{P}_{k-1}(\lambda) = \frac{d_k}{P_{k-1}(b)} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{d_j} P_{j-1}(b) P_{j-1}(\lambda). \quad k = 1(1)n. \tag{38}$$

Доказательство. Из соотношения (29) вытекает, что $Y = \widetilde{Y}L$, $e_j^T Y e_{k+1} = e_j^T \widetilde{Y} L e_{k+1}$, или

$$P_k(\lambda_j) = \widetilde{P}_k(\lambda_j) + l_k \widetilde{P}_{k-1}(\lambda_j).$$

Это равенство справедливо в n точках λ_j, поэтому для многочленов порядка меньше n справедливо всюду. При $k = n$ оно также справедливо из-за принятой нормировки. Таким образом, доказано соотношение (36). Соотношение (37) аналогичным образом выводится из (31). Наконец, для получения (38) можно воспользоваться соотношением (29), обращая матрицу L:

$$L^{-1} = \sum_{j=1}^{n} e_j \sum_{k=j}^{n} e_k^T \prod_{i=j}^{k-1} (-l_i),$$

либо использовать непосредственно (37), учитывая тождество Кристоффеля — Дарбу

$$\frac{P_k(\lambda)P_{k-1}(b) - P_k(b)P_{k-1}(\lambda)}{\lambda - b} = d_k \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{d_j} P_{j-1}(b) P_{j-1}(\lambda). \tag{39}$$

3. Полученных соотношений достаточно, чтобы исследовать зависимость системы многочленов $\widetilde{P}_k(\lambda)$, $k = 0(1)n-1$, от b. Введем интервалы

$$I_j^{(k)} = (\lambda_{j+1}^{(k)}, \lambda_j^{(k)}),\ j = 0(1)k, \quad \widetilde{I}_j^{(k)} = (\tilde{\lambda}_{j+1}^{(k)}, \tilde{\lambda}_j^{(k)}),\ j = 0(1)k,$$

где $\bigl(\lambda_{k+1}^{(k)}, \lambda_0^{(k)}\bigr)$ — какой-нибудь интервал, содержащий все корни многочлена $P_k(\lambda)$ и точку b. Аналогичный смысл имеет интервал $\bigl(\tilde{\lambda}_{k+1}^{(k)}, \tilde{\lambda}_0^{(k)}\bigr)$. По определению $I_j^{(n)} = I_j$. Таким образом, всегда найдется l такое, что

$$b \in I_l, \quad l = 0(1)n. \tag{40}$$

Из (18) следует, что последовательность $\tilde{c}_i$, $i = 1(1)n$, имеет нуль перемен знака, если $b \in I_0$ или $b \in I_n$, и одну перемену знака в противном случае. Если перемен знака в последовательности $\tilde{c}_i$ нет, то многочлены $\widetilde{P}_k(\lambda)$ ортогональны. Предметом данного исследования является преобразование (18) в общем случае.

Лемма 6. *При условии*

$$P_k(b) \neq 0, \quad k = 1(1)n, \tag{41}$$

матрица $\widetilde{H}$ является строго невырожденной (*т. е. все главные последовательные миноры отличны от нуля*). *В этом и только в этом случае существует ее треугольное разложение* (10).

Доказательство. Согласно второму равенству (28) и представлению (34)

$$\tilde{d}_k = -ad_k\frac{P_k(b)}{P_{k-1}(b)}, \quad k = 1(1)n. \tag{42}$$

Так как $\tilde{d}_k$ является отношением главных последовательных миноров матрицы $\widetilde{H}$, $a \neq 0$, $d_k \neq 0$, $k = 1(1)n$, утверждение доказано.

Теорема 1. *Пусть*

$$b \in I_m^{(k)}, \quad m = 0(1)k. \tag{43}$$

При выполнении условий (41) *справедлива одна из двух групп неравенств:*

$$\tilde{\lambda}_{j+1}^{(k)} < \tilde{\lambda}_j^{(k-1)} < \tilde{\lambda}_j^{(k)}, \quad j = 1(1)m-1, \tag{44}$$

$$\tilde{\lambda}_{j+2}^{(k)} < \tilde{\lambda}_j^{(k-1)} < \tilde{\lambda}_{j+1}^{(k)}, \quad j = m(1)k-1, \tag{45}$$

и $b \in \tilde{I}_{m-1}^{(k-1)}$, если

$$P_{k-1}(b)P_k(b) < 0; \tag{46}$$

или

$$\tilde{\lambda}_j^{(k)} < \tilde{\lambda}_j^{(k-1)} < \tilde{\lambda}_{j-1}^{(k)}, \quad j = 1(1)m, \tag{47}$$

$$\tilde{\lambda}_{j+1}^{(k)} < \tilde{\lambda}_j^{(k-1)} < \tilde{\lambda}_j^{(k)}, \quad j = m+1(1)k-1, \tag{48}$$

и $b \in \tilde{I}_m^{(k-1)}$, если

$$P_{k-1}(b)P_k(b) > 0. \tag{49}$$

Все корни многочленов $\widetilde{P}_k(\lambda)$ вещественны и однократны.

Доказательство. Из неравенств (16) следует, что многочлены $P_{k-1}(\lambda)$ имеют противоположные знаки на границах каждого интервала I_j, $j = 1(1)k-1$. Далее, в соответствии с равенствами (37)

$$v_k(j) = \frac{P_{k-1}\bigl(\lambda_j^{(k)}\bigr)}{\widetilde{P}_{k-1}\bigl(\lambda_j^{(k)}\bigr)} = \bigl(b - \lambda_j^{(k)}\bigr)\frac{P_{k-1}(b)}{P_k(b)}, \quad k = 1(1)n. \tag{50}$$

Если $m = 0$ или $m = k$, то $v_k(j)$, $j = 1(1)k$, не имеет перемен знака, поэтому знаки многочлена $\widetilde{P}_{k-1}(\lambda)$ противоположны на концах интервала $I_j^{(k)}$ (т. е. многочлены обращаются внутри интервала в нуль). Поэтому

$$\lambda_{j+1}^{(k)} < \tilde{\lambda}_j^{(k-1)} < \lambda_j^{(k)}, \quad j = 1(1)k-1. \tag{51}$$

Если $m = 1(1)k-1$, то последовательность $v_k(j)$, $j = 1(1)k$, имеет одну перемену знака при $j = m$. Поэтому знаки многочлена $\widetilde{P}_{k-1}(\lambda)$ противоположны во всех интервалах $I_j^{(k)}$, кроме $I_m^{(k)}$. Следовательно, внутри интервалов $I_j^{(k)}$, $j = 1(1)k-1$, $j \neq m$ есть корень многочлена $\widetilde{P}_{k-1}(\lambda)$. Еще один корень есть в том интервале из двух оставшихся, в котором $v_k(j) < 0$ (поскольку $P_{k-1}(\lambda)$ и $\widetilde{P}_{k-1}(\lambda)$ на $(-\infty, +\infty)$ ведут себя одинаково): $\tilde{\lambda}_{k-1}^{(k-1)} < \lambda_k^{(k)}$ при условии (46) и $\lambda_1^{(k)} < \tilde{\lambda}_1^{(k-1)}$ при условии (49). Таким образом, $I_m^{(k)} \in \widetilde{I}_{m-1}^{(k-1)}$, т. е. $b \in \tilde{I}_{m-1}^{(k-1)}$, при условии (46), что означает

$$\tilde{\lambda}_m^{(k-1)} < \lambda_{m+1}^{(k)} < \lambda_m^{(k)} < \tilde{\lambda}_{m-1}^{(k-1)},$$

следовательно,

$$\lambda_{j+1}^{(k)} < \tilde{\lambda}_j^{(k-1)} < \lambda_j^{(k)}, \quad j = 1(1)m-1, \tag{52}$$

$$\lambda_{j+2}^{(k)} < \tilde{\lambda}_j^{(k-1)} < \lambda_{j+1}^{(k)}, \quad j = m(1)k-1. \tag{53}$$

При условии (49) $I_m^{(k)} \in \widetilde{I}_m^{(k-1)}$, т. е. $b \in \tilde{I}_m^{(k-1)}$, что означает

$$\tilde{\lambda}_{m+1}^{(k-1)} < \lambda_{m+1}^{(k)} < \lambda_m^{(k)} < \tilde{\lambda}_m^{(k-1)},$$

значит,

$$\lambda_j^{(k)} < \tilde{\lambda}_j^{(k-1)} < \lambda_{j-1}^{(k)}, \quad j = 1(1)m, \tag{54}$$

$$\lambda_{j+1}^{(k)} < \tilde{\lambda}_j^{(k-1)} < \tilde{\lambda}_j^{(k)}, \quad j = m+1(1)k-1. \tag{55}$$

Полученные неравенства включают в себя и неравенства (51). Действительно, при $m = 0$ выполняется условие (49), а при $m = k$ — условие (46), поэтому (51) совпадает либо с (55), либо с (52).

Переход от неравенств (52), (53) и (54), (55) к неравенствам (44), (45) и (47), (48) соответственно становится очевидным, если заметить, что из (36) следует

$$P_k\big(\tilde{\lambda}_j^{(k-1)}\big) = \widetilde{P}_k\big(\tilde{\lambda}_j^{(k-1)}\big), \quad j = 1(1)k-1,$$

$$P_k(\tilde{\lambda}_j^{(k-1)})\tilde{P}_k(\tilde{\lambda}_j^{(k-1)}) > 0, \quad j = 0, k.$$

Последнее утверждение теоремы есть следствие доказанных неравенств.

Определение. Пусть $l \neq 0$, $l \neq n$ и выполнены условия (40), (41). Многочлены $\tilde{P}_k(\lambda)$, $k = 0(1)n-1$, назовем *псевдоортогональными на множестве точек* λ_j *с весами* $\tilde{c}_j$, $j = 1(1)n$, или просто *псевдоортогональными.*

Замечание. Псевдоортогональным многочленам соответствует строго невырожденная (но уже не положительно определенная) матрица $\widetilde{H}$ с одной переменой знака в последовательности $\tilde{c}_j$, $j = 1(1)n$. У соответствующей им матрицы T, которую можно было бы назвать *псевдоякобиевой*, некоторые g_k отрицательные.

Теорема 2. *Пусть* $b \in I_m^{(k)}$, $m = 0(1)k$. *Тогда при выполнении условий* (41)

$$\tilde{\lambda}_{j+1}^{(k)} < \lambda_j^{(k)} < \tilde{\lambda}_j^{(k)}, \quad j = 1(1)m-1, \tag{56}$$

$$\tilde{\lambda}_{m+1}^{(k)} < \lambda_{m+1}^{(k)} < \lambda_m^{(k)} < \tilde{\lambda}_m^{(k)} \tag{57}$$

(*что означает также* $b \in \tilde{I}_m^{(k)}$),

$$\tilde{\lambda}_j^{(k)} < \lambda_j^{(k)} < \tilde{\lambda}_{j-1}^{(k)}, \quad j = m+2(1)k. \tag{58}$$

Доказательство. Из неравенств (44), (45) (так же, как и из (47), (48)) находим

$$\operatorname{sign}((P_{k-1}(b)/P_k(b))\widetilde{P}_{k-1}(\tilde{\lambda}_j^{(k)}) = (-1)^j, \quad j = 1(1)m,$$

$$\operatorname{sign}((P_{k-1}(b)/P_k(b))\widetilde{P}_{k-1}(\tilde{\lambda}_j^{(k)}) = (-1)^{j-1}, \quad j = m+1(1)k.$$

Но из (36) и (35) следует, что

$$-g_k(P_{k-1}(b)/P_k(b))\widetilde{P}_{k-1}(\tilde{\lambda}_j^{(k)})P_k(\tilde{\lambda}_j^{(k)}) > 0.$$

Это вместе с предыдущими равенствами и условием $g_k > 0$ приводит к соотношениям

$$\operatorname{sign}\big(P_k(\tilde{\lambda}_j^{(k)})\big) = (-1)^{j-1}, \quad j = 1(1)m, \tag{59}$$

$$\operatorname{sign}\big(P_k(\tilde{\lambda}_j^{(k)})\big) = (-1)^{j}, \quad j = m+1(1)k. \tag{60}$$

Из (59) заключаем, что первые $m-1$ корней многочлена $P_k(\lambda)$ лежат в интервалах $\widetilde{I}_j^{(k)}$, $j = 1(1)m-1$, что дает неравенства (56). Далее, из (60) при $j = k$ находим

$$\operatorname{sign}\big(P_k(\tilde{\lambda}_k^{(k)})\big) = \operatorname{sign}(P_k(-\infty)),$$

т. е. $\lambda_k^{(k)} < \tilde{\lambda}_k^{(k)}$, поэтому в интервалах $\widetilde{I}_j^{(k)}$, $j = m+1(1)k-1$, лежат следующие $k-m-1$ корней. Таким образом, два корня $\lambda_{m+1}^{(k)}$, $\lambda_m^{(k)}$ должны лежать в интервале $\widetilde{I}_m^{(k)}$.

Теорема 3. *Если при упорядочении* (16) *в последовательности* $\tilde{c}_i \neq 0$, $i = 1(1)n$, *имеется только одна перемена знака, то система многочленов* $\widetilde{P}_k(\lambda)$, $k = 0(1)n-1$, *псевдоортогональна.*

Доказательство. Пусть ввиду условия теоремы

$$a\tilde{c}_j > 0,\ j = 1(1)l, \quad a\tilde{c}_j < 0,\ j = l+1(1)n,$$

где $a \neq 0$ вещественно. Если $b \in I_l$, $l = 1(1)n-1$, то

$$c_i = \frac{\tilde{c}_i}{a(\lambda_i - b)} > 0, \quad i = 1(1)n.$$

В этом случае $H = V^TCV$ положительно определена. Преобразуем веса:

$$\tilde{c}_i = a(\lambda_i - b)c_i,\ i = 1(1)n, \quad b \in I_l.$$

Согласно определению если выполнены условия (41), то многочлены $\widetilde{P}_k(\lambda)$, $k = 0(1)n-1$, псевдоортогональны. Докажем, что условия (41) выполняются. Так как матрица $\widetilde{H}$ строго невырожденна, то $\tilde{g}_k = |\widetilde{H}_{k+1}|/|\widetilde{H}_k| \neq 0$,

$k = 0(1)n-1$. Это значит, что многочлены $\widetilde{P}_k(\lambda)$ связаны трехчленным соотношением и $\deg \widetilde{P}_k(\lambda) = k$. Это было бы невозможно при $P_l(b) = 0$ хотя бы для одного l. В самом деле, предположим противное и определим многочлены $\widetilde{P}_j(\lambda)$ следующим образом:

$$\overline{P}_j(\lambda) = \frac{P_{j+1}(\lambda)P_j(b) - P_j(\lambda)P_{j+1}(b)}{\lambda - b}. \tag{61}$$

С помощью (2) найдем

$$\overline{P}_j(\lambda) = P_j(b)P_j(\lambda) + g_j\overline{P}_{j-1}(\lambda), \quad j = 1(1)n-1. \tag{62}$$

Из (38), (39) следует, что многочлены $\overline{P}_j(\lambda)$, $\widetilde{P}_j(\lambda)$ отличаются только нормировкой

$$\widetilde{P}_j(\lambda) = \frac{1}{P_j(b)}\overline{P}_j(\lambda). \tag{63}$$

Из (63) находим

$$\overline{P}_l(\lambda) = g_l\overline{P}_{l-1}(\lambda), \tag{64}$$

или $\deg \overline{P}_l = l-1$, т. е. многочлен $\widetilde{P}_l(\lambda)$ не может иметь степень l.

Замечание. Из теорем (1), (3) вытекает, что псевдоортогональность (ортогональность) многочленов имеет место тогда и только тогда, когда в последовательности $c_1, \dots, c_n$ при упорядоченности (16) есть одна перемена (нет перемен) знака. В этом случае есть только один из интервалов $I_j^{(k)}$, $j = 1(1)k-1$ (нет ни одного), не содержащий корня многочлена $P_{k-1}(\lambda)$.

Таким образом, между многочленами $P_k(\lambda)$ и $\widetilde{P}_k(\lambda)$, $k = 0(1)n-1$, существует взаимно-однозначное соответствие, если число перемен знака в последовательности $\tilde{c}_i$, $i = 1(1)n$, не превышает единицы. Этот факт подчеркивается следующим утверждением.

Лемма 7. *Справедливо неравенство*

$$P_k(b)\widetilde{P}_k(b) > 0, \quad k = 0(1)n.$$

Доказательство. Воспользуемся методом индукции. Из (36) при $\lambda = b$ с помощью (35) находим

$$P_k(b)\widetilde{P}_k(b) = P_k^2(b) + g_kP_{k-1}(b)\widetilde{P}_{k-1}(b),$$

$$g_k > 0, \quad k = 1(1)n-1, \quad g_n = 0.$$

Начальный участок индукции обеспечивается неравенством

$$P_0(b)\widetilde{P}_0(b) = 1 > 0.$$

Следствие. *В теореме* 1 *условия* (46) *и* (49) *можно записать в эквивалентном виде*

$$\widetilde{P}_{k-1}(b)\widetilde{P}_k(b) < 0, \quad \widetilde{P}_{k-1}(b)\widetilde{P}_k(b) > 0.$$

4. Покажем теперь, что далеко не все линейные преобразования весов приводят к псевдоортогональным или ортогональным многочленам. Будем считать, что число перемен знака в последовательности $c_i \neq 0$, $i = 1(1)n$, равно единице. Рассмотрим преобразование

$$\tilde{c}_i = \alpha(\lambda_i - \beta)c_i, \quad i = 1(1)n, \qquad c_lc_{l+1} < 0, \quad \beta \in I_l.$$

В зависимости от выбора β число перемен знака N в новой последовательности будет 0, 1 или 2. Именно, если $r = l$, то $N = 0$, если $r = 0$ или $r = n$, то $N = 1$, и в остальных случаях $N = 2$. Анализ, аналогичный проделанному в теореме 1, приводит к соотношениям

$$\operatorname{sign} \widetilde{P}_{k-1}\bigl(\lambda_j^{(k)}\bigr) = -\operatorname{sign} P_{k-1}\bigl(\lambda_j^{(k)}\bigr)s(\beta), \quad i = 1(1)r,$$
$$\operatorname{sign}\bigl(\widetilde{P}_{k-1}\bigl(\lambda_j^{(k)}\bigr)\bigr) = \operatorname{sign} P_{k-1}\bigl(\lambda_j^{(k)}\bigr)s(\beta), \quad i = r+1(1)k-1,$$
$$s(\lambda) = \operatorname{sign}(P_{k-1}(\lambda)P_k(\lambda))$$

и

$$\operatorname{sign} P_k\bigl(\lambda_i^{(k)}\bigr) = (-1)^{i-1}, \quad i = 1(1)m-1, \quad s(b) < 0,$$
$$\operatorname{sign} P_k\bigl(\lambda_i^{(k)}\bigr) = (-1)^{i}, \quad i = m(1)k-1, \quad s(b) < 0,$$
$$\operatorname{sign} P_k\bigl(\lambda_i^{(k)}\bigr) = (-1)^{i}, \quad i = 1(1)m, \quad s(b) > 0,$$
$$\operatorname{sign} P_k\bigl(\lambda_i^{(k)}\bigr) = (-1)^{i-1}, \quad i = m+1(1)l-1, \quad s(b) > 0,$$

из которых следует, что многочлен $\widetilde{P}_{k-1}(\lambda)$ обращается в нуль только в том интервале $I_j^{(k)}$, $j = 1(1)r-1$, $r+1(1)k-1$, в котором есть нуль многочлена $P(\lambda)$. Тем самым если $r \neq m$, $0 < r < k$, т. е. в случае $N = 2$, локализуется только $k-3$ корня многочлена $\widetilde{P}_{k-1}(\lambda)$. Два нелокализованных корня могут быть как вещественными, так и комплексными.

Автор выражает благодарность Б. И. Белову за совместные обсуждения, давшие импульс этой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никифоров А. Ф., Суслов С. К., Уваров В. Б.* Классические ортогональные полиномы дискретной переменной. М.: Наука, 1985.
2. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
3. *Ильин В. П., Кузнецов Ю. И.* Алгебраические основы численного анализа. Новосибирск: Наука, 1986.
4. *Кузнецов Ю. И.* Связь положительно определенных матриц и матриц Хессенберга // Сиб. мат. журн. 1986. Т. 27, № 2. С. 94–100.
5. *Белов Б. И.* Элементы алгебраической комбинаторики (ортогональность и коды): Дис. ... докт. физ. мат. наук. Иркутск: Сиб. энерг. ин-т СО АН СССР, 1990.
6. *Левенштейн В. И.* Границы для упаковок метрических пространств и некоторые их приложения // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1983. Вып. 40. С. 43–110.

Статья поступила 28 июня 1996 г.

Кузнецов Юрий Иванович
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск 630090
kuzn@ommfao.sscc.ru